

УДК 515.1

О τ -ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Ю. Н. Миронова

Аннотация: Рассмотрена задача распространения понятия τ -псевдокомпактности с пространств на непрерывные отображения, получены условия, при которых произведение τ -псевдокомпактных отображений τ -псевдокомпактно. Так как любое пространство X можно рассматривать как непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ в точку, имеют место следствия теорем о мультипликативности τ -псевдокомпактности для пространств. Таким образом, изучено понятие τ -псевдокомпактного отображения, а также некоторые его свойства, аналогичные свойствам псевдокомпактного пространства, и следствия полученных утверждений для пространств. Библиогр. 12.

Введение. В работе рассмотрена задача распространения понятия τ -псевдокомпактности с пространств на непрерывные отображения.

Напомним, что тихоновское пространство X называется *псевдокомпактным*, если любая непрерывная на X функция ограничена. Произведение псевдокомпактных пространств не обязано быть псевдокомпактным, однако есть условия, при которых псевдокомпактность произведения сохраняется. Комфорт и Росс [1] доказали, что произведение псевдокомпактных топологических групп является псевдокомпактной топологической группой. М. Г. Ткаченко [2], обобщая это утверждение, показал, что произведение относительно псевдокомпактных подмножеств топологических групп относительно псевдокомпактно в произведении. Аналогичный факт рассмотрел В. В. Успенский [3] для относительно псевдокомпактных подмножеств d -пространств. М. Г. Ткаченко [4] установил наиболее общий в этом ряду факт: если на пространствах X_α имеются счетно-направленные решетки d -открытых отображений на полные по Дьедонне пространства и множества C_α относительно псевдокомпактны в X_α , $\alpha \in A$, то подпроизведение $\prod_{\alpha \in A} C_\alpha$ относительно псевдокомпактно в произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Б. А. Пасынковым была поставлена задача дальнейшего обобщения этих утверждений. В результате возникло понятие τ -псевдокомпактного пространства [5] и было получено искомое обобщение для τ -псевдокомпактных пространств.

Теорема [5]. Если на топологических пространствах X_s , $s \in S$, имеются τ -направленные решетки d -открытых отображений на c - τ -ограниченные пространства и множества C_s относительно τ -псевдокомпактны в X_s , $s \in S$, то множество $C = \prod \{C_s : s \in S\}$ относительно τ -псевдокомпактно в $X = \prod \{X_s : s \in S\}$.

Возникла задача распространения понятия τ -псевдокомпактности с пространств на отображения. Распространяя понятие τ -псевдокомпактности на отображения, получаем свойства τ -псевдокомпактности отображения, аналогичные свойствам τ -псевдокомпактности пространства, полученным в [5].

Так как любое пространство X можно рассматривать как непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ в точку, мы получаем следствия теорем о мультипликативности τ -псевдокомпактности для пространств, которые, в частности, включают в себя перечисленные выше результаты из [1–5].

1. τ -Псевдокомпактные и τ -компактные отображения. Пусть X — топологическое пространство, τ — бесконечный кардинал. Назовем систему λ τ -локальной в X , если для любой точки $x \in X$ существует ее окрестность Ox такая, что $|\text{St}(Ox, \lambda)| < \tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ назовем τ -псевдокомпактным, если для любых открытого в Y множества O , точки $y \in O$ и τ -локальной открытой в $f^{-1}O$ системы λ существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\text{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$.

При $\tau = \omega$ τ -псевдокомпактность отображения совпадает с его ω -псевдокомпактностью (см. [6]).

Свойство 1. Пусть отображения $f_1 : X_1 \rightarrow Y$, $f_2 : X_2 \rightarrow Y$, $g : X_1 \rightarrow X_2$ непрерывны, отображение g сюръективно и $f_1 = f_2 \circ g$. Тогда из τ -псевдокомпактности отображения f_1 следует τ -псевдокомпактность отображения f_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что отображение $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ не τ -псевдокомпактно. Тогда существуют открытое в Y множество O , точка $y \in O$ и τ -локальная открытая в прообразе $f_2^{-1}O$ система λ_2 такие, что для любой окрестности Oy точки y имеем $|\text{St}(f_2^{-1}Oy, \lambda_2)| \geq \tau$.

Так как отображение g непрерывно и сюръективно, система $g^{-1}\lambda_2$ τ -локальна и открыта в пространстве $g^{-1}(f_2^{-1}O) = f_1^{-1}O$. Поскольку отображение f_1 τ -псевдокомпактно, для системы $g^{-1}\lambda_2$ существует окрестность O_2y точки y такая, что $|\text{St}(f_1^{-1}O_2y, g^{-1}\lambda_2)| < \tau$. Следовательно, $|\text{St}(g(f_1^{-1}O_2y), g(g^{-1}\lambda_2))| \geq \tau$. Но у нас $g(f_1^{-1}O_2y) = (f_2^{-1} \circ f_1)(f_1^{-1}O_2y) = f_2^{-1}O_2y, g(g^{-1}\lambda_2) = \lambda_2$ и $|\text{St}(f_2^{-1}O_2y, \lambda_2)| \geq \tau$ для любой окрестности Oy точки y . Полученное противоречие доказывает свойство 1.

Пусть даны отображения $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$, $\alpha \in A$. Будем далее послойное произведение f отображений $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$, $\alpha \in A$ (см. [7]) называть *произведением отображений* $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$, $\alpha \in A$, и обозначать через $f = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$.

Имеем отображение $f : X \rightarrow Y$ и для любого $y \in Y$

$$f^{-1}y = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}y \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Известно

Свойство 2. Послойное произведение совершенных отображений совершенно.

2. Относительно τ -псевдокомпактные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$, $X_1 \subset X$. Подотображение $g = f|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$ отображения f называется *относительно τ -псевдокомпактным в f* , если для любых открытого в Y множества O , точки $y \in O$ и открытой τ -локальной в $f^{-1}O$ системы λ существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\text{St}(g^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что любое τ -псевдокомпактное отображение $f : X \rightarrow Y$ является относительно τ -псевдокомпактным в себе.

Свойство 1. *Непрерывный образ относительно τ -псевдокомпактного отображения относительно τ -псевдокомпактен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X'_1 \subset X_1 & \xrightarrow{\xi} & X_2 \supset X'_2 \\ g_1 \searrow & f_1 \searrow & \swarrow f_2 \swarrow g_2 \\ & Y & \end{array}$$

Отображение $g_1 : X'_1 \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в f_1 . Докажем, что отображение $g_2 = \xi(g_1)$ относительно τ -псевдокомпактно в f_2 . Рассмотрим открытое в Y множество O и точку $y \in O$. Пусть система λ_2 τ -локальна и открыта в трубке $f_2^{-1}O$. Тогда система $\lambda_1 = \xi^{-1}\lambda_2$ открыта и τ -локальна в трубке $f_1^{-1}O = \xi^{-1}f_2^{-1}O$. Так как отображение $g_1 : X'_1 \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в f_1 , существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\text{St}(g_1^{-1}Oy, \lambda_1)| < \tau$. Тогда $|\text{St}(\xi(g_1^{-1}Oy), \xi_1^2)| < \tau$, следовательно, $|\text{St}(g_2^{-1}Oy, \lambda_2)| < \tau$.

Свойство 2. *Пусть отображение $f_1 : X_1 \rightarrow Y$, $f_1 = f|_{X_1}$ относительно τ -псевдокомпактно в $f : X \rightarrow Y$, $X_1 \subset X$ и $X_2 \subset X_1$. Тогда отображение $f_2 = f|_{X_2} : X_2 \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим открытое в Y множество O , точку $y \in O$ и открытую τ -локальную в трубке $f^{-1}O$ систему λ . Так как отображение $f_1 = f|_{X_1}$ относительно τ -псевдокомпактно в f , существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\text{St}(f_1^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$. Поскольку $f_2^{-1}Oy \subset f_1^{-1}Oy$, то $|\text{St}(f_2^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$.

Свойство 3. *Пусть $X_2 \subset X_1 \subset X$, где $f_2 = f|_{X_2} : X \rightarrow Y$ — отображение, $f : X \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в $f_1 : X_1 \rightarrow Y$, $f_1 = f|_{X_1}$. Тогда f_2 относительно τ -псевдокомпактно в f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим открытое в Y множество O , точку $y \in O$ и τ -локальную открытую в $f^{-1}O$ систему λ . Тогда система $\lambda \cap f_1^{-1}O$ открыта и τ -локальна в $f_1^{-1}O$, следовательно, существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\text{St}(f_2^{-1}O, \lambda \cap f_1^{-1}O)| < \tau$. Так как $f_2^{-1}O \subset f_1^{-1}O$, то и $|\text{St}(f_2^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$.

3. c - τ -Ограниченные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ назовем c - τ -ограниченным, если любое его замкнутое относительно τ -псевдокомпактное подотображение $g = f|_{X_1}$, где X_1 замкнуто в X , является совершенным отображением.

Рассмотрим некоторые примеры c - τ -ограниченных отображений. Напомним [8], что отображение $f : X \rightarrow Y$ называется T_0 -отображением, если для любых двух точек x и $x' \neq x$ таких, что $fx = fx'$, хотя бы у одной из точек x, x' в X найдется окрестность, не содержащая другую точку, и вполне регулярным, если для любых точки $x \in X$ и замкнутого в X множества F ($F : x \notin F$) найдется окрестность O точки fx такая, что в прообразе $f^{-1}O$ точка x и множество F функционально отделимы. Тихоновским отображением называется вполне регулярное T_0 -отображение. Напомним также [8], что отображение $bf : X \rightarrow Y$ называется бикомпактификацией отображения $f : X \rightarrow Y$, если $X \subseteq X$, $[X] = X$, $bf|_X = f$ и bf — бикомпактное (совершенное) отображение. Для двух бикомпактификаций $b_1f : X_1 \rightarrow Y$, $b_2f : x_2 \rightarrow Y$ отображения $f : X \rightarrow Y$ считается

$b_2 f \geq b_1 f$, если существует естественное отображение X_2 в X_1 . Любое тихоновское отображение $f : X \rightarrow Y$ обладает хотя бы одной тихоновской бикомпактификацией, и среди всех тихоновских бикомпактификаций отображения f существует его максимальная бикомпактификация $\beta f : \beta_f X \rightarrow Y$.

Обобщая определение Б. А. Пасынкова трубчато-полного по Дьедонне отображения [9], получаем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тихоновское отображение $f : X \rightarrow Y$ назовем *обобщенно-полным по Дьедонне*, если для любой точки $x \in \beta_f X \setminus X$ существуют окрестность U точки $(\beta f)x$ в Y и открытое локально конечное в $f^{-1}U$ покрытие λ трубки $f^{-1}U$ такое, что $x \notin U[\lambda]_{(\beta f)U}^{-1} \equiv \cup\{[O](\beta f)^{-1}U : O \subset \lambda\}$.

Заметим, что трубчато-полные по Дьедонне отображения, а также \mathbb{R} -полные отображения [10] представляют собой обобщенно-полные по Дьедонне отображения.

Лемма 1. *Обобщенно-полное по Дьедонне отображение $f : X \rightarrow Y$, где Y — T_1 -пространство, является c - ω -ограниченным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим относительно псевдокомпактное замкнутое подотображение $f_1 = f|_{X_1}$ отображения f , где X_1 замкнуто в X . Докажем, что отображение $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ совершенно. Пусть $y \in Y$. Покажем, что прообраз $f_1^{-1}y$ бикомпактен.

Так как Y представляет собой T_1 -пространство и множество $\{y\}$ замкнуто в Y , множество $f_1^{-1}y$ замкнуто в X_1 . Поскольку отображение f обобщенно-полно по Дьедонне, для любого $x \in \beta_f X \setminus X$ такого, что $(\beta f)x = y$, существуют окрестность O точки y в пространстве Y и открытое локально конечное покрытие λ трубки $f^{-1}O$ такое, что $x \notin \cup[\lambda]_{(\beta f)^{-1}O}$. Так как отображение $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ относительно псевдокомпактно в f , существует окрестность O_1y точки y , лежащая в O , такая, что $|\text{St}(f_1^{-1}O_1y, \lambda)| < \omega$. Значит, поскольку $x \notin \cup[\lambda]_{\beta_f X}$, имеем

$$\begin{aligned} f_1^{-1}y \subset f_1^{-1}O_1y \subset B(x) &= \cup[\text{St}(f_1^{-1}O_1y, \lambda)]_{\beta_f X} \cap X_1 \\ &= [\cup\text{St}(f_1^{-1}O_1y, \lambda)]_{\beta_f X} \cap X_1 \not\ni x. \end{aligned}$$

Множество $B(x)$ замкнуто в $\beta_f X$, и $f_1^{-1}y \subset B(x)$ для любого $x \in \beta_f X \setminus X$ такого, что $(\beta f)x = y$. В силу того, что отображение $\beta f : \beta_f X \rightarrow Y$ совершенно, множество $(\beta f)^{-1}y$ бикомпактно, причем $f^{-1}y \subset (\beta f)^{-1}y$. Тогда $B = (\cap\{B(x) = x \in \beta_f X \setminus X, (\beta f)x = y\}) \cap (\beta f)^{-1}y$ — бикомпакт такой, что $f_1^{-1}y \subset B \subset (\beta_f X \setminus ((\beta_f X) \setminus X)) \cap X_1 = X_1$. Тем самым $f_1^{-1}y$ — бикомпакт как замкнутое подмножество бикомпакта B . Отображение f_1 совершенно, ибо оно замкнуто.

Следствие 1. *Трубчато \mathbb{R} -полное отображение $f : X \rightarrow Y$, где Y представляет собой T_1 -пространство, является c - ω -ограниченным отображением.*

Следствие 2. *Полное по Дьедонне отображение $f : X \rightarrow Y$, где Y представляет собой T_1 -пространство, является c - ω -ограниченным отображением.*

Известно [11, теорема 3.1.1], что пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно и \mathbb{R} -полно.

Теорема 1. *Замкнутое тихоновское отображение $f : X \rightarrow Y$ совершенно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно [6] и \mathbb{R} -полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Совершенное отображение псевдокомпактно и \mathbb{R} -полно [6].

2. Псевдокомпактное замкнутое \mathbb{R} -полное отображение совершенно (см. [5]).

Теорема 2. *Отображение $f : X \rightarrow Y$ совершенно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно, c - ω -ограничено и замкнуто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Совершенное отображение псевдокомпактно, замкнуто и c - ω -ограничено. Действительно, пусть X_1 замкнуто в X , тогда $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$ совершенно.

2. Псевдокомпактное замкнутое c - ω -ограниченное отображение совершенно (из определения).

4. Мультипликативность c - τ -ограниченности отображений.

Предложение 1. *Пусть отображения $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ замкнуты и c - τ -ограничены для любого $\alpha \in A$. Тогда их послойное произведение $f : X \rightarrow Y$ также c - τ -ограничено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ — относительно τ -псевдокомпактное замкнутое подотображение отображения f , причем множество X_1 замкнуто в $X_0 \subset \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. (Заметим, что $X_0 \neq \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, см. [7].) Докажем, что f_1 совершенно.

Так как отображения $\pi_\alpha|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_\alpha$, где $\pi_\alpha : X_0 \rightarrow X_\alpha$ — проекция, сюръективны и непрерывны для любого $\alpha \in A$, отображения $f_\alpha|_{\pi_\alpha X_1} : X_1 \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактны в f_α для любого $\alpha \in A$ (свойство 1 из п. 2).

Поскольку множество X_1 замкнуто в X_0 и $X_1 = \prod_{\alpha \in A} \pi_\alpha X_1$, множества $\pi_\alpha X_1$ замкнуты в пространствах X_α для любого $\alpha \in A$ [11]. Следовательно, отображения $f_\alpha|_{\pi_\alpha X_1}$ замкнуты для любого $\alpha \in A$.

В силу того, что отображения $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ c - ω -ограничены, отображения $f_\alpha|_{\pi_\alpha X_1} : X_1 \rightarrow Y$ совершенны для всех $\alpha \in A$. Но тогда по свойству 2 отображение $\prod_{\alpha \in A} (f_\alpha|_{\pi_\alpha X_1}) \equiv f_1 : X_1 \rightarrow Y$ совершенно.

5. Решетки непрерывных морфизмов на отображениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть даны отображения $f_1 : X_1 \rightarrow Y$, $f_2 : X_2 \rightarrow Y$. Морфизм $\varphi : f_1 \rightarrow f_2$ называется *вложением*, если непрерывное отображение $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ является вложением ($f_2|_{\varphi X_1} \equiv f_1$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и далее одним и тем же символом φ удобно обозначать морфизм $\varphi : f_1 \rightarrow f_2$ и соответствующее ему непрерывное отображение $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$, где $f_1 : X_1 \rightarrow Y$, $f_2 : X_2 \rightarrow Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$. Назовем систему $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$, состоящую из направленного множества A , непрерывных сюръективных морфизмов φ_α отображения $f : \varphi_\alpha : f \rightarrow f_\alpha$, где $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$, $f_\alpha = \varphi_\alpha f$, $\alpha \in A$, и непрерывных сюръективных морфизмов $\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\beta \circ f \rightarrow \varphi_\alpha \circ f$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$, *решеткой непрерывных морфизмов на отображении $f : X \rightarrow Y$* , если выполнены следующие условия:

1) $\Delta = \Delta_{\alpha \in A} \varphi_\alpha : f \rightarrow \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$ — вложение;

2) $\varphi_\alpha = \varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_\beta$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$.

Напомним [2], что отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *d*-открытым, если образ любого открытого в X множества плотен в некотором открытом в Y множестве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Решетка L называется τ -направленной, если множество A τ -направлено, и d -открытой, если все морфизмы φ_α d -открыты.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решетке $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ непрерывных морфизмов на отображении $f : X \rightarrow Y$ соответствует решетка $L_0 = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ непрерывных отображений пространства X , где $\varphi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ являются непрерывными сюръективными отображениями пространства X для всех $\alpha \in A$, отображения $\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\beta X \rightarrow \varphi_\alpha X$ — отображения образов пространства X при $\varphi_\beta, \varphi_\alpha, \alpha, \beta \in A$.

Если решетка L τ -направлена (d -открыта), то соответствующая ей решетка L_0 также τ -направлена (d -открыта).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть дана система морфизмов $\{\varphi_\alpha : f_\alpha \rightarrow g_\alpha, \alpha \in A\}$. Произведением морфизмов $\varphi = \prod_{\alpha \in A} \varphi_\alpha$ называется морфизм, переводящий произведение отображений $f = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$ в произведение отображений $g = \prod_{\alpha \in A} g_\alpha$ так, что $f = g \circ \varphi$.

6. Теоремы о мультипликативности относительно τ -псевдокомпактных отображений.

Предложение 1. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ и имеется τ -направленная решетка $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ d -открытых морфизмов на отображении f . Подотображение $f_1 : X_1 \rightarrow y, X_1 \subset X$, относительно τ -псевдокомпактно в f тогда и только тогда, когда его образ $\varphi_\alpha \circ f_1 = f_{1\alpha}$ относительно τ -псевдокомпактен в $f_\alpha = \varphi_\alpha \circ f$ для любого $\alpha \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если отображение $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в $f : X \rightarrow Y$, то его образ $f_{1\alpha} = X_{1\alpha} = \varphi_\alpha X_1 \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактен в f_α по свойству 1 из п. 2.

2. Пусть для любого $\alpha \in A$ отображение $f_{1\alpha} : X_{1\alpha} \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в f_α . Предположим, что отображение $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ не является относительно τ -псевдокомпактным в f . Тогда существуют открытое в Y множество O , точка $y \in O$ и τ -локальная в $f^{-1}O$ система $\lambda = \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, состоящая из элементов базы пространства X , такие, что $|\Gamma| \geq \tau$ и $|\text{St}(f_1^{-1}Oy, \lambda)| \geq \tau$ для любой окрестности Oy точки y , лежащей в O . Из τ -направленности решетки I_0 следует, что $\forall U_\gamma \in \lambda \exists W_\gamma \subset X_{\alpha(0)} = \varphi_{\alpha(0)} X : \varphi_{\alpha(0)}^{-1} W_\gamma = U_\gamma$. Получаем открытую систему $\nu = \{W_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ в пространстве $X_{\alpha(0)}$ (здесь $\alpha(0) \in A$ — индекс такой, что $\alpha(0) > \alpha(\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma$).

Так как система ν открыта в пространстве $\varphi_{\alpha(0)}(f^{-1}O)$, отображение $\varphi_{\alpha(0)}$ d -открыто и система $\varphi_{\alpha(0)}^{-1}\nu = \lambda$ τ -локальна в $f^{-1}O$, то система ν τ -локальна в $\varphi_{\alpha(0)}(f^{-1}O)$ [5]. Поскольку $f = f_{\alpha(0)} \circ \varphi_{\alpha(0)}$, то $f^{-1}O = (f_{\alpha(0)} \circ \varphi_{\alpha(0)})^{-1}O = \varphi_{\alpha(0)}^{-1}(f_{\alpha(0)}^{-1}O)$, т. е. система ν τ -локальна в $f_{\alpha(0)}^{-1}O$. Ввиду того, что отображение $f_{\alpha(0)} : X_{\alpha(0)} \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в $f_{\alpha(0)}$, для нашего $y \in O$ и системы ν существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\text{St}(f_{\alpha(0)}^{-1}Oy, \nu)| < \tau$, следовательно, $|\text{St}(f_1^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Лемма 1. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ d -открыто, $X_1 \subset X$. Тогда подотображение $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$ d -открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [2], что отображение $f : X \rightarrow Y$ d -открыто тогда и только тогда, когда для любого открытого в Y множества V выполняется условие $[f^{-1}V] = f^{-1}[V]$. Рассмотрим открытое в Y множество V . Имеем

$f_1^{-1}[V]_{X_1} = f^{-1}[V] \cap X_1 = [f^{-1}V] \cap X_1 = [f_1^{-1}V]_{X_1}$. Следовательно, отображение $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ d -открыто.

Лемма 2. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ c - τ -ограничено, X_1 замкнуто в X . Тогда подотображение $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$ c - τ -ограничено

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение $f_2 : X_2 \rightarrow Y$, где X_2 замкнуто в X_1 , относительно τ -псевдокомпактно в f_1 и замкнуто. Имеем $f_2 = f_1|_{X_2} = f|_{X_2}$. Так как X_2 замкнуто в X_1 , X_1 замкнуто в X , то X_2 замкнуто в X [11]. Поскольку $X_2 \subset X_1$, то по свойству 3 из п. 2 отображение $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ относительно τ -псевдокомпактно в f .

Ввиду c - τ -ограниченности отображения $f : X \rightarrow Y$ отображение $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ совершенно.

Теорема 1. Если отображения $f_1^s : X_1^s \rightarrow Y$ замкнуты, c - τ -ограничены и относительно τ -псевдокомпактны в $f^s : X^s \rightarrow Y$, где $f_1^s = f^s|_{X_1^s}$, $X_1^s \subset X^s$, $s \in S$, то отображение $f_1 = \prod_{s \in S} f_1^s$ относительно τ -псевдокомпактно в $f = \prod_{s \in S} f^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим открытое в Y множество O , точку $y \in O$ и открытую τ -локальную систему $\lambda = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в пространстве $f^{-1}O$.

Отображение f_1^s совершенно для любого $s \in S$. Значит, отображение $f_1 = \prod_{s \in S} f_1^s$ совершенно. Следовательно, прообраз $f_1^{-1}y$ точки y бикомпактен.

Согласно τ -локальности системы λ в пространстве $f^{-1}O$ для любой точки $x \in f_1^{-1}y$ существует ее окрестность Ox в пространстве $f^{-1}O$ такая, что $|\text{St}(\lambda, Ox)| < \tau$. Так как пространство $f_1^{-1}y$ бикомпактно, из открытого покрытия $\mu = \{Ox \cap f_1^{-1}y, x \in f_1^{-1}y\}$ пространства $f_1^{-1}y$ можно выделить конечное подпокрытие μ' такое, что $f_1^{-1}y \subset \cup \mu'$. Тогда существуют $x_1, \dots, x_k \in f_1^{-1}y$ такие, что $f_1^{-1}y \subset \bigcup_{j=1}^k Ox_j = V$. Поскольку отображение f_1 замкнуто, существует окрестность Oy точки y такая, что $f_1^{-1}Oy \subset V$. Таким образом, получаем $|\text{St}(\lambda, V)| < \tau$, следовательно, $|\text{St}(\lambda, f_1^{-1}Oy)| < \tau$. Значит, отображение f_1 относительно τ -псевдокомпактно в f .

Теорема 2. Пусть отображения $f^s : X^s \rightarrow Y$ замкнуты и на них имеются τ -направленные решетки $L^s = \{\varphi_{\alpha(s)}, \varphi_{\beta(s)\alpha(s)}; A(s)\}$, $s \in S$, d -открытых морфизмов на c - τ -ограниченные отображения $f_{\alpha(s)} : f_{\alpha(s)} = \varphi_{\alpha(s)} \circ f^s$, $s \in S$, $\alpha(s) \in A(s)$. Пусть также отображения $f_1^s = f^s|_{X_1^s}$, $f_1^s : X_1^s \rightarrow Y$, где X_1^s замкнуто в X^s , замкнуты и относительно τ -псевдокомпактны в f^s , $s \in S$. Тогда произведение $f_1 = \prod_{s \in S} f_1^s$ относительно τ -псевдокомпактно в $f = \prod_{s \in S} f^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 из п. 6 отображения $f_{\alpha(s)}^1 = \varphi_{\alpha(s)} \circ f_1^s$ относительно τ -псевдокомпактны в $f_{\alpha(s)} = \varphi_{\alpha(s)} \circ f^s$ для любого $\alpha(s) \in A(s)$.

Пусть $A \in \prod_{s \in S} A(s)$. Рассмотрим решетку $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ на отображения f . Здесь

$$\varphi_\alpha = \prod_{s \in S} \varphi_{\alpha(s)}, \quad \varphi_\alpha : f \rightarrow f_\alpha, \quad f_\alpha = \prod_{s \in S} f_{\alpha(s)}, \quad \alpha \in A, \quad s \in S,$$

$$\varphi_{\beta\alpha} = \prod_{s \in S} \varphi_{\beta(s)\alpha(s)}, \quad \beta > \alpha, \quad \beta \in A, \quad \varphi_{\beta\alpha} : f \rightarrow f_\alpha.$$

Порядок на множестве A вводится следующим образом. Для $\alpha = \{\alpha(s) : s \in S\}$ и $\beta = \{\beta(s) : s \in S\}$, $\alpha(s), \beta(s) \in A(s)$, $s \in S$, считаем $\beta > \alpha$, если $\beta(s) > \alpha(s)$ для

любого $s \in S$. Множество A с введенным порядком является τ -направленным, ибо для любого $s \in S$ множество $A(s)$ τ -направлено.

Так как морфизмы $\varphi_{\alpha(s)}$ d -открыты для любого $s \in S$, произведения $\varphi_\alpha = \prod_{s \in S} \varphi_{\alpha(s)}$ d -открыты как произведения d -открытых морфизмов. Кроме того, поскольку $\varphi_{\alpha(s)} = \varphi_{\beta(s)\alpha(s)} \circ \varphi_{\beta(s)}$ для любого $s \in S$, то $\varphi_\alpha = \varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_\beta$, $\beta > \alpha$, $\beta, \alpha \in A$.

Поскольку $\Delta\{\varphi_{\alpha(s)} : \alpha(s) \in A(s)\} : f_s \rightarrow \prod_{\alpha(s) \in A(s)} f_{\alpha(s)}$ — вложение для любого $s \in S$, то $\Delta\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\} : f \rightarrow \prod_{\alpha \in A} f_\alpha$ тоже вложение.

Таким образом, L является τ -направленной решеткой d -открытых морфизмов на отображении $f = \prod_{s \in S} f^s$, и отображения $f_1 = \prod_{s \in S} f_1^s$ относительно τ -псевдокомпактны в произведении $f_\alpha = \prod_{s \in S} f_{\alpha(s)}$ по теореме 1 из п. 6.

По предложению 1 п. 6 отображение f_1 относительно τ -псевдокомпактно в f .

Как следствие теоремы 2 при $\tau = \omega$ получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть на замкнутых отображениях $f^s : X^s \rightarrow Y$ имеются счетно-направленные решетки d -открытых морфизмов на обобщенно-полные по Дьедонне отображения (в частности, на полные по Дьедонне или \mathbb{R} -полные отображения) и отображения $f^s : X^s \rightarrow Y$, $f_1^s = f^s|_{X_1^s}$, $X_1^s \subset X^s$ относительно псевдокомпактны в f^s , $s \in S$. Тогда их произведение $f_1 = \prod_{s \in S} f_1^s$ относительно псевдокомпактно в $f = \prod_{s \in S} f^s$.

7. Следствия теоремы о мультипликативности τ -псевдокомпактности для пространств. Так как любое пространство X можно рассматривать как непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ в точку, причем наше отображение замкнуто и пространство $Y = \{y\}$ локально бикompактно, то мы получаем следующие следствия теорем о мультипликативности τ -псевдокомпактности для пространств [5].

7.1. c - τ -Ограниченные пространства. Напомним [5], что множество $B \subset X$ называется относительно τ -псевдокомпактным в X , если $|\text{St}(\lambda, B)| < \tau$ для любой τ -локальной открытой в X системы λ .

При $\tau = \omega$ относительная τ -псевдокомпактность множества B в тихоновском пространстве X равносильна его ограниченности, или относительной псевдокомпактности [2], т. е. ограниченности на B любой непрерывной функции $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Из определения относительной τ -псевдокомпактности вытекают следующие свойства.

Свойство 1. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно и множество B относительно τ -псевдокомпактно в X , то образ $f(B)$ относительно τ -псевдокомпактен в Y .

Свойство 2. Если множество B относительно τ -псевдокомпактно в X , то его замыкание $[B]$ относительно τ -псевдокомпактно в X .

Свойство 3. Если B — относительно τ -псевдокомпактное подмножество подпространства Y пространства X , то B относительно τ -псевдокомпактно в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство X называется c - τ -ограниченным, если замыкание любого относительного τ -псевдокомпактного подмножества в X бикомпактно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Замкнутое подпространство Y c - τ -ограниченного пространства X само c - τ -ограничено.

Предложение 1. Класс c - τ -ограниченных пространств мультипликативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для любого $\alpha \in A$ пространство X_α является c - τ -ограниченным, и пусть множество B относительно τ -псевдокомпактно в $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Для любого $\alpha \in A$ множество $\pi_\alpha B$, где π_α — проекция X на X_α , относительно τ -псевдокомпактно в X_α . Поэтому замыкание $[\pi_\alpha B]$ бикомпактно. Тогда произведение $C = \prod\{[\pi_\alpha B] : \alpha \in A\}$ также бикомпактно и $[B] \subset C$. Следовательно, замыкание $[B]$ бикомпактно.

Лемма 1. Отображение f c -ограниченного пространства X в точку $\{y\}$ c - τ -ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого подотображения $f_1 = f|_{X_1}$, где X_1 замкнуто в X , для точки y имеем $|\text{St}(f_1^{-1}y, \lambda)| < \tau$. Пространство X_1 относительно τ -псевдокомпактно в X , и так как X_1 замкнуто в X , пространство $[X_1] = X_1$ бикомпактно. Следовательно, отображение f_1 совершенно.

Таким образом, c - τ -ограниченные пространства являются частным случаем c - τ -ограниченных отображений.

7.2. c - ω -Ограниченные пространства. Укажем некоторые классы c - ω -ограниченных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (Б. А. Пасынков). Тихоновское пространство X называется *обобщенно-полным по Дьедонне пространством*, если для любой точки $x \in \beta X \setminus X$ существует открытое локально конечное покрытие ω пространства X со свойством $x \notin \cup[\omega]_{\beta X} \equiv \cup\{[O]_{\beta X} : O \in \omega\}$.

Предложение 2. Обобщенно-полное по Дьедонне пространство является c - ω -ограниченным [5].

Следствие. Полные по Дьедонне пространства c - ω -ограничены.

Лемма 2. Если пространство X нормально, множество B относительно псевдокомпактно в X и замкнуто в X , то пространство B счетно-компактно [5].

Следствие 1. Замыкание относительно псевдокомпактного подмножества B нормального пространства X счетно-компактно.

Напомним, что пространство X называется *изокомпактным*, если любое счетно-компактное замкнутое подпространство пространства X бикомпактно.

Следствие 2. Нормальное изокомпактное пространство c - ω -ограничено.

Следствие 3. Замкнутое подпространство произведения нормальных изокомпактных пространств c - ω -ограничено.

Следствие 4. Замкнутое подпространство произведения нормальных слабо паракомпактных пространств c - ω -ограничено.

Другие примеры c - ω -ограниченных пространств можно найти в работах [4, 12].

Утверждение 6 [4]. Пусть пространство X уплотняется на метризуемое пространство и множество B ограничено в X . Тогда $[B]_X$ — компакт.

Значит, пространства, уплотняемые на метризуемые пространства, c — ω -ограничены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [4]. Подгруппа H топологической группы G называется *допустимой*, если существует последовательность $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых окрестностей единицы в G такая, что $U_n^{-1} = U_n$, $U_{n+1}^3 \subseteq U_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $H = \bigcap \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Известно [4], что любая допустимая подгруппа группы G замкнута в G .

Утверждение 3 [4]. Пусть H — допустимая подгруппа топологической группы G . Тогда G/H уплотняется на метризуемое пространство.

Следствие. Если H — допустимая подгруппа топологической группы G , то пространство G/H c - ω -ограничено.

В работе [12] дается определение μ -пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [12]. Если A — компакт для любого ограниченного $A \subset X$, то X является μ -пространством.

Ясно, что классы μ -пространств и c - ω -ограниченных пространств совпадают. Там же указываются некоторые свойства μ -пространств.

Теорема 1 [12]. Если X — μ -пространство и Y замкнуто в X , то каноническое отображение $i_Y : F(Y) \rightarrow F(X)$ является k -отображением (т. е. $i^{-1}y(\Phi)$ — компакт для любого компакта $\Phi \subset F(X)$).

Таким образом, рассмотрено несколько классов c — ω -ограниченных пространств. Можно построить ряд классов c - ω -ограниченных отображений, соответствующих им.

Напомним [12], что отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *d -открытым*, если для любого открытого множества $O \subset X$ существует открытое в Y множество V такое, что $fO \subset V \subset [fO]$.

Свойство 1. Произведение d -открытых отображений d -открыто [2].

Теорема 1 [5]. Если на топологических пространствах X_s , $s \in S$, имеются τ -направленные решетки d -открытых отображений на c - τ -ограниченные пространства, множества C_s относительно τ -псевдокомпактны в X_s , $s \in S$, то множество $C = \prod \{C_s : s \in S\}$ относительно τ -псевдокомпактно в $X = \prod \{X_s : s \in S\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1 п. 1 и леммы 1.

Учитывая приведенные выше примеры c - ω -ограниченных пространств, при $\tau = \omega$ получаем следствия данной теоремы.

Теорема 2. Если на топологических пространствах X_s , $s \in S$, имеются счетно-направленные решетки d -открытых отображений на c - τ -ограниченные пространства, в частности, на

- 1) обобщенно-полные по Дьедонне пространства;
- 2) полные по Дьедонне пространства;
- 3) нормальные изокомпактные пространства;
- 4) замкнутые подпространства нормальных изокомпактных пространств;
- 5) замкнутые подпространства нормальных слабо паракомпактных пространств;

- 6) пространства, уплотняемые на метризуемые пространства;
- 7) фактор-пространства топологических групп по допустимым подгруппам этих групп;
- 8) свободные топологические группы над μ -пространствами множества C_s относительно псевдокомпактны в X_s , $s \in S$,

то множество $C = \prod\{C_s : s \in S\}$ относительно псевдокомпактно в $X = \prod\{X_s : s \in S\}$.

Следствие 1 [1]. Произведение псевдокомпактных топологических групп является псевдокомпактной топологической группой

Следствие 2 [3]. Подпроизведение относительно псевдокомпактных подмножеств d -пространств относительно псевдокомпактно в произведении.

ЗАМЕЧАНИЕ. П. 2 теоремы 2 доказан в [4].

Таким образом, в работе рассмотрено понятие τ -псевдокомпактного отображения, а также некоторые его свойства, аналогичные свойствам псевдокомпактного пространства, и следствия полученных утверждений для пространств.

Все задачи поставлены Б. А. Пасынковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Comfort W., Kenneth A. R. Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups // Pacific J. Math. 1966. V. 16, N 3. P. 483–496.
2. Ткаченко М. Г. Обобщение теоремы Комфорта — Росса. I // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 3. С. 377–382.
3. Успенский В. В. Топологические группы и компакты Дугунджи // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 8. С. 1092–1118.
4. Ткаченко М. Г. Обобщение теоремы Комфорта — Росса. II // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 7. С. 939–952.
5. Миронова Ю. Н. Мультипликативность относительной τ -псевдокомпактности // Общая топология. Отображения, произведения и размерность пространств. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 77–82.
6. Миронова Ю. Н. Свойства σ -псевдокомпактных отображений // Математика. Образование. Экономика: Тез. докл./ VI междунар. конф. женщин-математиков, Чебоксары, 25–30 мая 1998 г. Чебоксары, 1998. С. 54.
7. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
8. Пасынков Б. А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 77–82.
9. Бузулина Т. И., Пасынков Б. А. О полных по Дьедонне отображениях // Геометрия погруженных многообразий: Межвузовский сб. науч. тр. М.: МГПИ, 1989. С. 95–99.
10. Ильина Н. И., Пасынков Б. А. Об \mathbb{R} -полных отображениях // Геометрия погруженных многообразий: Межвузовский сб. науч. тр. М.: МГПИ, 1989. С. 125–131.
11. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
12. Arhangel'skii A. V. Free topological groups: the theory of present and problems // Бакинская междунар. топологическая конф.: Тез. докл. Баку, 1987. С. 18.

Статья поступила 10 января 1999 г.,
Окончательный вариант — 30 июля 1999 г.

Миронова Юлия Николаевна
Московская гос. юридическая академия, г. Москва
mironovaj@mail.ru