Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.537+517.923 517.588

РАЗЛОЖЕНИЯ ТИПА СОНИНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ m–ГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

М. Д. Хриптун

Аннотация: Доказаны теоремы, выражающие решения обобщенного уравнения Бесселя m-го порядка в виде рядов типа Неймана, которые затем применяются для вывода более сложных соотношений для всевозможных произведений этих решений так называемых теорем умножения типа Бейтмена. Библиогр. 9.

В практических задачах часто возникает необходимость разложить заданную функцию в ряд по соответствующим специальным функциям, причем вид разложения определяется конкретными условиями задачи.

В данной работе на основании ранее выведенных формул (см. [1, 2]) для неособых решений

$$U_{\nu_s}^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu_s+mk}}{[(m-1)k+s-1]!\Gamma[k+\nu_s-(s-1)+1]}, \tag{1}$$

где

$$\nu_s = p + m(s-1)/(m-1), \quad s = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$U_{\nu_m}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu_m+mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+\nu_m+1]}, \quad \nu_m = -(m-1)p, \tag{2}$$

обобщенного дифференциального уравнения Бесселя вида

$$\left[(m-1)\frac{d}{dz} + \frac{\nu+1}{z}\right] \dots \left[(m-1)\frac{d}{dz} + \frac{\nu+m-1}{z}\right] \left(\frac{d}{dz} - \frac{\nu}{z}\right) U(z) = U(z), \tag{3}$$

где $\nu = -(m-1)p$, p — комплексный параметр, z — комплексная переменная (при $m = 2$ функции (1), (2) являются модифицированными функциями Бесселя, а уравнение (3) переходит в соответствующее уравнение Бесселя), находим разложения типа Сонина, аналогичные разложениям для функций Бесселя (см. [3, с. 75, формула (6)]).

1. Разложения типа Сонина. Для решений (1), (2) справедливы следующие утверждения.

Если μ, ν, $\mu - \nu \neq -n$, где n — целое положительное число, то для любого постоянного γ имеют место равенства

$$\left(\frac{\gamma z}{m}\right)^{\mu-\nu} U_{\nu}^{(s)}(\gamma z) = \gamma^{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(\mu+r)}{(s-1)!r!\Gamma[\nu-(s-1)+1]}$$
$$\times {}_{m+1}F_m^{(r)}\left[-r, \frac{\mu+r}{m-1}, \dots, \frac{\mu+r+m-2}{m-1}, 1; \nu-(s-1)+1, \frac{s}{m-1}, \right.$$
$$\left. \dots, \frac{s+m-2}{m-1}; \gamma^m\right] (\mu+mr) U_{\mu+mr}^{(m)}(z), \tag{4}$$

где $\nu = \nu_s = p + m(s-1)/(m-1)$, $s = 1, 2, \ldots, m-1$;

$$\left(\frac{\gamma z}{m}\right)^{\mu-\nu} U_\nu^{(m)}(\gamma z) = \gamma^\mu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(\mu+r)}{r!\Gamma(\nu+1)} {}_m F_{m-1}^{(r)}\Bigg[-r, \frac{\mu+r}{m-1}, \ldots, \frac{\mu+r+m-2}{m-1}; \frac{\nu+1}{m-1}, \ldots, \frac{\nu+m-1}{m-1}; \gamma^m\Bigg](\mu+mr)U_{\mu+mr}^{(m)}(z), \quad (5)$$

где $\nu = \nu_m = -(m-1)p$, ${}_\alpha F_\beta^{(r)}$ — конечный обобщенный гипергеометрический ряд (см. [4, с. 183, 184, формула (1)]).

Проведем подробное доказательство, например, формулы (4), используя формулу (1) и теорему типа Гегенбауэра для обобщенных функций Бесселя.

Если $s \neq -n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то имеет место разложение типа Гегенбауэра

$$\left(\frac{z}{m}\right)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (s+mn)\Gamma(s+n)}{n!} U_{s+mn}^{(m)}(z)$$

(см. [5, теорема 1, формула (10)]). Идея доказательства формулы типа Гегенбауэра для обобщенных функций Бесселя основана на использовании рекуррентных соотношений для $U_{\nu_m}^{(m)}(z)$ (см. [2]) и того факта, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s+mn)\Gamma(s+n)}{n!} \left(\frac{z}{m}\right)^{-s} U_{s+mn}^{(m)}(z)$$

составлен из аналитических функций и сходится равномерно во всей ограниченной области плоскости (см. [5]), а производная его по z равна нулю. Таким образом, сумма ряда — постоянное число. Полагая в нем $z \to 0$, находим, что это число равно 1. Отсюда следует формула типа Гегенбауэра.

На основании этих данных можем записать левую часть соотношения (4) в виде

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma z}{m}\right)^{\mu-\nu} U_\nu^{(s)}(\gamma z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{\mu+mk}}{[(m-1)k+s-1]!\Gamma[k+\nu-(s-1)+1]} \left(\frac{z}{m}\right)^{\mu+mk} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{\mu+mk}}{[(m-1)k+s-1]!\Gamma[k+\nu-(s-1)+1]} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\mu+mk+n)}{n!}(\mu+mk+mn)U_{\mu+mk+mn}^{(m)}(z). \quad (6)\end{aligned}$$

Обозначая $k + n = r$ (тогда $n = r - k$), запишем (6) в виде

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma z}{m}\right)^{\mu-\nu} U_\nu^{(s)}(\gamma z) &= \gamma^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{mk}}{[(m-1)k+s-1]!\Gamma[k+\nu-(s-1)+1]} \\ &\quad \times \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(-1)^{r-k}\Gamma[\mu+r+(m-1)k]}{(r-k)!}(\mu+mr)U_{\mu+mr}^{(m)}(z).\end{aligned}$$

Так как двойной ряд сходится абсолютно, мы можем поменять порядок суммирования в последнем выражении. Тогда получаем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma z}{m}\right)^{\mu-\nu} U_\nu^{(s)}(\gamma z) &= \gamma^\mu \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (\mu+mr) U_{\mu+mr}^{(m)}(z) \\ &\quad \times \left\{\sum_{k=0}^{r} \frac{\gamma^{mk}\Gamma[\mu+r+(m-1)k]}{(-1)^k (r-k)![(m-1)k+s-1]!\Gamma[k+\nu-(s-1)+1]}\right\}. \quad (7)\end{aligned}$$

Преобразуем сумму в фигурных скобках выражения (7), используя формулы разложения для гамма-функций вида

$$\Gamma(z+nk) = \Gamma(z)(z/n)_k \dots [(z+n-1)/n]_k n^{nk}, \tag{8}$$

$$\Gamma(z-nk) = (-1)^{nk}\Gamma(z)n^{-nk}/[(1-z)/n]_k \dots [(n-z)/n]_k, \tag{9}$$

где $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$ — символ Похгаммера (см. [6, с. 719, 720]).

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{\Gamma(\mu+r+(m-1)k]\gamma^{mk}}{(-1)^k(r-k)![(m-1)k+s-1]!\Gamma[k+\nu-(s-1)+1]}$$
$$= \frac{\Gamma(\mu+r)}{\Gamma(\nu-(s-1)+1]r!(s-1)!}$$
$$\times \sum_{k=0}^{r} \frac{(-r)_k[(\mu+r)/(m-1)]_k \dots [(\mu+r+m-2)/(m-1)]_k}{[\nu-(s-1)+1]_k[s/(m-1)]_k \dots [(s+m-2)/(m-1)]_k}\gamma^{mk}$$
$$= \frac{\Gamma(\mu+r)}{(s-1)!r!\Gamma[\nu-(s-1)+1]}\,{}_{m+1}F_m^{(r)}\left[-r, \frac{\mu+r}{m-1}, \dots, \frac{\mu+r+m-2}{m-1}, 1; \right.$$
$$\left. \nu-(s-1)+1, \frac{s}{m-1}, \dots, \frac{s+m-2}{m-1}; \gamma^m\right].$$

Подставляя последнее выражение в (7), получаем (4). Соотношение (5) доказывается аналогично.

Разложения (4) и (5) называем обобщенными разложениями типа Сонина по аналогии с разложениями для функций Бесселя (см. [7, с. 153, 154, формула (3)]).

2. Применение разложений типа Сонина. Используя формулы (4) и (5), докажем теоремы умножения для всевозможных произведений функций (1) и (2) специального вида.

Теорема. *Для всех μ и ν, кроме целых отрицательных, справедливы равенства*

$$\left(\frac{z}{m}\right) U_\mu^{(s_i)}(z\cos\varphi\cos\Phi)U_\nu^{(s_j)}(z\sin\varphi\sin\Phi)$$
$$= \frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^\mu(\sin\varphi\sin\Phi)^\nu}{(s_i-1)!(s_j-1)!\Gamma[\mu-(s_i-1)+1]\Gamma[\nu-(s_j-1)+1]}$$
$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l\Gamma(\mu+\nu+l+1)}{l!}(\mu+\nu+ml+1)U_{\mu+\nu+ml+1}^{(m)}(z)$$
$$\times F\left[\begin{matrix}-l, \frac{\mu+\nu+l+1}{m-1}, \dots, \frac{\mu+\nu+l+m-1}{m-1}; & \overline{\qquad\qquad\qquad} 1; \\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} ; & \mu-(s_i-1)+1, \frac{s_i}{m-1}, \dots, \frac{s_i+m-2}{m-1};\end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix}\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} 1; \\ \nu-(s_j-1)+1, \frac{s_j}{m-1}, \dots, \frac{s_j+m-2}{m-1};\end{matrix}(\cos\varphi\cos\Phi)^m, (\sin\varphi\sin\Phi)^m\right], \tag{10}$$

где $\mu = \mu_{s_i} = p + m(s_i-1)/(m-1)$, $\nu = \nu_{s_j} = p + m(s_j-1)/(m-1)$, $s_i, s_j = 1, 2, \dots, m-1$, $i, j = 1, 2, \dots, m-1$,

$$F\left[\begin{matrix}a_1, a_2, \dots, a_j; b_1, b_2, \dots, b_k; c_1, c_2, \dots, c_m; \\ d_1, d_2, \dots, d_n; e_1, e_2, \dots, e_p; f_1, f_2, \dots, f_q;\end{matrix} z, Z\right]$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{r+s}\dots(a_j)_{r+s}(b_1)_r\dots(b_k)_r(c_1)s\dots(c_m)_s z^r Z^s}{(d_1)_{r+s}\dots(d_n)_{r+s}(e_1)_r\dots(e_p)_r(f_1)_s\dots(f_q)_s r!s!} \tag{11}$$

— *обобщенная двойная гипергеометрическая функция Аппеля (определение см. в [8]), при этом*

$$(\alpha)_n(\alpha+n)_k=(\alpha)_{n+k} \tag{12}$$

(см. [6, с. 720]).

Аналогично если $\mu,\nu\neq -n$ $(n=1,2,\dots)$, *то*

$$\begin{gathered}\left(\frac{z}{m}\right)U_\mu^{(m)}(z\cos\varphi\cos\Phi)U_\nu^{(m)}(z\sin\varphi\sin\Phi)=\frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^\mu(\sin\varphi\sin\Phi)^\nu}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\\ \times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\Gamma(\mu+\nu+l+1)}{l!}(\mu+\nu+ml+1)U^{(m)}_{\mu+\nu+ml+1}(z)\\ \times F\left[\begin{matrix}-l,\frac{\mu+\nu+l+1}{m-1},\dots,\frac{\mu+\nu+l+m-1}{m-1}; & 1,\overline{}\,1; & 1,\overline{}\,1;\\ 1,\overline{}\,1; & \frac{\mu+1}{m-1},\dots,\frac{\mu+m-1}{m-1}; & \frac{\nu+1}{m-1},\dots,\frac{\nu+m-1}{m-1};\end{matrix}(\cos\varphi\cos\Phi)^m,(\sin\varphi\sin\Phi)^m\right],\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{z}{m}\right)U_\mu^{(s)}(z\cos\varphi\cos\Phi)U_\nu^{(m)}(z\sin\varphi\sin\Phi)=\frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^\mu(\sin\varphi\sin\Phi)^\nu}{(s-1)!\Gamma[\mu-(s-1)+1]\Gamma(\nu+1)}\\ \times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\Gamma(\mu+\nu+l+1)}{l!}(\mu+\nu+ml+1)U^{(m)}_{\mu+\nu+ml+1}(z)\\ \times F\left[\begin{matrix}-l,\frac{\mu+\nu+l+1}{m-1},\dots,\frac{\mu+\nu+l+m-1}{m-1}; & \overline{}\,1; & \overline{};\\ \overline{}\,; & \frac{s}{m-1},\dots,\frac{s+m-2}{m-1}; & \mu-(s-1)+1,\frac{\nu+1}{m-1},\dots,\frac{\nu+m-1}{m-1};\end{matrix}(\cos\varphi\cos\Phi)^m,(\sin\varphi\sin\Phi)^m\right].\end{gathered} \tag{14}$$

Проведем доказательство одной из этих формул, например, (13).

Распишем левую часть формулы (13), используя (2) и формулу типа Сонина (5). Получим

$$\begin{aligned}&\left(\frac{z}{m}\right)U_\mu^{(m)}(z\cos\varphi\cos\Phi)U_\nu^{(m)}(z\sin\varphi\sin\Phi)\\ &\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/m)^{\mu+mk+1}(\cos\varphi\cos\Phi)^{\mu+mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+\mu+1]}U_\nu^{(m)}(z\sin\varphi\sin\Phi)\\ &\quad=(\cos\varphi\cos\Phi)^\mu(\sin\varphi\sin\Phi)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^{mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+\mu+1]}\\ &\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(\mu+\nu+mk+r+1)}{r!\Gamma(\nu+1)}(\mu+\nu+mk+mr+1)U^{(m)}_{\mu+\nu+mk+mr+1}(z)\\ &\quad\times{}_mF^{(r)}_{m-1}\left[-r,\frac{\mu+\nu+mk+r+1}{m-1},\dots,\frac{\mu+\nu+mk+r+m-1}{m-1};\right.\\ &\qquad\qquad\left.\frac{\nu+1}{m-1},\dots,\frac{\nu+m-1}{m-1};(\sin\varphi\sin\Phi)^m\right].\end{aligned}$$

Обозначим $k+r=l$ (тогда $r=l-k$) и запишем последнее выражение, обозначая его левую часть через Ω, так:

$$\Omega=(\cos\varphi\cos\Phi)^{\mu}(\sin\varphi\sin\Phi)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^{mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+\mu+1]\Gamma(\nu+1)}$$
$$\times\sum_{l=k}^{\infty}\frac{(-1)^{l-k}\Gamma[\mu+\nu+l+1+(m-1)k]}{(l-k)!}(\mu+\nu+ml+1)U^{(m)}_{\mu+\nu+ml+1}(z)$$
$$\times{}_mF^{(l-k)}_{m-1}\left[-l+k,\frac{\mu+\nu+l+1+(m-1)k}{m-1},\dots,\frac{\mu+\nu+l+m-1+(m-1)k}{m-1};\right.$$
$$\left.\frac{\nu+1}{m-1},\dots,\frac{\nu+m-1}{m-1};(\sin\varphi\sin\Phi)^{m}\right].$$

Так как двойной ряд в последнем выражении абсолютно сходится, меняя порядок суммирования, получим

$$\Omega=(\cos\varphi\cos\Phi)^{\mu}(\sin\varphi\sin\Phi)^{\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}}{\Gamma(\nu+1)}(\mu+\nu+ml+1)$$
$$\times U^{(m)}_{\mu+\nu+ml+1}(z)\sum_{k=0}^{l}\frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^{mk}\Gamma[\mu+\nu+l+1+(m-1)k]}{k!(l-k)!\Gamma[\mu+1+(m-1)k]}$$
$$\times{}_mF^{(l-k)}_{m-1}\left[-l+k,\frac{\mu+\nu+l+1+(m-1)k}{m-1},\dots,\frac{\mu+\nu+l+m-1+(m-1)k}{m-1};\right.$$
$$\left.\frac{\nu+1}{m-1},\dots,\frac{\nu+m-1}{m-1};(\sin\varphi\sin\Phi)^{m}\right].$$

Преобразуем сумму $\sum\limits_{k=0}^{l}\dots$ в последнем выражении, используя формулы для гамма-функций вида (8) и (9), и запишем ее в виде

$$\sum_{k=0}^{l}\dots=\sum_{k=0}^{l}\frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^{mk}\Gamma(\mu+\nu+l+1)}{k!l!\Gamma(\mu+1)}$$
$$\times\frac{[(\mu+\nu+l+1)/(m-1)]_k\dots[(\mu+\nu+l+m-1)/(m-1)]_k(-l)_k}{[(\mu+1)/(m-1)]_k\dots[(\mu+m-1)/(m-1)]_k}$$
$$\times\sum_{n=0}^{l-k}\frac{(-l+k)_n[(\mu+\nu+l+1)/(m-1)+k]_n\dots[(\mu+\nu+l+m-1)/(m-1)+k]_n}{[(\nu+1)/(m-1)]_n\dots[(\nu+m-1)/(m-1)]_n n!}$$
$$\times(\sin\varphi\sin\Phi)^{mn}.\quad(15)$$

В формуле (15) расписываем функцию ${}_mF^{(l-k)}_{m-1}$ в виде суммы. Применяя выражение (12), запишем

$$(-l)_k(-l+k)_n=(-l)_{k+n},$$
$$\left(\frac{\mu+\nu+l+1}{m-1}\right)_k\left(\frac{\mu+\nu+l+1}{m-1}+k\right)_n=\left(\frac{\mu+\nu+l+1}{m-1}\right)_{k+n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left(\frac{\mu+\nu+l+m-1}{m-1}\right)_k\left(\frac{\mu+\nu+l+m-1}{m-1}+k\right)_n=\left(\frac{\mu+\nu+l+m-1}{m-1}\right)_{k+n}.$$

Подставляя эти соотношения в (15), имеем

$$\sum_{k=0}^{l}\cdots = \frac{\Gamma(\mu+\nu+l+1)}{l!\Gamma(\mu+1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{l}\sum_{n=0}^{l-k} \frac{(-l)_{k+n}[(\mu+\nu+l+1)/(m-1)]_{k+n}\dots[(\mu+\nu+l+m-1)/(m-1)]_{k+n}}{k!n![(\mu+1)/(m-1)]_k\dots[(\mu+m-1)/(m-1)]_k}$$

$$\times \frac{(\cos\varphi\cos\Phi)^{mk}(\sin\varphi\sin\Phi)^{mn}}{[(\nu+1)/(m-1)]_n\dots[(\nu+m-1)/(m-1)]_n}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+\nu+l+1)}{l!\Gamma(\mu+1)} F\left[\begin{matrix} -l, \frac{\mu+\nu+l+1}{m-1}, \dots, \frac{\mu+\nu+l+m-1}{m-1}; \\ \overline{}; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{}; & \overline{}; \\ \frac{\mu+1}{m-1}, \dots, \frac{\mu+m-1}{m-1}; & \frac{\nu+1}{m-1}, \dots, \frac{\nu+m-1}{m-1}; \end{matrix} (\cos\varphi\cos\Phi)^m, (\sin\varphi\sin\Phi)^m\right]. \quad (16)$$

Подставляя (16) в последнее выражение Ω, получаем формулу (13). Аналогично проводятся доказательства (10) и (14).

Формулы, приведенные в п. 2, подобны разложению Бейтмена для функций Бесселя (см. [7, с. 404]), которые он применил при нахождении нормальных решений обобщенного волнового уравнения (см. [7, с. 144, 145]).

В последнее время часто встречаются обобщенные специальные функции в различных приложениях: в статистических распределениях; в физических исследованиях; в инженерных вычислениях (теории сигналов); в теории массового обслуживания и др. (см., например, [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хриптун М. Д.* Про одне диференціальне рівняння вищого порядку // Доповіді АН УРСР. 1960. № 3. С. 289–293.
2. *Хриптун М. Д.* Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–293.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. II.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. I.
5. *Хриптун М. Д.* Ряды типа Неймана по обобщенным функциям Бесселя, удовлетворяющим обыкновенному дифференциальному уравнению m-го порядка // Тр. 9-й науч.-техн. конф. фак. мат. знаний Куйбышевск. политехн. ин-та. Куйбышев 16–19 мая 1984 г. Ч. I. С. 69–78. (Деп. в ВИНИТИ 9.04.1985, № 2383-85).
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды (специальные функции). М.: Наука, 1983.
7. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. Т. I.
8. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart J. Math. 1940. V. 11. P. 249–270.
9. *Mathai A. M., Saxena R. K.* Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973.

Статья поступила 23 мая 1996 г.

Хриптун Мария Дмитриевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
khriptun@math.nsc.ru