Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 512.541

О РАЗЛОЖИМЫХ ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

А. Р. Чехлов

Аннотация: Установлен ряд свойств вполне транзитивных групп без кручения. В терминах типов получены необходимые и достаточные условия вполне транзитивности квазиоднородно разложимых групп без кручения. Библиогр. 6.

Абелева группа A без кручения называется *вполне транзитивной*, если для любых ее элементов $0 \neq a$, b условие на их характеристики $\chi_A(a) \leq \chi_A(b)$ влечет существование ее эндоморфизма f со свойством $f(a) = b$. Вполне транзитивные группы без кручения изучались в работах разных авторов (см. обзор в [1] и др.). Наибольшее внимание привлекали вполне транзитивные группы с условием на типы элементов. В [2] приведены примеры вполне транзитивных групп без кручения A без максимальных элементов в множестве $T(A)$ типов всех ненулевых элементов группы A. В [3] рассматривались вполне транзитивные группы без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых — мономорфизмы. В данной статье доказывается, что если A — квазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения конечного p-ранга для некоторого простого числа p, $pA \neq A$, с сильно неразложимыми сервантными подгруппами, то все ненулевые эндоморфизмы группы A являются мономорфизмами. В [4] найдены необходимые и достаточные условия вполне транзитивности разложимых групп без кручения. В данной работе эти условия для разложимых квазиоднородных групп формулируются в терминах типов элементов их прямых слагаемых. Терминология и обозначения соответствуют [5]. Так, если A — группа без кручения, то $h_p^A(a)$ — p-высота, $t_A(a)$ — тип ее элемента a в группе A, если $G \subseteq A$, то $\langle G\rangle_*^A$ — сервантная подгруппа в A, порожденная G (индекс A иногда опускаем); $A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}$; $\Pi(A)$ — множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов A, если p — простое число, то *p-рангом* A называется ранг ее фактор-группы A/pA. Группа A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(G) = \Pi(A)$ для любой ее ненулевой сервантной подгруппы G; *квазиразложимой*, если существуют ее ненулевые подгруппы B, G такие, что $nA \subseteq B \oplus G$ для некоторого натурального числа n, в противном случае A называется *сильно неразложимой*.

Лемма 1 [6]. *Пусть A — группа без кручения с сильно неразложимыми сервантными подгруппами. Тогда $t_{A/\langle a\rangle_*}(g + \langle a\rangle_*) > t_A(g)$ для любых ее ненулевых элементов a, g. В частности, если f — гомоморфизм A в группу без кручения B с ненулевым ядром, то $t_A(g) < t_B(f(g))$ для любого $0 \neq g \in A$.*

Доказательство. Сильная неразложимость $\langle a, g\rangle_*$ в A влечет, что для бесконечного множества натуральных чисел m в A разрешимо уравнение $mx =$

$b + g$, где $b \in \langle a \rangle_*$ и $g \notin mA$. Откуда вытекает справедливость указанного неравенства типов.

Лемма 2. *Пусть A — группа без кручения, $f \in E(A)$, $0 \neq b \in \operatorname{Ker} f$. Тогда*

1) если $h_p(b) \geq h_p(f(a))$, то $h_p(a+b) = h_p(a)$, в частности, если $\chi(b) \geq \chi(f(a))$, то $\chi(a+b) = \chi(a)$;

2) если A вполне транзитивна, то $f(A)$ содержится в замыкании в p-адической топологии группы A ее подгруппы $G = A(t(b))$ для каждого $p \in \Pi(G)$, в частности, если $\Pi(A) = \Pi(G)$, то $f(A)$ содержится в замыкании в Z-адической топологии подгруппы G.

Доказательство. 1. Имеем $h_p(a+b) \geq h_p(a) \cap h_p(b) = h_p(a)$. Далее, $h_p(a+b) \leq h_p(f(a+b)) = h_p(f(a)) \leq h_p(b)$, поэтому $h_p(a) = h_p((a+b)-b) \geq h_p(a+b) \cap h_p(b) = h_p(a+b)$. Следовательно, $h_p(a) = h_p(a+b)$.

2. Если $p^m g = b$, где $g \notin pA$, то для любого $a \in A$ и любого натурального n имеем $\chi(p^n a + g) \leq \chi(f(a))$. В силу вполне транзитивности существует эндоморфизм α со свойством $p^n\alpha(a) + \alpha(g) = f(a)$. Утверждение леммы следует из того, что $\alpha(g) \in G$.

Лемма 3. *Пусть A — разложимая вполне транзитивная группа без кручения такая, что $\Pi(B) = \Pi(A)$ для любого ее прямого слагаемого $B \neq 0$. Тогда $\Pi(B(t)) = \Pi(A(t))$ для каждого $t \in T(B)$. Множество $T(B)$ направлено вверх. Для любого $t \in T(A)$ подгруппа $A(t)$ плотна в p-адической топологии группы A для каждого $p \in \Pi(A(t))$. В частности, если $\Pi(A) = \Pi(A(t))$, то $A(t)$ плотна в A в Z-адической топологии.*

Доказательство. Пусть $A = B \oplus G$, $0 \neq g \in G$, $g = p^n x$, где $x \in G \setminus pG$ для некоторого простого p и $B \neq 0$. В силу условия найдется $y \in B \setminus pB$. Тогда $\chi(py + x) \leq \chi(y)$. Поэтому существует $\alpha \in E(A)$ со свойством $\alpha(py + x) = y$. Если π и θ — проекции A на B и G соответственно, то $p\pi\alpha(y) + \pi\alpha(x) = y$, где $\pi\alpha(x) \in B \setminus pB$ в силу выбора y и $t(\pi\alpha(x)) \geq t(y), t(x)$. Таким образом, если $G(t) \neq 0$, то $B(t) \neq 0$, причем $\Pi(B(t)) = \Pi(G(t))$ в силу симметрии B, G, т. е. $\Pi(A(t)) = \Pi(B(t))$. Если теперь $0 \neq c, d \in B$, то по доказанному найдутся $0 \neq z \in G$ и $0 \neq h \in B$ со свойствами $t(z) \geq t(d)$ и $t(h) \geq t(z), t(c)$. Откуда $t(h) \geq t(c), t(d)$, т. е. $T(B)$ — направленное вверх множество. Нетрудно видеть, учитывая показанное выше, что тогда и $T(A)$ также обладает этим свойством. Наконец, если $t \in T(A)$, то по доказанному $B(t), G(t) \neq 0$. Поэтому по лемме 2 подгруппы $\pi(A) = B$ и $\theta(A) = G$, значит, и A содержатся в замыкании $A(t)$ для каждого $p \in \Pi(A(t))$.

Лемма 4. *Пусть A — редуцированная вполне транзитивная группа без кручения, $f \in E(A)$ и $A(t) \subseteq \operatorname{Ker} f$ для некоторого $t \in T(A)$, причем $\Pi(A(t)) = \Pi(A)$. Тогда $f = 0$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $f^2(A)$ является делимой подгруппой, в силу редуцированности $f^2 = 0$. Предположим, что $f(a) \neq 0$, $a \in A$. Согласно лемме 2 $\chi(a + f(a)) = \chi(a)$. Тогда $\chi(p^n a + g) \leq \chi(a)$, где $p^m g = f(a)$, $g \in A \setminus pA$, $n > h_p(f(a))$ и $p \in \Pi(A)$. По лемме 2 $f(a)$ принадлежит замыканию в p-адической топологии подгруппы $A(t)$. В силу сервантности $A(t)$ это замыкание является сервантной подгруппой в A. Поэтому g можно записать в виде $g = x + p^n b$ для некоторых $x \in A(t)$, $b \in A$. Пусть $\alpha \in E(A)$ такой, что $p^n\alpha(a+b) + \alpha(x) = a$. Так как $\alpha(x) \in A(t) \subseteq \operatorname{Ker} f$, то $p^n f(\alpha(a+b)) = f(a)$, что противоречит выбору n. Следовательно, $f = 0$.

Лемма 5. 1. *Если A — неквазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения, то у нее существуют ненулевые эндоморфизмы с ненулевыми ядрами.*

2. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — группа без кручения, где $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. A является вполне транзитивной тогда и только тогда, когда каждая A_i вполне транзитивна.*

Доказательство. 1. Из условия следует, что существует $0 \neq a \in A$, $h_p(a) = \infty$ для некоторого $p \in \Pi(A)$. Имеем $\chi(a) = \chi(p^{-1}a)$. Если $\alpha \in E(A)$ такой, что $\alpha(a) = p^{-1}a$, то $\psi = 1 - p\alpha \neq 0$ и $\psi(a) = 0$.

2. Это утверждение известно (см., например, [4, предложение 2.11]).

Теорема 6. *Если A — квазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения с сильно неразложимыми сервантными подгруппами с условием обрыва возрастающих цепей ядер ее эндоморфизмов, то все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами.*

Доказательство. Пусть $f \in E(A)$ с максимальным ядром $G \neq 0$ и $f(a) \neq 0$, $a \in A$. Из леммы 4 следует, что $f(b) \neq 0$ для некоторого $b \in A(t(f(a)))$. Тогда $\chi(nb) \geq \chi(f(a))$ для некоторого натурального n и $\alpha f(a) = nb$, где $\alpha \in E(A)$. Отсюда следует, что $(\alpha f)^2 \neq 0$. Будем считать, что $f^2 \neq 0$, в противном случае в качестве f возьмем αf.

По лемме 1 найдется $p \in \Pi(A)$ со свойством $h_p^{A/G}(f(a) + G) > h_p^A(f(a))$. Отсюда $m = h_p(f^2(a)) - h_p(f(a)) > 0$. Имеем $p^m \varphi f(a) = f^2(a)$ для некоторого $\varphi \in E(A)$. Так как $\langle G, a\rangle \subseteq \operatorname{Ker}(f - p^m\varphi)f$, то $f^2 = p^m \varphi f$. Следовательно, в силу квазиоднородности для каждого $p \in \Pi(A)$ найдутся целое число $n \geq 0$ и эндоморфизм β такие, что $f^2 = p^n\beta$, где β сохраняет p-высоты элементов из $f(A)$ и, значит, из $B = \langle f(A)\rangle_*$.

Если теперь $px = b + g$, где $p \in \Pi(A)$, $b \in B$, $g \in G$, то $p\beta(x) = \beta(b)$. Откуда $b \in pB$ в силу условия на β. Это влечет сервантность подгруппы $B \oplus G$ в A, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие 7. *Если A — квазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения конечного p-ранга для некоторого $p \in \Pi(A)$ с сильно неразложимыми сервантными подгруппами, то все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами.*

Доказательство. В силу квазиоднородности ядра эндоморфизмов A — замкнутые сервантные подгруппы в ее p-адической топологии. Поэтому конечность p-ранга влечет условие обрыва возрастающих цепей ядер ее эндоморфизмов, что доказывает справедливость утверждения.

Кольцо назовем *подкоммутативным*, если для любых его элементов α, β существует такой элемент γ, что $\alpha\beta = \gamma\alpha$.

Лемма 8. *Пусть A — квазиоднородная вполне транзитивная группа без кручения. Тогда*

1) *$E(A)$ — кольцо без делителей нуля тогда и только тогда, когда в нем нет ненулевых нильпотентных элементов;*

2) *следующие условия эквивалентны:*

а) *все ненулевые эндоморфизмы A являются мономорфизмами;*

б) *$E(A)$ — подкоммутативное кольцо.*

Доказательство. 1. Пусть $\alpha\beta = 0$, где $0 \neq \alpha$, $\beta \in E(A)$. Согласно лемме 4 $\beta A(t(\alpha(a))) \neq 0$ для каждого $a \in A$ со свойством $\alpha(a) \neq 0$. Поэтому найдется такой элемент b, что $\chi(b) \geq \chi(\alpha(a))$ и $\beta(b) \neq 0$. Если теперь $\eta(\alpha(a)) = b$, то $\beta\eta\alpha(a) \neq 0$. В частности, $\beta\eta\alpha \neq 0$. Теперь утверждение вытекает из того, что $(\beta\eta\alpha)^2 = 0$.

2. Пусть выполнено условие а) и $\alpha, \beta \in E(A)$, причем $h_p(a) < h_p(\beta(a))$. Тогда $\chi(a) \leq \chi(p^{-1}\beta(a))$. Если $f(a) = p^{-1}\beta(a)$, то $a \in \operatorname{Ker}(\beta - pf)$. Поэтому $\beta \in pE(A)$, откуда вытекает, что $\chi(\alpha(a)) \leq \chi(\alpha\beta(a))$. Если теперь $\alpha\beta(a) = \gamma\alpha(a)$, то $\alpha\beta = \gamma\alpha$.

Пусть выполнено условие б). Предположим, что $0 \neq \alpha \in E(A)$ и $\alpha(a) = 0$ для некоторого $0 \neq a \in A$. Как при доказательстве п. 1 найдется $\beta \in E(A)$ такой, что $\alpha\beta(a) \neq 0$. Тогда для любого $\gamma \in E(A)$ в силу выбора β имеем $\alpha\beta \neq \gamma\alpha$.

Следуя [4], введем следующие понятия.

Определение 1. Множество $\{A_i\}_{i\in I}$ групп без кручения называется *вполне транзитивной системой групп*, если для любых $0 \neq a \in A_i$, $0 \neq b \in A_j$ (i может совпадать с j) условие $\chi(a) \leq \chi(b)$ влечет существование гомоморфизма $\varphi : A_i \to A_j$ со свойством $\varphi(a) = b$.

Определение 2. Говорят, что система $\{A_i\}_{i\in I}$ групп без кручения *удовлетворяет условию монотонности для характеристик*, если для любого $0 \neq d \in A_i$ ($i \in I$) из выполнения соотношений:

a) $\chi(a_1) \cap \dots \cap \chi(a_k) \leq \chi(d)$, где $a_j \in A_{i_j}$, $i_j \neq i_l$;

b) $\chi(d) \ngeq \chi(a_j)$ для всех $j = 1, \dots, k$

следует существование элементов $b_1, \dots, b_r \in A_j$ со свойствами:

1) $b_1 + \dots + b_r = d$,

2) для каждого b_l ($l = 1, \dots, r$) найдется такой элемент a_j ($j = 1, \dots, k$), что $\chi(b_l) \geq \chi(a_j)$.

Теорема 9 [4, теорема 2.3]. *Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ — группа без кручения. Она вполне транзитивна тогда и только тогда, когда система групп $\{A_i\}_{i\in I}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности для характеристик.*

Теорема 10. *Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — система квазиоднородных групп без кручения такая, что если $|I| > 1$, то $\Pi(A_i) = \Pi(A_j)$, $T(A_i)$ — направленное вверх множество и для любого $t \in T(A_i)$ подгруппа $A_i(t)$ плотна в A_i в Z-адической топологии для всех $i, j \in I$, причем $A_i(t_1 \cap \dots \cap t_k) \subseteq A_i(t_1) + \dots + A_i(t_k)$ для любого конечного набора различных индексов $\{i_1, \dots, i_k\}$, где $t_1 \in T(A_{i_1}), \dots, t_k \in T(A_{i_k})$. Тогда эта система удовлетворяет условию монотонности для характеристик.*

Доказательство. Пусть $a = a_1 + \dots + a_k$ и $\chi(a_1 + \dots + a_k) = \chi(a_1) \cap \dots \cap \chi(a_k) \leq \chi(d)$, где $d \in A_i$, $a_j \in A_{i_j}$, $\chi(d) \ngeq \chi(a_j)$ для всех $j = 1, \dots, k$. По условию $d = x_1 + \dots + x_k$, где $x_j \in A_i$, $t(x_j) \geq t(a_j)$. Поэтому существуют натуральные числа m_j такие, что $\chi(a_j) \leq \chi(m_j x_j)$. Имеем $q_j d_j = x_j$, где q_j — натуральные числа такие, что $h_p(d_j) = 0$ для каждого простого делителя p числа m_j.

Пусть теперь $t \in T(A_i)$ такой тип, что $t \geq t(x_1), \dots, t(x_k)$. По условию $A_i(t)$ плотна в A_i. Поэтому для каждого d_j найдется $u_j \in A_i(t)$ со свойством $d_j = u_j + m_j v_j$, где $v_j \in A_i$, $j = 1, \dots, k$. Пусть $\chi(n_j u_j) \geq \chi(d_j)$. В силу выбора d_j числа n_j можно выбрать взаимно простыми с m_j. Поэтому существуют целые s_j, l_j такие, что $s_j n_j + l_j m_j = 1$. Имеем $x_j = q_j s_j n_j u_j + q_j m_j (v_j + l_j u_j)$, где $\chi(q_j m_j (v_j + l_j u_j)) \geq \chi(x_j) \cap \chi(q_j s_j n_j u_j) = \chi(x_j)$. Отсюда $d = u + q_1 m_1 (v_1 + l_1 u_1) + \dots + q_k m_k (v_k + l_k u_k)$, где $u = q_1 s_1 n_1 u_1 + \dots + q_k s_k n_k u_k$, $\chi(q_j m_j (v_j + l_j u_j)) \geq \chi(a_j)$, так как характеристика этого элемента не меньше $\chi(x_j)$, а сам он делится на m_j. Следовательно, $\chi(u) \geq \chi(a)$. А так как $t(u) \geq t(a_j)$ для каждого j, существуют целые r_j такие, что $(r_1, \dots, r_k) = 1$ и $\chi(a_j) \leq \chi(r_j u)$. Если теперь f_j такие целые, что $r_1 f_1 + \dots + r_k f_k = 1$, то $u = r_1 f_1 u + \dots + r_k f_k u$ и $\chi(b_j) \geq \chi(a_j)$, где $b_j = r_j f_j u + q_j m_j (v_j + l_j u_j)$. Имеем $b_1 + \dots + b_k = d$, т. е. выполнено условие монотонности.

Теорема 11. *Для группы $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i — квазиоднородные группы без кручения, эквивалентны следующие условия:*

1) *A вполне транзитивна;*

2) *$\{A_i\}_{i \in I}$ — вполне транзитивная система групп, причем A представима в виде $A = \bigoplus_{p \in \Pi} A_p$, где $\Pi(A_p) \cap \Pi(A_q) = \varnothing$ при $p \neq q$, каждая $A_p = \bigoplus_{i \in I_p} A_i$, $\Pi(A_i) = \Pi(A_j)$ при $i, j \in I_p \subseteq I$, подгруппы A_p однозначно определяются группой A и для каждого p система $\{A_i\}_{i \in I_p}$ удовлетворяет условиям теоремы* 10.

Доказательство. Ввиду леммы 5 и теорем 9, 10 достаточно доказать справедливость 1)$\Rightarrow$ 2). Пусть A — вполне транзитивная группа. Тогда согласно доказательству леммы 3 условие $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) \neq \varnothing$ влечет $\operatorname{Hom}(A_i, A_j) \neq 0$. Поэтому если A_i квазиоднородны, то $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \varnothing$ либо $\Pi(A_i) = \Pi(A_j)$ для любых $i, j \in I$. Следовательно, подгруппы A_p найдутся. Ввиду леммы 5 считаем далее для простоты, что сама группа A квазиоднородна. Если теперь $d \in A_i(t_1 \cap \dots \cap t_k)$, где $t_j \in T(A_{i_j})$, то $t(d) \geq t(a_1 + \dots + a_k)$, где $t(a_j) = t_j$, $a_j \in A_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$. Поэтому найдется наименьшее натуральное n со свойством $\chi(nd) \geq \chi(a_1 + \dots + a_k)$. Тогда $\chi(d) \geq \chi(n^{-1}(a_1 + \dots + a_k))$. В силу вполне транзитивности A существует ее эндоморфизм f со свойством $n^{-1} f(a_1) + \dots + n^{-1} f(a_k) = d$. Если теперь π — проекция A на A_i, то $n^{-1} \pi f(a_j) \in A_i$ и $d \in A_i(t_1) + \dots + A_i(t_k)$, откуда $A_i(t_1 \cap \dots \cap t_k) \subseteq A_i(t_1) + \dots + A_i(t_k)$. Ссылка на лемму 3 заканчивает доказательство.

Теорема 11 сводит изучение квазиоднородно разложимых вполне транзитивных групп к квазиоднородному случаю. Как следствие вытекает

Теорема 12 [6, § 1]. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — квазиоднородная группа без кручения, где $|I| > 1$, существует максимальный элемент $t \in T(A)$ и сервантные подгруппы в A_i сильно неразложимы. A является вполне транзитивной тогда и только тогда, когда $A_i \cong A_j$ — однородные вполне транзитивные группы $i, j \in I$.*

Доказательство. Необходимость. Из доказательства леммы 3 следует, что $t \in T(A_i)$ для каждого i, причем t — наибольший тип. Так как сервантные подгруппы A_i сильно неразложимы, то по лемме 1 все ненулевые эндоморфизмы A_i являются мономорфизмами. Если теперь $a \in A_i$ и $t(a) = t$, то для $0 \neq f \in E(A_i)$ существует натуральное n со свойством $\chi(f(a)) = \chi(na)$. Так как A_i вполне транзитивна как прямое слагаемое в A, то $\varphi f(a) = na$ для некоторого $\varphi \in E(A_i)$. Отсюда вытекает, что f является целым кратным автоморфизма. В частности, он сохраняет типы элементов. Отсюда следует, что все A_i однородные одного и того же типа. Поэтому найдется $b \in A_j$ со свойством $\chi(b) = \chi(a)$. Если теперь π, θ — проекции A на A_i и A_j соответственно и $\alpha, \beta \in E(A)$, $\alpha(a) = b$, $\beta(b) = a$, то $f = \theta\alpha\pi$ и $\psi = \pi\beta\theta$ осуществляют изоморфизм A_i и A_j.

Достаточность вытекает из того, что прямая сумма изоморфных однородных вполне транзитивных групп является вполне транзитивной группой [4, предложение 2.10].

Теорема 13. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где* $A_i \cong G$ — *квазиоднородная вполне транзитивная группа, все ненулевые эндоморфизмы которой — мономорфизмы,* $T(G)$ — *линейно упорядоченное множество и* $G(t)$ *плотна в* G *для любого* $t \in T(G)$ *в* Z*-адической топологии. Тогда* A *вполне транзитивна. Любой ее элемент содержится в прямом слагаемом, изоморфном* G.

Доказательство. Согласно примеру 2 из [4] любая система изоморфных вполне транзитивных групп без кручения является вполне транзитивной. Поэтому ввиду теорем 10, 11 достаточно доказать последнее утверждение теоремы. Пусть $0 \neq a \in A$, $a = a_1 + \dots + a_k$, где $a_j \in A_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$. Если $t(a_1) \leq t(a_2), \dots, t(a_k)$, то $t(a) = t(a_1)$. Если $b \in A_1$ и $t(b) = t(a)$, то существуют натуральные n и m такие, что $\chi(na) = \chi(mb)$. Пусть $\alpha, \beta \in E(A)$ такие, что $\alpha(na) = mb$ и $\beta(mb) = na$, π — проекция A на A_1. Для $B = \beta\pi(A) \cong A_1$ имеем $na \in B$, $\beta\pi\alpha|_B = 1_B$ и $\beta\pi\alpha(A) = B$, т. е. B — прямое слагаемое A, $a \in B$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беккер И. Х., Крылов П. А., Чехлов А. Р.* Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. Томск, 1994. № 11, 12. С. 3–52.
2. *Крылов П. А.* Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1988. № 7. С. 81–99.
3. *Чехлов А. Р.* Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. Томск, 1991. № 10. С. 157–178.
4. *Гриншпон С. Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 56–92.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
6. *Добрусин Ю. Б.* Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1980. С. 45–69.

Статья поступила 19 мая 1998 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Томский гос. университет, механико-математический факультет, кафедра алгебры, Томск 634021
cheklov@ctc.tsu.ru