Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛУЧА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. Н. Павленко, Д. К. Потапов

Аннотация: Рассматриваются основные краевые задачи для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывной ограниченной нелинейностью, мультипликативно зависящей от параметра. При любом значении параметра нуль является решением соответствующей задачи. Собственными значениями задачи называют те значения параметров, для которых соответствующая проблема имеет ненулевое решение.

Вариационным методом устанавливаются предложения о существовании полуоси собственных значений для исследуемых задач. Библиогр. 22.

В статье рассматривается уравнение

$$Au = \lambda Tu \tag{1}$$

с параметром $\lambda > 0$, где A — линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E — вещественное рефлексивное банахово пространство), $T : E \to E^*$ — компактное отображение, ограниченное на E, $T(0) = 0$. Очевидно наличие нулевого решения уравнения (1) при любом λ. Ищутся $\lambda > 0$, для которых уравнение (1) имеет ненулевые решения (такие λ называют собственными значениями уравнения (1)).

Вариационным методом [1–5] доказывается теорема о существовании ненулевых решений уравнения (1) при достаточно больших λ, причем оператор T на этих решениях радиально непрерывен. Общие результаты применяются к исследованию основных краевых задач для полулинейных уравнений эллиптического типа с параметром и разрывной ограниченной нелинейностью. Устанавливаются предложения о существовании луча положительных собственных значений для таких задач. При этом ядро дифференциального оператора с соответствующими граничными условиями может быть ненулевым (так называемые резонансные краевые задачи). Рассматриваемый класс задач включает известную модель М. А. Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости [6].

Уравнение (1) с непрерывным оператором T изучалось топологическими методами в [7, 8], в полуупорядоченных пространствах в [9, 10] и вариационным методом в [11, 12]. Проблеме непустоты множества упорядоченных пар, состоящих из собственных значений и соответствующих собственных функций, и изучению структуры этого множества для основных краевых задач для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью посвящено значительное число работ. Наиболее общие результаты в этом направлении получены в работах [13, 14]. В отличие от [13, 14] в данной статье ослаблены ограничения на точки разрыва нелинейности.

Общие результаты

Пусть E — вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* — сопряженное с E пространство. Через (z, x) будем обозначать значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Определение 1 [15]. Отображение $T : E \to E^*$ называют *квазипотенциальным*, если существует функционал $f : E \to \mathbb{R}$, для которого

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (T(x+th), h)\, dt \quad \forall x, h \in E$$

(интеграл понимается в смысле Лебега). При этом f называют *квазипотенциалом* оператора T.

Определение 2 [16]. Отображение $T : E \to E^*$ называют *радиально непрерывным в точке* $x \in E$, если для любого $h \in E$

$$\lim_{t\to 0}(T(x+th), h) = (Tx, h).$$

Определение 3 [13]. Элемент $x \in E$ будем называть *точкой разрыва* оператора T, если найдется $h \in E$, для которого либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h)$ не существует, либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h) \neq (Tx, h)$.

Определение 4 [17]. Элемент $x \in E$ называют *регулярной точкой* для оператора $T : E \to E^*$, если для некоторого $h \in E$

$$\overline{\lim_{t\to +0}}(T(x+th), h) < 0.$$

Замечание 1 [3]. Если оператор $T : E \to E^*$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to +0}(T(x+th) - Tx, h) \geq 0$ для любых $x, h \in E$, то все точки разрыва оператора T регулярны.

В дальнейшем нам потребуется следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $x \in E$ — точка минимума квазипотенциала f локально ограниченного оператора $T : E \to E^*$, причем точки разрыва оператора T регулярны. Тогда x — точка радиальной непрерывности оператора T и $Tx = 0$.*

Доказательство теоремы 1. Допустим, что x — точка разрыва оператора T. Тогда найдется $h \in E$ такое, что

$$\overline{\lim_{t\to +0}}(T(x+th), h) < 0. \tag{2}$$

Так как x — точка минимума функционала f, найдется такое $\delta_1 > 0$, что

$$f(x+th) - f(x) \geq 0 \quad \forall\, 0 < t < \delta_1. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$f(x+th)-f(x)=\int\limits_0^1 (T(x+\tau th),th)\,d\tau \quad \forall t>0.$$

Из (2) следует существование $\varepsilon>0$ и $\delta_2>0$ таких, что $(T(x+sh),h)<-\varepsilon$, как только $0<s<\delta_2$. Следовательно, если $0<t<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, то

$$f(x+th)-f(x)<-t\varepsilon,$$

что противоречит (3). Радиальная непрерывность T в точке x установлена.

Для любого $h\in E$ и $t>0$

$$\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\int\limits_0^1 (T(x+\tau th),h)\,d\tau.$$

Из последнего равенства и локальной ограниченности T по теореме Лебега существует

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\int\limits_0^1 \lim_{t\to+0}(T(x+\tau th),h)\,d\tau=(Tx,h) \quad \forall h\in E.$$

Поскольку x — точка минимума функционала f, имеем $(Tx,h)\geq 0$ $\forall h\in E$. Последнее возможно только тогда, когда $Tx=0$. Теорема 1 доказана.

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 2. *Предположим, что*

1) *A — линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E — вещественное рефлексивное банахово пространство), пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств E_1 и E_2, $E_1=\operatorname{Ker}A$, причем существует постоянная $\alpha>0$ такая, что $(Au,u)\geq\alpha\|u\|^2$ для любого $u\in E_2$;*

2) *отображение T компактное, квазипотенциальное и ограниченное на E (т. е. существует $M>0$ такое, что $\|Tx\|\leq M$ $\forall x\in E$), а его квазипотенциал f равен нулю в нуле и $f(u_0)>0$ для некоторого $u_0\in E$; если $E_1\neq\{0\}$, то дополнительно $\lim\limits_{u\in E_1,\|u\|\to+\infty} f(u)=-\infty$;*

3) *$\lim\limits_{t\to+0}(T(u+th)-Tu,h)\geq 0$ для всех $u,h\in E$.*

Тогда найдется $\lambda_0>0$ такое, что для любого $\lambda>\lambda_0$ существует $u_\lambda\in E$, $u_\lambda\neq 0$, для которого

$$f^\lambda(u_\lambda)=\inf_{v\in E}f^\lambda(v), \quad f^\lambda(u)=\frac{1}{2}(Au,u)-\lambda f(u),$$

и любое такое u_λ является решением уравнения (1) *и точкой радиальной непрерывности оператора T.*

Замечание 2. Если E — гильбертово пространство, то условие 1 теоремы 2 выполняется, если нуль — изолированная точка спектра неотрицательного оператора A.

Доказательство теоремы 2. Из монотонности A и компактности T следует слабая полунепрерывность снизу на E функционала f^λ для любого $\lambda>0$ [1].

Докажем, что

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} f^{\lambda}(v) = +\infty \quad \forall \lambda > 0. \tag{4}$$

Пусть $v \in E$. Тогда $v = v_1 + v_2$, где $v_i \in E_i$, $i = 1, 2$. Имеем

$$\begin{aligned} f^{\lambda}(v) = f^{\lambda}(v_1 + v_2) &= \frac{1}{2}(Av_2, v_2) - \lambda f(v_1 + v_2) \\ &= \frac{1}{2}(Av_2, v_2) - \lambda(f(v_1 + v_2) - f(v_1)) - \lambda f(v_1) \\ \geq \frac{\alpha}{2}\|v_2\|^2 - \lambda \int_0^1 (T(v_1 + tv_2), v_2)\, dt &- \lambda f(v_1) \geq \frac{\alpha}{2}\|v_2\|^2 - \lambda M\|v_2\| - \lambda f(v_1), \end{aligned}$$

где M — постоянная в неравенстве $\|Tz\| \leq M$, $z \in E$ (такая константа существует, так как по условию оператор T ограничен на E). Заметим, что

$$\frac{\alpha}{2}t^2 - \lambda M t \geq -\frac{\lambda^2 M^2}{2\alpha} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{z\in E_1, \|z\|\to+\infty} f(z) = -\infty$, существует $d_1 > 0$ такое, что

$$-\lambda f(z) > \varepsilon + \frac{\lambda^2 M^2}{2\alpha},$$

если $z \in E_1$ и $\|z\| > d_1$. Далее найдется $d_2 > 0$, для которого

$$\frac{\alpha}{2}t^2 - \lambda M t > \varepsilon + \sup_{z\in E_1, \|z\|\leq d_1} \lambda f(z)$$

для любого $t > d_2$. Супремум в правой части последнего неравенства конечен, ибо $f(z) \leq |f(z) - f(0)| \leq M\|z\|$. Таким образом, если $\|v\| = \|v_1 + v_2\| > 2\max\{d_1, d_2\}$, то либо $\|v_1\|$, либо $\|v_2\|$ больше $\max\{d_1, d_2\}$ и, значит, $f^{\lambda}(v) > \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ следует (4).

Так как f^{λ} $(\lambda > 0)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал в рефлексивном банаховом пространстве, удовлетворяющий условию (4), то из обобщенной теоремы Вейерштрасса [15] вытекает существование $u_\lambda \in E$, для которого

$$f^{\lambda}(u_\lambda) = \inf_{v\in E} f^{\lambda}(v). \tag{5}$$

В силу замечания 1 условие 3 теоремы 2 влечет регулярность точек разрыва оператора $A - \lambda T$ $(\lambda > 0)$. Отсюда и из теоремы 1 получаем, что u_λ, удовлетворяющее (5), является решением уравнения (1) и точкой радиальной непрерывности оператора T.

По условию найдется $u_0 \in E$, для которого $f(u_0) > 0$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to+\infty} f^{\lambda}(u_0) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(Au_0, u_0) - \lambda f(u_0)\right) = -\infty.$$

Отсюда вытекает существование $\lambda_0 > 0$ такого, что $f^{\lambda}(u_0) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$. Следовательно, u_λ, удовлетворяющее (5), отлично от нуля при $\lambda > \lambda_0$, так как $f^{\lambda}(0) = 0$. Теорема 2 доказана полностью.

Приложения

Рассматривается проблема существования ненулевых решений задачи

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x,u(x)), x \in \Omega, \tag{6}$$

$$Bu|_{\Gamma} = 0, \tag{7}$$

в зависимости от параметра λ, где L — равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbb{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha \le 1)$ с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c \in \mathbb{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Здесь функция $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$g_-(x,u) = \varliminf_{\eta \to u} g(x,\eta), \quad g_+(x,u) = \varlimsup_{\eta \to u} g(x,\eta), \quad g(x,0) = 0;$$

оператор граничного условия $Bu(x)$ равен либо $u(x)$ (условие Дирихле), либо

$$\frac{\partial u}{\partial n_L}(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(n,x_j),$$

n — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(n,x_j)$ — направляющие косинусы нормали n (условие Неймана), либо

$$\frac{\partial u}{\partial n_L}(x) + \sigma(x)u(x)$$

с $\sigma \in \mathbb{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательной и не равной тождественно нулю (третье краевое условие).

Определение 5. *Сильным решением* задачи (6), (7) называется функция $u \in W_r^2(\Omega), r > 1$, удовлетворяющая уравнению (6) для почти всех $x \in \Omega$, для которой след $Bu(x)$ на Γ равен нулю.

Определение 6. Число λ называется *собственным значением* задачи (6), (7), если существует сильное решение задачи (6), (7), отличное от нулевого.

Пусть $X = H_0^1(\Omega)$, если (7) — граничное условие Дирихле, и $X = H^1(\Omega)$, если (7) — граничное условие Неймана или третье краевое условие. Краевой задаче (6), (7) сопоставим функционал $J^\lambda(u)$, заданный на X, следующим образом:

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x,s)\,ds,$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} c(x)u^2(x)\,dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \sigma(s)u^2(s)\,ds$$

в случае третьего краевого условия.

Определение 7 [18]. *Полуправильным решением* задачи (6), (7) называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

Определение 8. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Назовем $u \in \mathbb{R}$ *прыгающим разрывом* функции f, если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.

Основными результатами данного раздела являются следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*
1) *существует* $\alpha > 0$, *для которого* $J_1(u) \geq \alpha \|u\|^2$ $\forall u \in X$;
2) *для почти всех* $x \in \Omega$

$$g(x, 0) = 0, \quad |g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

где $a \in L_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, *фиксирована;*

3) *найдется* $u_0 \in X$, *для которого* $\int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u_0(x)} g(x, s)\, ds > 0$.

Тогда существует $\lambda_0 > 0$ *такое, что* $d_\lambda = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$ *для любого* $\lambda > \lambda_0$, *и найдется* $u \in X$ *такое, что*

$$J^\lambda(u) = d_\lambda. \tag{8}$$

Если дополнительно для почти всех $x \in \Omega$ *функция* $g(x, \cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы, то любое* u, *удовлетворяющее* (8), *является ненулевым полуправильным решением задачи* (6), (7).

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия* 2, 3 *теоремы* 3 *и дополнительно условия*
1′) $J_1(u) \geq 0$ $\forall u \in X$;
2′) *пространство* $N(L)$ *решений задачи* $Lu = 0$, $Bu|_\Gamma = 0$ *ненулевое;*
3′) $\lim\limits_{u \in N(L), \|u\| \to +\infty} \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x, s) ds = -\infty$.

Тогда утверждения теоремы 3 *остаются верными.*

Их доказательство в основном сводится к проверке выполнения условий теоремы 2.

Доказательство теорем 3 и 4. Дифференциальный оператор L вместе с граничным условием (7) порождает оператор $T_1 : X \to X^*$, определяемый равенством

$$(T_1 u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}\, dx + \int\limits_\Omega c(x) u(x) v(x)\, dx \quad \forall u, v \in X$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана и равенством

$$(T_1 u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}\, dx + \int\limits_\Omega c(x) u(x) v(x)\, dx + \int\limits_\Gamma \sigma(s) u(s) v(s)\, ds \quad \forall u, v \in X$$

в случае третьего краевого условия. Нелинейность $g(x,u)$ в уравнении (6) порождает оператор $T_2 : X \to X^*$, определяемый равенством

$$(T_2 u, v) = \int\limits_{\Omega} g(x, u(x)) v(x)\, dx \quad \forall u, v \in X.$$

Рассмотрим уравнение

$$T_1 u = \lambda T_2 u \tag{9}$$

в пространстве X. Заметим, что u — решение (9) тогда и только тогда, когда u — слабое решение задачи (6), (7), т. е. $(T_1 u, v) = \lambda (T_2 u, v)$ $\forall v \in X$. В силу того, что $|g(x,u)| \le a(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, $a \in L_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, из теорем о регулярности решений основных краевых задач для равномерно эллиптических уравнений [19] следует, что слабое решение задачи (6), (7) является сильным ее решением.

Покажем, что $u \in X$ — точка радиальной непрерывности оператора T_2 тогда и только тогда, когда для почти всех $x \in \Omega$ значение $u(x)$ — точка непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Необходимость. Пусть u — точка радиальной непрерывности оператора T_2, т. е.

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_{\Omega} g(x, u(x) + th(x)) h(x) dx = \int\limits_{\Omega} g(x, u(x)) h(x)\, dx \quad \forall h \in X.$$

Покажем, что множество $\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x)$ — точка разрыва $g(x,\cdot)\}$ меры нуль. Поскольку по условию для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, то Ω_1 лишь на множество меры нуль может отличаться от множества $\{x \in \Omega : g(x, u(x)-) < g(x, u(x)+)\}$. Допустим противное, т. е. пусть $\operatorname{mes} \Omega_1 \neq 0$. Тогда найдутся положительные числа ε и δ такие, что

$$\operatorname{mes} \Omega(\varepsilon) = \operatorname{mes}\{x \in \Omega : g(x, u(x)+) - g(x, u(x)-) > \varepsilon\} = \delta.$$

Так как функция $a(x)$ из условия 2 теоремы 3 суммируема на Ω, найдется число $\eta > 0$ такое, что для произвольного измеримого подмножества A_1 множества Ω с мерой меньше η верно неравенство $\int\limits_{A_1} a(x) dx < \frac{\varepsilon\delta}{8}$. Существуют замкнутое множество $F \subset \Omega(\varepsilon)$ и открытое $G \supset F$ с замыканием $\overline{G} \subset \Omega$ такие, что $\operatorname{mes} F > \frac{\operatorname{mes}\Omega(\varepsilon)}{2} = \frac{\delta}{2}$, а $\operatorname{mes}(G \backslash F) < \eta$ [17]. Пусть $h \in \mathbb{C}_\infty(\overline{\Omega})$ равна единице на F, нулю вне G, и $0 \le h(x) \le 1$ при $x \in G \backslash F$ (такая функция существует [20]). Тогда $h \in X$ и

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0+} \int\limits_{\Omega} g(x, u(x) + th(x)) h(x)\, dx &= \int\limits_{\Omega} \lim_{t \to 0+} g(x, u(x) + th(x)) h(x)\, dx \\ &= \int\limits_{F} g(x, u(x)+)\, dx + \int\limits_{G \backslash F} \lim_{t \to 0+} g(x, u(x) + th(x)) h(x)\, dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0-} \int\limits_{\Omega} g(x, u(x) + th(x)) h(x)\, dx &= \int\limits_{\Omega} \lim_{t \to 0-} g(x, u(x) + th(x)) h(x)\, dx \\ &= \int\limits_{F} g(x, u(x)-)\, dx + \int\limits_{G \backslash F} \lim_{t \to 0-} g(x, u(x) + th(x)) h(x)\, dx\end{aligned}$$

(переход к пределу в интеграле возможен в силу теоремы Лебега). Следовательно,

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\Omega} g(x,u(x)+th(x))h(x)\,dx-\lim_{t\to 0-}\int\limits_{\Omega} g(x,u(x)+th(x))h(x)\,dx > \frac{\varepsilon\delta}{2}-\frac{2\varepsilon\delta}{8}=\frac{\varepsilon\delta}{4}>0,$$

что противоречит радиальной непрерывности оператора T_2.

Достаточность немедленно вытекает из теоремы Лебега.

Таким образом, любое решение уравнения (9), которое является точкой радиальной непрерывности оператора T_2 — полуправильное решение задачи (6), (7). Поэтому для завершения доказательства теорем 3, 4 достаточно проверить выполнение условий теоремы 2.

Оператор T_2 равен P^*HP, где P — оператор вложения X в $L_p(\Omega)$, $p=\frac{q}{q-1}$, q из условия 2 теоремы 3, P^* — сопряженный с P, отображение H действует из L_p в L_q согласно правилу $Hu=g(x,u(x))$ $\forall u\in L_p$. В силу условия 2 теоремы 3 верна оценка

$$\|Hu\|_{L_q}\le\|a\|_{L_q}\quad\forall u\in L_p. \tag{10}$$

Оператор P компактный, так как $q>\frac{2n}{n+2}$ [21]. Отсюда и из (10) следуют компактность T_2 и его ограниченность на всем пространстве X. В [1] показано, что оператор T_2 квазипотенциален и

$$J_2(u)=\int\limits_{\Omega}dx\int\limits_0^{u(x)}g(x,s)\,ds$$

— его квазипотенциал, т. е.

$$J_2(u+h)-J_2(u)=\int\limits_0^1(T_2(u+th),h)\,dt\quad\forall u,h\in X.$$

Заметим, что оператор T_1 является самосопряженным, линейным и ограниченным. Поэтому он потенциален с потенциалом $J_1(u)=\frac{1}{2}(T_1u,u)$ [15]. Оператор T_1 равен сумме тождественного и компактного операторов, его ядро совпадает с пространством $N(L)$. Из теорем Фредгольма вытекает, что нуль является изолированной точкой спектра оператора T_1 [22]. Так как X — гильбертово пространство, в силу замечания 2 условие 1 теоремы 2 выполняется. Отображение T_2 квазипотенциальное, компактное и ограниченное на X, его квазипотенциал $J_2(0)$ нулевой, и в силу условия 3 теоремы 3 найдется $u_0\in X$, для которого $J_2(u_0)>0$. Если $N(L)\ne\{0\}$, то

$$\lim_{u\in N(L),\|u\|\to+\infty}J_2(u)=\lim_{u\in N(L),\|u\|\to+\infty}\int\limits_{\Omega}dx\int\limits_0^{u(x)}g(x,s)\,ds=-\infty$$

согласно условию $3'$ теоремы 4. Таким образом, условие 2 теоремы 2 выполнено. В силу условий теорем 3 и 4 для почти всех $x\in\Omega$ функция $g(x,\cdot)$ может иметь только прыгающие разрывы, откуда следует, что

$$\varliminf_{t\to+0}(T_2(u+th)-T_2u,h)\ge 0\quad\forall u,h\in X,$$

т. е. для T_2 выполняется условие 3 теоремы 2. Итак, все условия теоремы 2 выполнены, что завершает доказательство теорем 3, 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1397–1402.
2. *Павленко В. Н.* Полуправильные решения эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 2. С. 230–235.
3. *Павленко В. Н.* Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. 1994. № 1. С. 87–95.
4. *Павленко В. Н., Искаков Р. С.* Непрерывные аппроксимации разрывных нелинейностей полулинейных уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 2. С. 224–233.
5. *Павленко В. Н.* Управление распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. 1999. № 2. С. 56–67.
6. *Гольдштик М. А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.
7. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Rabinowitz P. H.* Some global results for nonlinear eigenvalue problems // J. Funct. Anal. 1971. V. 7. P. 487–513.
9. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Amann H.* Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spases // SIAM Review. 1976. V. 18, N 4. P. 620–709.
11. *Rabinowitz P. H.* Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems // Indiana Univ. Math. J. 1974. V. 23, N 8. P. 729–754.
12. *Rabinowitz P. H.* A bifurcation theorem for potentional operators // J. Funct. Anal. 1977. V. 25. P. 412–424.
13. *Chang K. C.* Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Differential Equations. 1983. V. 49, N 1. P. 1–28.
14. *Marano S. A.* Elliptic eigenvalue problems with highly discontinuous nonlinearities // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125, N 10. P. 2953–2961.
15. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
16. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
17. *Павленко В. Н.* Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1973. № 6. С. 21–29.
18. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 3. С. 506–509.
19. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1966. Т. II.
21. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1982.
22. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

Статья поступила 9 ноября 2000 г.

Павленко Вячеслав Николаевич
Челябинский гос. университет, математический факультет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454021
pavlenko@csu.ru

Потапов Дмитрий Константинович
Челябинский гос. университет, математический факультет,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454021
dpotapov@csu.ru