Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 519.41/47

ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ π–МИНИМАЛЬНОСТИ И π–СЛОЙНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ. I

Н. С. Черников

Аннотация: Для произвольного множества π простых чисел исследуются свойства и строение групп, удовлетворяющих условиям π-минимальности и π-слойной минимальности. В частности, раскрыто строение почти RN-групп (вместе с тем локально разрешимых групп) с этими условиями, а в предположении $2 \in \pi$ — локально ступенчатых (вместе с тем локально конечных) групп с этими условиями. Библиогр. 16.

1. Введение. Основные результаты и некоторые следствия

Одним из наиболее известных условий конечности в общей теории групп является следующее условие, определяемое для произвольного фиксированного множества π простых чисел.

Определение 1 (С. Н. Черников). Группа G *удовлетворяет условию π-минимальности* (коротко, *условию* π-min), если в ней обрывается на конечном номере произвольная цепочка $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \dots$ подгрупп, обладающих тем свойством, что в каждом множестве $G_k \setminus G_{k+1}$ содержится π-элемент, либо такие цепочки отсутствуют. В случае, когда $\pi = \{p\}$, говорят, что G *удовлетворяет условию p-минимальности* (коротко, *условию* p-min).

Очевидно, произвольная подгруппа группы с условием p-min удовлетворяет этому условию.

При $\pi = \varnothing$ произвольная группа удовлетворяет условию π-min, так как тогда 1 — единственный ее π-элемент.

Определение 2 (С. Н. Черников). Группа G *удовлетворяет условию примарной минимальности*, если она удовлетворяет условию p-min для каждого простого p.

С группами, удовлетворяющими условию π-min, а также с группами, удовлетворяющими условию примарной минимальности, связаны многие глубокие результаты. Для условия p-min принципиальное значение имеет теорема Я. Д. Половицкого [1], утверждающая, что локально конечная группа, у которой произвольная счетная квазиполная подгруппа (если такие подгруппы есть) разрешима или локально нильпотентна, удовлетворяет условию p-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу. (Напомним, что *квазиполной* называется группа, не содержащая истинных подгрупп конечного индекса; в отличие от [2] мы единичную группу считаем квазиполной.) В соответствии с этой теоремой локально конечная группа, которая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00488).

почти разрешима или почти локально нильпотентна (в частности, разрешима или локально нильпотентна), удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу. (Напомним, что для произвольного класса $\mathfrak{X}$ групп почти $\mathfrak{X}$-группа — это конечное расширение $\mathfrak{X}$ группы.)

В связи с отмеченными результатами возникают следующие естественные вопросы.

Вопрос 1. Верно ли, что периодическая локально разрешимая группа удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу?

Вопрос 2. Верно ли, что локально конечная группа удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу?

Автор [3–5] построил для произвольного конечного множества π нечетных простых чисел примеры бесконечных простых локально конечных групп, удовлетворяющих условию π-min и содержащих при каждом $p \in \pi$ элементы порядка p, и вместе с этим отрицательно решил вопрос 2. Каждая из следующих двух теорем положительно решает вопрос 1.

Теорема 1 [3, 4]. *Локально ступенчатая группа G, у которой в локально конечном радикале все счетные квазиполные подгруппы (если такие есть) локально разрешимы, удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Теорема 2 [3, 4]. *Почти RN-группа G (в частности, периодическая локально разрешимая группа G) удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Напомним, что *локально ступенчатой* называется группа, каждая отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа которой имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса (С. Н. Черников, см., например, [6]). Класс локально ступенчатых групп весьма широк. Он включает в себя, например, классы локально конечных, локально разрешимых, финитно аппроксимируемых, линейных групп, групп матриц над коммутативно-ассоциативными кольцами, класс почти RN-групп (и вместе с тем все классы Куроша — Черникова), класс H-групп, т. е. групп с конечными простыми секциями (введенный в рассмотрение в [7]), и др. Очевидно, произвольная группа является локально ступенчатой тогда и только тогда, когда она не содержит отличных от единицы конечнопорожденных квазиполных подгрупп.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее предложение (отмеченное выше).

Следствие 1 [1]. *Локально конечная группа G, у которой произвольная счетная квазиполная подгруппа (если такие подгруппы есть) разрешима или локально нильпотентна, удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Следующая теорема показывает, что ответ на вопрос 2 положителен в случае, когда $2 \in \pi$.

Теорема 3 [3, 4]. *В случае $2 \in \pi$ произвольная локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Напомним, что *группа с черниковскими слоями* — это группа, в которой каждое множество элементов одного и того же порядка порождает черниковскую подгруппу [2, 8]. Очевидно, что группа с черниковскими слоями локально конечна. Из теоремы 3 вытекают, например, такие предложения.

Следствие 2 [3]. *Локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию примарной минимальности тогда и только тогда, когда все ее элементы конечных порядков порождают подгруппу с черниковскими слоями.*

Следствие 3. *Периодическая локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию примарной минимальности тогда и только тогда, когда она является группой с черниковскими слоями.*

В настоящей работе под нормальной системой группы мы понимаем то же, что и в [9].

Следствие 4. *Локально конечная группа G, у которой произвольная счетная квазиполная подгруппа (если такие подгруппы есть) имеет нормальную систему с конечными факторами, удовлетворяет условию примарной минимальности тогда и только тогда, когда она является группой с черниковскими слоями.*

Следующее предложение автоматически вытекает из теоремы 3 и теоремы Фейта — Томпсона (о разрешимости конечных групп нечетного порядка).

Следствие 5. *Если $2 \in \pi$ и локально конечная группа G при каждом $p \in \pi$ удовлетворяет условию π-min, то все ее π-элементы группы G порождают локально конечную почти локально разрешимую подгруппу.*

Из следствия 4 непосредственно вытекает такое

Следствие 6. *В локально ступенчатой группе G, удовлетворяющей условию примарной минимальности, все ее элементы конечных порядков порождают локально конечную почти локально разрешимую подгруппу.*

Следующая теорема усиливает теорему 3 в локально конечном случае.

Теорема 4. *В случае $2 \in \pi$ локально конечная группа G удовлетворяет условию π-min для локально разрешимых подгрупп тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Из теоремы 4 получаем

Следствие 7. *В случае $2 \in \pi$ локально конечная группа G удовлетворяет условию π-min тогда и только тогда, когда каждая ее локально разрешимая подгруппа удовлетворяет этому условию.*

Следствие 8. *Для локально конечной группы G следующие утверждения равносильны:*

1) *G удовлетворяет условию примарной минимальности,*

2) *каждая локально разрешимая подгруппа G удовлетворяет условию примарной минимальности,*

3) *G — группа с черниковскими слоями.*

Следствие 8 вытекает из следствий 7 и 2.

Из теоремы 4 и теоремы Фейта — Томпсона непосредственно имеем

Следствие 9. *Если $2 \in \pi$ и локально конечная группа G при каждом $p \in \pi$ удовлетворяет условию p-min для локально разрешимых подгрупп, то все π-элементы группы G порождают почти локально разрешимую подгруппу.*

Из следствия 9 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 10 [10]. *Локально конечная группа G с условием примарной минимальности для локально разрешимых подгрупп почти локально разрешима.*

Легко видеть, что в произвольной группе G подгруппа K, порожденная всеми квазиполными подгруппами, является квазиполной и что фактор-группа G/K не содержит отличных от единицы квазиполных подгрупп [2].

Определение 3. Подгруппу группы G, порожденную всеми ее квазиполными подгруппами, будем называть *ее квазиполной* частью и обозначать через $\mathfrak{Q}(G)$.

Автором получены следующие две теоремы относительно квазиполной части группы G с условием π-min.

Теорема 5. *Пусть G — произвольная группа с условием π-min и H — подгруппа, порожденная всеми ее π-элементами. Тогда фактор-группа $H/\mathfrak{Q}(H)$ конечна.*

Заметим, что если в теореме 5 подгруппа $\mathfrak{Q}(H)$ периодическая, то для любого периодического нормального делителя N группы G, содержащего $\mathfrak{Q}(H)$, в фактор-группе G/N все π-элементы порождают конечную подгруппу, совпадающую с HN/N. С учетом этого из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. *Произвольная периодическая группа G, удовлетворяющая условию π-минимальности, является расширением квазиполной группы с помощью группы, все π-элементы которой содержатся в ее конечном нормальном делителе.*

Из теоремы 6 непосредственно следует

Следствие 11 [2]. *Всякая локально конечная группа G с условием π-минимальности является расширением квазиполной группы с условием π-минимальности при помощи группы, все π-элементы которой содержатся в ее конечном нормальном делителе.*

Определение 4. Будем говорить, что группа G *удовлетворяет условию π-слойной минимальности* (коротко, *условию* $l\pi$-min), если в любой убывающей цепочке ее подгрупп $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_k \supseteq G_{k+1} \supseteq \dots$ для каждого π-числа n не более конечного числа разностей $G_k \setminus G_{k+1}$ содержат элементы порядка n.

Очевидно, произвольная подгруппа группы с условием $l\pi$-min удовлетворяет этому условию.

При $\pi = \varnothing$ произвольная группа удовлетворяет условию $l\pi$-min, так как тогда 1 — единственное π-число.

В случае, когда π состоит из одного простого числа p, определение 4 принадлежит Я. Д. Половицкому [8]. В таком случае говорят, что G *удовлетворяет условию p-слойной минимальности* (коротко, *условию* l-min).

Определение 5 (Я. Д. Половицкий [8]). Если G удовлетворяет условию l_p-min для любого p, то говорят, что она удовлетворяет условию слойной минимальности (коротко, условию l-min).

Замечание 1. Очевидно, произвольная группа с условием π-min удовлетворяет условию $l\pi$-min. Обратное в случае бесконечного множества π неверно. Действительно, в этом случае прямое произведение групп порядков p, взятых по всем $p \in \pi$, является группой с условием $l\pi$-min, но не с условием π-min.

Автором получены следующие результаты о группах с условием l_π-min.

Теорема 7 [4]. *Локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию π-слойной минимальности тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию p-минимальности для каждого $p \in \pi$, если $\pi \neq \varnothing$.*

Из теоремы 7 непосредственно вытекает

Следствие 12. *Локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию слойной минимальности тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию примарной минимальности.*

Теорема 8. *При $\pi \neq \varnothing$ локально ступенчатая группа G, у которой в локально конечном радикале все счетные квазиполные подгруппы (если такие есть) локально разрешимы, тогда и только тогда удовлетворяют условию l_π-min, когда для каждого $p \in \pi$ все ее p-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Теорема 9. *При $\pi \neq \varnothing$ почти RN-группа G удовлетворяет условию l_π-min тогда и только тогда, когда для каждого $p \in \pi$ все ее p-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Теорема 10 [4]. *В случае $2 \in \pi$ произвольная локально ступенчатая группа G удовлетворяют условию l_π-min тогда и только тогда, когда для каждого $p \in \pi$ все ее p-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Из теоремы 10 непосредственно получаем следующие предложения.

Следствие 13 [4]. *Локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию слойной минимальности тогда и только тогда, когда для любого натурального n все ее элементы порядков $\leq n$ порождают черниковскую подгруппу.*

Следствие 14. *Периодическая локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию слойной минимальности тогда и только тогда, когда она является группой с черниковскими слоями.*

Следствие 15 [8]. *Локально конечная группа G удовлетворяет условию l-min тогда и только тогда, когда она является группой с черниковскими слоями.*

Из теоремы 10 и теоремы Фейта — Томпсона автоматически вытекает

Следствие 16. *Если $2 \in \pi$ и локально конечная группа G при каждом $p \in \pi$ удовлетворяет условию p-min, то все ее π-элементы порождают локально конечную почти локально разрешимую подгруппу (которая является расширением черниковской группы с помощью локально разрешимой группы).*

Следующая теорема усиливает теорему 10 в локально конечном случае.

Теорема 11 [4]. *В случае $2 \in \pi$ локально конечная группа G удовлетворяют условию l_π-min для локально разрешимых подгрупп тогда и только тогда, когда при каждом $p \in \pi$ все ее p-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Из теоремы 11 вытекает

Следствие 17. *В случае $2 \in \pi$ локально конечная группа G удовлетворяют условию l_π-min тогда и только тогда, когда каждая ее локально разрешимая подгруппа удовлетворяет этому условию.*

Из теоремы 11 и теоремы Фейта — Томпсона получаем

Следствие 18. *Если $2 \in \pi$ и локально конечная группа G при каждом $p \in \pi$ удовлетворяет условию l_p-min для локально разрешимых подгрупп, то все ее π-элементы порождают почти локально разрешимую подгруппу.*

Теорема 12. *Локально ступенчатая группа G удовлетворяет условию l_π (соответственно π-min) тогда и только тогда, когда все ее π-элементы порождают локально конечную подгруппу с условием l_π-min (соответственно π-min).*

Теорема 12 существенно используется при доказательстве теорем 1, 3, 7, 8, 10. Для условия π-min она анонсирована автором в [3].

Теорема 13. *Пусть G — группа с условием l_π-min и H — подгруппа, порожденная всеми ее π-элементами. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) фактор-группа $H/\mathfrak{Q}(H)$ локально нормальна, не более чем счетна, и каждое конечное множество ее элементов содержится в конечном нормальном делителе группы $G/\mathfrak{Q}(H)$;

2) если подгруппа $\mathfrak{Q}(H)$ локально конечна, то для любой локально конечной подгруппы $N \trianglelefteq G$, содержащей $\mathfrak{Q}(H)$, фактор-группа G/N удовлетворяет условию l_π-min и при $\pi \neq \varnothing$ в ней при произвольном конечном $\sigma \in \pi$ все σ-элементы порождают конечную подгруппу.

Из теоремы 13 непосредственно вытекает

Следствие 19. *Локально конечная группа G с условием l_π-min является расширением квазиполной группы с помощью группы, удовлетворяющей этому условию, в которой для любого $n \in \mathbb{N}$ все π-элементы порядков $\leq n$ порождают конечную подгруппу.*

Теорема 13 существенно используется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 14. *Пусть G — группа с условием l_π-min и H — подгруппа, порожденная всеми ее π-элементами. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) H локально конечна,

2) H обладает локальной системой конечнопорожденных подгрупп, произвольная из которых не имеет отличных от единицы квазиполных подгрупп конечного индекса и порождается π-элементами.

Следствие 20. *Пусть $\pi \neq \varnothing$ и G — группа с условием l_π-min, H — подгруппа, порожденная всеми π-элементами группы G, и для каждого $p \in \pi$ H_p — подгруппа, порожденная всеми p-элементами группы G. Подгруппа H локально конечна тогда и только тогда, когда в каждой H_p отсутствуют отличные от единицы конечнопорожденные квазиполные подгруппы.*

Следствие 20 непосредственно вытекает из теоремы 14.

Замечание 2. Группа G ни в одном из приведенных выше предложений, кроме теорем 5, 6, 13, 14 и следствий 1, 4, 11, 19, 20, не может быть произвольной. Действительно, любая построенная А. Ю. Ольшанским бесконечная конечнопорожденная простая группа G с конечными собственными подгруппами (см., например, [11]) удовлетворяет условиям π-min и примарной минимальности и при $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$ для каждого $p \in \pi \cap \pi(G)$ порождается своими p-элементами.

В связи с теоремами 1 и 2 поставим следующий

Вопрос 3. Верно ли, что в группе G с условием π-min, обладающей нормальной системой с конечными факторами, все π-элементы порождают черниковскую подгруппу?

В связи с теоремой 3 поставим

Вопрос 4. Верно ли, что в произвольной группе G с условием π-min все 2-элементы порождают черниковскую подгруппу?

В связи с теоремой 4 поставим

Вопрос 5. При любом ли множестве π простых чисел произвольная локально конечная группа G, все локально разрешимые подгруппы которой удовлетворяют условию π-min, сама удовлетворяет этому условию?

В связи с теоремой 7 предложим следующую задачу.

Задача 1. Найти все простые числа p, для которых условия p-min и l_p-min равносильны.

В связи с теоремой 13 предложим такую задачу.

Задача 2. Найти все простые числа p, для которых у произвольной группы G с условием l_p-min, порождаемой p-элементами, фактор-группа $G/\mathfrak{Q}(G)$ конечна.

Доказательствам теорем 1–14 (основных результатов настоящей работы) предпошлем ряд предварительных результатов, многие из которых представляют самостоятельный интерес.

2. Предварительные результаты

Лемма 1. *Для произвольных множества π простых чисел и группы G следующие утверждения равносильны:*

1) *группа G удовлетворяет условию π-min (соответственно l_π-min);*

2) *подгруппа группы G, порожденная всеми ее π-элементами, удовлетворяет условию π-min (соответственно l_π-min);*

3) *любое не более чем счетное множество π-элементов группы G порождает подгруппу с условием π-min (соответственно l_π-min).*

Доказательство. Очевидно, утверждение 1 влечет утверждение 2, а последнее — утверждение 3.

Пусть утверждение 3 справедливо, а утверждение 1 — нет. Тогда найдется бесконечная цепочка подгрупп $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \dots$ группы G такая, что произвольная разность $G_k \setminus G_{k+1}$ содержит некоторый π-элемент g_k, причем в случае условия l_π-min $|g_k| = |g_{k+1}|$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $H_k = \langle g_{k+1}, g_{k+1}, \dots \rangle$. Тогда подгруппа H_1 счетна. Далее, у цепочки $H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_k \supset H_{k+1} \supset \dots$ при каждом k будет $g_k \in H_k \setminus H_{k+1}$ и, значит, H_1 не удовлетворяет условию π-min (соответственно l_π-min). Противоречие. Итак, утверждение 3 влечет утверждение 1. Лемма доказана.

В случае условия π-min равносильность утверждений 1 и 2 леммы 1 установлена в [2].

Лемма 2. *Для произвольных множества $\pi \neq \varnothing$ простых чисел и группы G следующие утверждения равносильны:*

1) *группа G удовлетворяет условию l_π-min;*

2) *для каждого конечного $\sigma \subseteq \pi$ группа G удовлетворяет условию l_σ-min;*

3) *при каждом $p \in \pi$ группа G удовлетворяет условию l_p-min.*

Доказательство. Очевидно, утверждение 1 влечет утверждение 2, а последнее — утверждение 3.

Пусть справедливо утверждение 3. Тогда, очевидно, для любого π-числа $n \neq 1$ у произвольной бесконечной цепочки $G_2 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_k \supseteq G_{k+1} \supseteq \dots$ подгрупп группы G при некотором $l \in \mathbb{N}$ в каждой разности $G_k \setminus G_{k+1}$, $k \geq l$, отсутствуют примарные элементы с порядком, делящим n. В таком случае разности $G_k \setminus G_{k+1}$ не содержат элементов порядка n. Следовательно, группа G удовлетворяет условию l_π-min. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для произвольных конечного множества π простых чисел и группы G следующие утверждения равносильны:*

1) *G удовлетворяет условию π-min;*

2) *при каждом $p \in \pi$ G удовлетворяет условию p-min.*

Доказательство. Пусть справедливо утверждение 2. Тогда у произвольной цепочки $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \dots$ подгрупп группы G почти во всех разностях $G_k \setminus G_{k+1}$ отсутствуют π-элементы с $p \in \pi$ и, значит, ввиду конечности π отсутствуют π-элементы. Следовательно, G удовлетворяет π-min.

Под условием min группы ниже, как обычно, понимается условие минимальности для подгрупп.

Лемма 4. *Для произвольного множества π простых чисел расширение группы с условием* min *с помощью группы с условием π-min (соответственно l_π-min) удовлетворяет условию π-min (соответственно l_π-min).*

Доказательство. Пусть $N \trianglelefteq G$, N — группа с условием min, G/N — группа с условием π-min (соответственно l_π-min) и $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_k \supseteq G_{k+1} \supseteq \dots$ — произвольная бесконечная убывающая цепочка подгрупп группы G. Тогда найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $G_k \cap N = G_{k+1} \cap N$ при любом $k \geq n$ и разность $G_kN \setminus G_{k+1}N$ не содержит π-элементов (соответственно π-элементов порядка $\leq m$ для фиксированного $m \in \mathbb{N}$). Используя при $k \geq n$ лемму С. Н. Черникова (см., например [12, лемма 1.8]), получим $G_k \cap G_{k+1}N = G_{k+1}(G_k \cap N) = G_{k+1}$. Поэтому при $k \geq n$

$$G_k \setminus G_{k+1} = G_k \setminus G_{k+1}N \subseteq G_kN \setminus G_{k+1}N$$

и, значит, $G_k \setminus G_{k+1}$ не содержит π-элементов (соответственно π-элементов порядка $\leq m$). Лемма доказана.

Так как в локально конечной группе с конечными p-подгруппами все силовские p-подгруппы сопряжены, из леммы 1 [8] непосредственно вытекает

Следствие 21. *Локально конечная группа с конечными p-подгруппами, удовлетворяющая условию l_p-min, удовлетворяет условию p-min.*

Предложение 1. *Пусть G — группа с условием π-min и N — ее инвариантная периодическая подгруппа. Тогда фактор-группа G/N удовлетворяет условию π-min.*

Доказательство. Пусть G/N не удовлетворяет условию π-min. Тогда в G найдется бесконечная убывающая цепочка подгрупп $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \dots$ такая, что при каждом k $N \subset G_k$ и разность $G_k \setminus G_{k+1}$ обладает некоторым элементом g_k, для которого смежный класс g_kN — π-элемент фактор-группы G/N. Так как N периодическая, то $g_kN = h_kN$ для некоторого π-элемента h_k группы G_k. Таким образом, при каждом k разность $G_k \setminus G_{k+1}$ обладает некоторым π-элементом, что невозможно. Противоречие. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть G — группа с условием l_π-min и N — ее инвариантная локально конечная подгруппа. Тогда фактор-группа G/N удовлетворяет условию l_π-min.*

Доказательству предложения 2 предпошлем следующие определение 5, предложение 3, следствие 22 из него, следствие 23 из теоремы С. Н. Черникова о черниковости локально конечной p-группы с условием минимальности для абелевых подгрупп (см., например, [6, теорема 4.1]).

Определение 5. Силовскую π-подгруппу группы G будем называть *идеальной*, если она содержит изоморфную копию произвольной ее π-подгруппы.

Напомним, что ввиду теоремы С. Н. Черникова о локально разрешимых группах с условием минимальности (см., например, [6, теорема 1.1]) и леммы 8.5 из [7] у локально конечной группы G с условием min-p (или, что то же, с условием минимальности для p-подгрупп) все p-секции черниковские. Ниже, как в [13] или [12], для произвольной группы G через $J(G)$ будем обозначать пересечение всех ее подгрупп конечного индекса. Вследствие теоремы Пуанкаре $J(G)$ совпадает с пересечением всех нормальных делителей конечного индекса G. В случае черниковской группы G подгруппа $J(G)$ полная абелева и индекс $|G : J(G)|$ конечен.

Предложение 3 [13]. *Пусть G — локально конечная группа с условием min-p. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждая конечная p-подгруппа группы G содержится в некоторой ее идеальной силовской p-подгруппе, любые две идеальные силовские p-подгруппы группы G изоморфны, и произвольная p-подгруппа группы G, содержащая изоморфные копии всех ее конечных p-подгрупп (в частности, изоморфная идеальной силовской p-подгруппе G), является ее идеальной силовской p-подгруппой. Любая p-секция группы G изоморфна секции ее идеальной силовской p-подгруппы.*

2. *Для любых подгруппы $N \trianglelefteq G$ и идеальной силовской p-подгруппы P группы G $P \cap N$ и PN/N — идеальные силовские p-подгруппы соответственно групп N и G/N.*

3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ подгруппы $P_n = \langle g \in J(P) \mid |g| \leq n \rangle$, взятые по всем идеальным силовским p-подгруппам P группы G, сопряжены в G. Найдутся конечные p-подгруппы H по одной в каждой идеальной силовской p-подгруппе P группы G такие, что 1) $P = HJ(P)$; 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ все подгруппы HP_n сопряжены в G; 3) $H \cap J(P) = P_n$ при $n = |P : J(P)|$. Для произвольных идеальной силовской p-подгруппы P группы G и конечной p-подгруппы S группы G найдется $g \in G$, при котором $S^g \subseteq P$.*

Предложение 3 объединяет ряд результатов О. Г. Кегеля и Б. А. Ф. Верфрица, содержащихся в книге [13, ч. 3].

Следствие 22. *В локально конечной группе G с условием min-p для любой ее идеальной силовской p-подгруппы P $\langle P^G \rangle = O^{p'}(G)$.*

Следствие 23 [8]. *Локально конечная p-группа G удовлетворяет условию l_p-min тогда и только тогда, когда она черниковская.*

Доказательство. Необходимость. В случае, когда G удовлетворяет условию l_p-min, произвольная ее элементарная абелева подгруппа, очевидно, конечна. Поэтому произвольная ее абелева подгруппа является черниковской и, значит, ввиду отмеченной теоремы С. Н. Черникова группа G черниковская.

Достаточность очевидна.

Доказательство предложения 2. Пусть фактор-группа G/N не удовлетворяет условию l_π-min. Тогда ввиду леммы 2 она для некоторого $p \in \pi$ не удовлетворяет условию l_p-min. Поэтому для некоторого p-числа $m \in \mathbb{N}$ группа G обладает бесконечной цепочкой $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \dots$ подгрупп такой, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ $N \subset G_k$ и в разности $G_k \setminus G_{k+1}$ найдется p-элемент g_k, для которого элемент $g_k N$ фактор-группы G/N имеет порядок m. Ввиду леммы О. Ю. Шмидта подгруппа $N\langle g_k \rangle$ локально конечна. Поэтому в силу следствия 23 и утверждений 1 и 2 предложения 3 все ее p-подгруппы черниковские, g_k содержится в некоторой ее идеальной силовской p-подгруппе P_k и $P_k \cap N \simeq P_i \cap N$ для произвольного $i \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, $|P_k : J(P_k)| = |P_i : J(P_i)|$ и $J(P_k) \simeq J(P_i)$. Поэтому ввиду утверждения 3 из предложения 2 для некоторого $c = \mathrm{const} \in \mathbb{N}$ в каждой P_k найдется подгруппа D_k порядка $\leq c$ такая, что $P_k = D_k J(P_k)$. Возьмем в каждой D_k элемент h_k, для которого $h_k J(P_k) = g_k J(P_k)$. Тогда h_k — p-элемент порядка $\leq c$, принадлежащий к $G_k \setminus G_{k+1}$ и, следовательно, G не удовлетворяет условию l_π-min. Полученное противоречие доказывает предложение 2.

В связи с предложением 2 поставим следующий

Вопрос 6. Всегда ли фактор-группа группы G с условием l_π-min по ее периодическому нормальному делителю удовлетворяет условию l_π-min?

Напомним, что силовская p-подгруппа P локально конечной группы G называется *проекционной*, если G обладает локальной системой $\mathscr{M}$ конечных подгрупп такой, что $P \cap M$ — силовская p-подгруппа группы M для любой $M \in \mathscr{M}$ (см., например, [14]). Если P является проекционной, то произвольная конечная p-подгруппа группы G сопряжена в ней с подгруппой группы P; в случае, когда G не более чем счетна, произвольная ее конечная p-подгруппа содержится в некоторой ее проекционной силовской p-подгруппе [14].

Лемма 5. *Проекционная силовская p-подгруппа P локально конечной группы G, удовлетворяющей условию* min-p, *является ее идеальной силовской p-подгруппой.*

Доказательство. Как отмечалось выше, P содержит сопряженную с любой конечной p-подгруппой группы G, а потому настоящая лемма справедлива ввиду утверждения 1 предложения 3.

Определение 6. Подгруппу произвольной группы G, входящую в какую-нибудь ее нормальную систему, будем называть *системной*.

Напомним, что в случае, когда G локально конечна, произвольная ее подгруппа H является системной тогда и только тогда, когда для любой конечной ее подгруппы $K \subseteq G$ подгруппа $K \cap H$ субнормальна в K [15].

Предложение 4. *Пусть G — локально конечная группа с условием* min-p, *H — ее системная подгруппа и K — некоторая конечная подгруппа группы G. Тогда G обладает идеальной силовской p-подгруппой P, содержащей K, для которой $P \cap H$ является идеальной силовской p-подгруппой группы H.*

Доказательство. Ввиду утверждения 1 из предложения 3 и следствия 23 группы G и H обладают некоторыми идеальными силовскими p-подгруппами $S \supseteq K$ и T, и подгруппы S, T черниковские. Так как S, T не более чем счетны, подгруппа $\langle S, T \rangle$ также не более чем счетна. Следовательно, как отмечалось выше, она обладает некоторой проекционной силовской p-подгруппой $Q \supseteq K$. Пересечение $Q \cap H$ является проекционной силовской p-подгруппой системной подгруппы $\langle S, T\rangle \cap H$ группы $\langle S, T\rangle$ [16, с. 97]. Ввиду леммы 5 Q и $Q \cap H$ — идеальные силовские p-подгруппы соответственно групп $\langle S, T\rangle$ и $\langle S, T\rangle \cap H$. Тогда поскольку S, T — идеальные силовские p-подгруппы соответственно групп G, H, вследствие утверждения 1 предложения 3 подгруппы Q и $Q \cap H$ являются идеальными силовскими p-подгруппами групп G и H.

Ниже для произвольной группы G через $r(G)$, как обычно, будем обозначать ее специальный ранг. Ввиду утверждения 1 из предложения 3 корректно следующее

Определение 7 [13, с. 92]. Пусть G — локально конечная группа с условием min-p и P — ее идеальная силовская p-подгруппа. Упорядоченная пара $(r(J(P)), |P : J(P)|)$ называется *p-размером группы* G и обозначается через $\lceil G \rceil_p$.

Для любых двух локально конечных групп G и G^* с условием min-p либо $\lceil G \rceil_p \leq \lceil G^* \rceil_p$, либо $\lceil G^* \rceil_p < \lceil G \rceil_p$ в смысле лексикографической упорядоченности пар натуральных чисел. Вследствие утверждения 1 из предложения 3 для произвольной секции H такой группы $\lceil H \rceil_p \leq \lceil G \rceil_p$, и если $\lceil H \rceil_p = \lceil G \rceil_p$, то идеальные силовские p-подгруппы групп G и H изоморфны.

Предложение 5. *Пусть H — системная подгруппа локально конечной группы G, удовлетворяющей условию* min-p. *Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *H содержит некоторую идеальную силовскую p-подгруппу группы G;*
2) $\lceil G \rceil_p = \lceil H \rceil_p$;
3) *H содержит все p-элементы группы G.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 равносильны, и утверждение 3 влечет утверждение 2. Пусть справедливо утверждение 2; K — произвольная конечная p-подгруппа группы G и P такая же, как в предложении 4. Тогда $P \simeq P \cap H$ и, значит, поскольку P черниковская, $P = P \cap H$. Следовательно, $K \subseteq H$, и ввиду произвольности K справедливо утверждение 3. Предложение доказано.

Из предложения 5 и леммы 1 непосредственно вытекает такое

Следствие 24. *В случае, когда в предложении 5 G имеет проекционную силовскую p-подгруппу (в частности, в случае, когда G не более чем счетна), каждое из его утверждений равносильно следующему:*

4) *H содержит некоторую проекционную силовскую p-подгруппу группы G.*

Лемма 6. *Пусть G — локально конечная группа с условием* min-p, *обладающая идеальными силовскими p-подгруппами, одна из которых P; $N \trianglelefteq G$. Тогда и только тогда $\lceil G \rceil_p = \lceil G/N \rceil_p$, когда $P \cap N = J(P) \cap N$ и пересечение $P \cap N$ конечно.*

Доказательство. Ввиду утверждения 2 из предложения 3 PN/N является идеальной силовской p-подгруппой группы G/N, а размеры групп P и PN/N, очевидно, совпадают в том и только том случае, когда $P \cap N = J(P) \cap N$ и $|P \cap N| < \infty$.

Предложение 6. *Пусть G — группа с условием l_π-min, L_ι, $\iota \in I$, — некоторые ее подгруппы; $H = \bigcap\limits_{\iota \in I} N_G(L_\iota)$ и M — конечное множество π-элементов из H. Тогда найдется конечное множество $\Lambda \subseteq I$ такое, что*

1) $\big[\langle M^H\rangle, \bigcap\limits_{\iota\in\Lambda} L_\iota\big] \subseteq \bigcap\limits_{\iota\in I} L_\iota$;

2) *в случае, когда группа G удовлетворяет условию π-min, разность* $\bigcap\limits_{\iota\in\Lambda} L_\iota \setminus \bigcap\limits_{\iota\in I} L_\iota$ *не содержит π-элементов.*

Доказательство. Пусть сначала $M = \{g\}$ и g — p-элемент для некоторого $p \in \pi$. Можно считать, что $g \neq 1$. Пусть также G_1 — какая-нибудь из подгрупп L_ι с минимальным $|\langle g\rangle \cap L_\iota|$. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ уже определена подгруппа G_k. Если найдется подгруппа L_ι, для которой разность $\langle g\rangle G_k \setminus \langle g\rangle(G_k \cap L_\iota)$ обладает элементом порядка $|g|$, то положим $G_{k+1} = G_k \cap L_\iota$. Так как G удовлетворяет l_p-min, то на некотором n-м шаге получим подгруппу G_n такую, что для любой L_ι разность $\langle g\rangle G_n \setminus \langle g\rangle(G_n \cap L_\iota)$ не содержит элементов порядка $|g|$. Тогда $G_n = \bigcap\limits_{\iota\in\Delta} L_\iota$ для некоторого конечного $\Delta \subseteq I$. Возьмем произвольные $\iota \in I$, $a \in G_n$ и $h \in H$. Поскольку разность $\langle g\rangle G_n \setminus \langle g\rangle(G_n \cap L_\iota)$ не содержит элементов порядка $|g|$, то $g^a \in \langle g\rangle(G_n \cap L_\iota)$. Следовательно, поскольку $g \in N_G(G_n)$, то $[g, a] \in G_n \cap \langle g\rangle(G_n \cap L_\iota)$. Но, очевидно, $G_n \cap \langle g\rangle(G_n \cap L_\iota) = (G_n \cap \langle g\rangle)(G_n \cap L_\iota)$ и $G_n \cap \langle g\rangle \subseteq G_n \cap L_\iota$. Тем самым $[g, a] \in G_n \cap L_\iota$. Ввиду произвольности $a \in G_n$ имеем $[g, a^{h^{-1}}] \in G_n \cap L_\iota$. Значит,

$$[g^h, a] = [g, a^{h^{-1}}]^h \in (G_n \cap L_\iota)^h = G_n \cap L_\iota.$$

Поэтому в силу произвольности ι и a

$$[g^h, G_n] \subseteq \bigcap_{\iota\in I}(G_n \cap L_\iota) = \bigcap_{\iota\in I} L_\iota$$

и с учетом произвольности $h \in H$, очевидно, $[\langle g^H\rangle, G_n] \subseteq \bigcap\limits_{\iota\in I} L_\iota$. Пусть G с условием π-min и при некотором $k > n$ уже определена подгруппа G_{k-1}. Если найдется подгруппа L_ι, для которой $G_{k-1} \setminus L_\iota$ обладает π-элементом, то положим $G_k = G_{k-1} \backslash L_i$. На некотором m-м шаге получим подгруппу G_m такую, что $G_m \setminus \bigcap\limits_{\iota\in I} L_\iota$ не содержит π-элементов. Тогда $G_m = \bigcap\limits_{\iota\in I} L_\iota$ для некоторого конечного $\Gamma \subseteq I$ (и $\Gamma \supseteq \Delta$).

Рассмотрим теперь случай произвольного конечного M. В силу доказанного для произвольного элемента g, содержащегося в подгруппе, порожденной одним из элементов множества M, найдется соответствующее $\Gamma = \Gamma(g) \subseteq I$. Пусть Λ — объединение множеств Γ по всем таким g. Очевидно, Λ требуемое. Предложение доказано.

Замечание 3. Если в предложении 6 $L_\iota \trianglelefteq G$, $\iota \in I$, то в качестве M можно взять произвольное конечное множество π-элементов группы G.

Следствие 25. *Пусть π и G — некоторые множество простых чисел и группа с условием l_π-min; $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_\alpha \supset G_{\alpha+1} \supset \dots \supset G_\gamma = \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} G_\alpha$ — некоторая убывающая цепочка подгрупп группы G, $H = \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} N_G(G_\alpha)$ и M — конечное множество π-элементов из H. Тогда найдется $\beta > \gamma$ такое, что $[\langle M^H\rangle, G_\beta] \subseteq G_\gamma$, и в случае, когда G удовлетворяет условию π-min, $G_\beta \setminus G_\gamma$ не содержит π-элементов.*

Следствие 25 непосредственно вытекает из предложения 6.

Замечание 4. Если в следствии 25 $G_\alpha \trianglelefteq G$, $\alpha < \gamma$, то в качестве M можно взять произвольное конечное множество π-элементов группы G.

Предложение 7. *Пусть группа G с условием l_π-min является нормальным замыканием некоторого своего конечного множества M π-элементов, т. е. $G = \langle M^G \rangle$. Тогда квазиполная часть $\mathfrak{Q}(G)$ группы G имеет в ней конечный индекс.*

Доказательство. Пусть L_ι, $\iota \in I$, — все инвариантные подгруппы конечного индекса группы G и множество Λ такое, как в предложении 6; φ — гомоморфизм группы G на $H = G/J(G)$ и $K = M^\varphi$. Тогда $\bigl|H : \bigcap\limits_{\iota\in\Lambda} L_\iota^\varphi\bigr| < \infty$ и ввиду предложения 6 $\bigl[K^H, \bigcap\limits_{\iota\in\Lambda} L_\iota^\varphi\bigr] = 1$. Следовательно, K^H — конечное инвариантное множество элементов группы H и, значит, в силу леммы Дицмана (см., например, [9]) группа $\langle K^H \rangle = H$ конечна. Так как $|G : J(G)| < \infty$, то, очевидно, подгруппа $J(G)$ является квазиполной. Предложение доказано.

Следствие 26. *Если группа G с условием l_π-min является нормальным замыканием некоторого конечного множества π-элементов (в частности, порождается некоторым конечным множеством π-элементов) и при этом каждая ее отличная от единицы подгруппа конечного индекса имеет истинную подгруппу конечного индекса, то она конечна.*

Следствие 26 непосредственно вытекает из предложения 7.

Ниже для произвольного множества M элементов группы G через $\pi(M)$, как обычно, обозначается множество всех простых делителей порядков элементов из M.

Предложение 8. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа с условием l_π-min, $\pi \neq \varnothing$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *при произвольном конечном $\sigma \subseteq \pi$ все σ-элементы группы G порождают конечную подгруппу;*

2) *произвольное конечное множество π-элементов группы G содержится в ее конечной характеристикой подгруппе;*

3) *если группа G удовлетворяет условию π-min, то все ее π-элементы порождают конечную подгруппу.*

Доказательство. Пусть M — произвольное конечное множество элементов G. Так как пересечение всех $N \trianglelefteq G$ с $|G : N| < \infty$ равно единице, то ввиду предложения 6 среди них найдется L такой, что $C_G(M) \supseteq L$, и в случае условия π-min все π-элементы группы G, не равные единице, принадлежат $G \setminus L$. Поэтому $|G : C_G(M)| < \infty$ и, значит, ввиду леммы Дицмана $|\langle M^G \rangle| < \infty$. Тогда в силу произвольности M подгруппа $H = \langle g \in G \mid |g| < \infty, \pi(|g|) \subseteq \pi \rangle$ группы G локально конечна. Так как H финитно аппроксимируема и локально конечна, то ввиду следствия 23 для каждого $p \in \pi$ все p-подгруппы G конечны. Пусть S — силовская σ-подгруппа G. Тогда, очевидно, $|\langle S^G \rangle| < \infty$. Понятно, что $\langle S^G \rangle$ содержит все σ-элементы G. Утверждение 1 доказано. Поскольку $|\pi(M)| < \infty$, то при $\sigma = \pi(M)$ все σ-элементы G порождают конечную подгруппу. Она характеристична в G и содержит M. Утверждение 2 доказано. В случае условия π-min $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(|G : L|)$ и, значит, $|\pi \cap \pi(G)| < \infty$. Поэтому утверждение 3 справедливо ввиду утверждения 1. Предложение 8 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Половицкий Я. Д.* О группах с условием π-минимальности для подгрупп // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 582–590.
2. *Половицкий Я. Д.* Слойно экстремальные группы // Мат. сб. 1962. Т. 56, № 1. С. 95–106.

3. *Chernikov N. S.* Locally finite groups with π-minimal condition // Материалы Междунар. конф., посвященной памяти акад. С. А. Чунихина. I. Алгебра и теория чисел: Тез. докл. Гомель, 1995. P. 137–138.

4. *Черников Н. С.* Группы с условием π-минимальности // Докл. АН СССР. 1998. Т. 338, № 2. С. 169–170.

5. *Черников Н. С.* Бесконечные локально конечные группы $PSL_2(F)$, удовлетворяющие условию π-минимальности // Вопросы алгебры. Гомель: Гомельск. гос. ун-т, 1999. Т. 15. С. 47–59.

6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.

7. *Черников С. Н.* Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 5. С. 45–96.

8. *Половицкий Я. Д.* Группы с условием слойной минимальности // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 6. С. 847–850.

9. *Курош А. Г.* Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, 1967.

10. *Павлюк И. И., Шафиро А. А., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 325–336.

11. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

12. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. Киев: Наук. думка, 1987.

13. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. Amsterdam; London: North Holland. Publ. Co., 1973.

14. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 5. С. 575–611.

15. *Hartley B.* Serial subgroups of locally finite groups // Proc. Camb. Phil. Soc. 1972. V. 71. P. 199–201.

16. *Черников Н. С.* Обобщенно разрешимые и обобщенно π-разрешимые факторизуемые группы // Вопросы алгебры. Гомель: Гомельск. гос. ун-т, 1996. Т. 10. С. 91–122.

Статья поступила 22 марта 1999 г.

Черников Николай Сергеевич
Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, Киев 01601, Украина
Chern@Imath.Kiev.ua