Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 514

ОЦЕНКА ДЛИНЫ ПРОСТОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Вайгант, О. Ю. Матукевич

Аннотация: И. М. Либерманом (см. *Либерман И. М.* Геодезические линии на выпуклых поверхностях // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 2. С. 310–312) получен результат о том, что для C^2-гладкой замкнутой поверхности M положительной гауссовой кривизны существует такое число l, что любая дуга геодезической на M длины не меньше l не является простой. В данной работе установлено нижнее значение величины l. Доказано, что если M — гладкая класса C^2 замкнутая выпуклая двумерная поверхность с гауссовой кривизной $K \geq \kappa > 0$, то каждая дуга геодезической длины не меньше $\frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}$ не является простой. Приводится пример, показывающий, что данная оценка не может быть улучшена. Ил. 13, библиогр. 5.

Введение

В работе [1] И. М. Либерманом получен результат о том, что для C^2-гладкой замкнутой поверхности M положительной гауссовой кривизны существует такое число l, что любая дуга геодезической на M длины не меньше l не является простой. В данной работе установлено нижнее значение величины l. Доказано, что если M — гладкая класса C^2 замкнутая выпуклая двумерная поверхность с гауссовой кривизной $K \geq \kappa > 0$, то каждая дуга геодезической длины не меньше $\frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}$ не является простой. Приводится пример, показывающий, что данная оценка не может быть улучшена.

Пусть M — выпуклая замкнутая поверхность положительной гауссовой кривизны.

Определение 1. Кривая $\gamma : [a,b] \to M$ называется *простой*, если $\gamma(\tau_1) \neq \gamma(\tau_2)$ для любых различных τ_1, $\tau_2 \in [a,b]$.

Теорема 1. *Пусть M — полное односвязное риманово многообразие размерности 2 гауссовой кривизны $K \geq \kappa > 0$. Тогда каждый отрезок произвольной геодезической длины не менее $\frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}$ не является простым.*

Авторы выражают признательность рецензенту за конструктивные замечания, которые позволили значительно улучшить изложение результатов.

Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы 1 необходимы следующие определения и теорема, доказанная В. А. Топоноговым [2].

Определение 2. Область $G \subset M$ называется *геодезически выпуклой*, если кратчайшие линии области G являются геодезическими поверхности M.

Определение 3. Замкнутая кривая γ называется *выпуклой*, если она является границей некоторой геодезически выпуклой области.

Для того чтобы область G на M, ограниченная кривой γ, была геодезически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы каждая дуга кривой γ имела со стороны области G неотрицательный поворот.

Теорема 2. *Пусть M — выпуклая замкнутая двумерная поверхность, гауссова кривизна которой ограничена снизу числом κ, и γ — замкнутая выпуклая кривая на M такая, что $\kappa + g_y^2 > 0$, где g_y — геодезическая кривизна кривой γ. Тогда длина кривой γ не превосходит $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa+g_y^2}}$.*

Непосредственно из этой теоремы вытекает

Следствие. *Пусть M — замкнутая выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с гауссовой кривизной $K \geq \kappa > 0$. Тогда длина любой замкнутой выпуклой простой кривой не превосходит $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$.*

Введем понятие точки самопересечения для геодезической.

Определение 4. Пусть $\gamma : [\alpha, \beta) \to M$ — геодезическая с началом $p = \gamma(\alpha)$, где α — конечное число, $\alpha < \beta$, причем β может быть равным $+\infty$. Точка $m = \gamma(t_0)$, где $\alpha \leq t_0 < \beta$, называется *первой точкой самопересечения по возрастанию параметра* или *точкой самопересечения геодезической* γ, если

1) существует число $h > 0$ такое, что $\gamma(t_0) = \gamma(t_0 + h)$;

2) $\gamma(\tau_1) \neq \gamma(\tau_2)$ для любых различных τ_1, $\tau_2 \in [\alpha, t_0 + h)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть M — полное риманово многообразие размерности* 2 *гауссовой кривизны $K \geq \kappa > 0$; p и q — различные точки, принадлежащие M; $c_1 : [0,1] \to M$ — простая геодезическая, для которой $p = c_1(0)$ и $q = c_1(1)$, причем $L(c_1) > \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Тогда существует простая геодезическая $c_2 : [0,1] \to M$, для которой $p = c_2(0)$ и $q = c_2(1)$, при этом пересечение геодезических $c_1(t)$ и $c_2(t)$ состоит только из двух точек p и q.*

Доказательство. Пусть $c_1 : [0,1] \to M$ — простая геодезическая, удовлетворяющая условиям леммы. Рассмотрим непустое множество T_{pq} кусочно-гладких путей $\gamma : [0,1] \to M$ между точками $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$, не имеющих общих точек пересечения с геодезической c_1, кроме точек p и q. Обозначим через T^*_{pq} замыкание множества T_{pq} в компактно-открытой топологии, через v — инфимум длин кривых из T^*_{pq}. Точки p и q различные, и в силу теоремы сравнения Морса — Шенберга [3] c_1 содержит точку, сопряженную с p. Из доказательства леммы 1 [3, с. 162] следует, что существует ломаная вариация геодезической c_1, сдвигающая ее по одну сторону (вправо) от геодезической c_1 и уменьшающая ее длину. Следовательно, инфимум v строго меньше $L(c_1)$.

Пусть $\gamma \in T^*_{pq}$ — спрямляемая кривая, на которой этот инфимум достигается. Она состоит из дуг геодезических, содержащихся в открытом множестве $M \setminus \overline{c_1}$ или в $\overline{c_1}$. Так как радиус инъективности M больше нуля, то дуг, содержащихся в $M \setminus \overline{c_1}$, будет конечное число. Следовательно, γ состоит из конечного числа дуг геодезических, которые лежат либо в $M \setminus \overline{c_1}$, либо в c_1.

Предположим, что имеется внутренняя точка $k \in \gamma \cap c_1$, т. е. k служит концевой точкой двух дуг геодезических кривой γ, лежащих по одну сторону от c_1. По крайней мере одна из этих дуг не лежит на c_1. Рассмотрим в точке k угол, образованный этими дугами геодезических. Он будет строго меньше

π, и, «срезав» этот угол, можно уменьшить длину кривой γ. Следовательно, кривая γ таких точек не имеет, и либо она совпадает с c_1, либо пересечение γ и c_1 состоит из двух точек p и q. Так как длина γ строго меньше длины c_1, то совпадать они не могут. Таким образом, в качестве $c_2 : [0,1] \to M$ можно взять кривую γ. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть M — полное односвязное риманово многообразие размерности 2 гауссовой кривизны $K \geq \kappa > 0$. Тогда каждая геодезическая длины не меньше $\frac{4\pi}{\sqrt{\kappa}}$ не является простой.*

Доказательство. Предположим, что существует простая геодезическая $a : [0,1] \to M$ с началом $a(0) = p$ и концом $a(1) = q$ длины не меньше $\frac{4\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Тогда по лемме 1 существует простая геодезическая $b : [0,1] \to M$, $b(0) = p$, $b(1) = q$, такая, что пересечение b и a состоит только из двух точек p и q. Простая замкнутая кривая ab разбивает M на две односвязные области G_0 и G_0^1. Пусть A_p, A_q — углы соответственно в точках p и q со стороны области G_0. Заметим, что углы A_p и A_q не могут одновременно быть больше либо равными π или меньше либо равными π, так как в противном случае простая замкнутая кривая ab была бы выпуклой и тогда по теореме 2 получили бы $L(a)+L(b) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, что противоречит условию $L(a) \geq \frac{4\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Будем считать, что $A_p > \pi$, $A_q < \pi$ (если это не так, то рассмотрим область G_0^1). Возьмем точку $t_0 \in [0,1]$ такую, что $L(a|_{[0,t_0]}) = L(a|_{[t_0,1]}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. В дальнейшем будем считать $t_0 = \frac{1}{2}$ и положим $a(t_0) = a(\frac{1}{2}) = r$. Тогда по лемме 1 существует простая геодезическая $c : [0,1] \to M$, $c(0) = p$, $c(1) = r$, причем

$$\{c(t)\}_{t\in[0,1]} \cap \{a|_{[0,\frac{1}{2}]}(t)\}_{t\in[0,1]} = \{p\} \cup \{r\}. \tag{1}$$

Покажем, что имеет место следующее утверждение:

$$\{c(t)\}_{t\in[0,1]} \cap \{a|_{[\frac{1}{2},1]}(t)\}_{t\in[\frac{1}{2},1]} = \{r\}.$$

Предположим, что это утверждение не верно (рис. 1). Тогда существуют точки $\xi_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$ и $\eta_0 \in [0,1)$ такие, что

$$c|_{[0,\eta_0]}(\eta_0) = a|_{[\frac{1}{2},\xi_0]}(\xi_0) = p_1,$$

причем

$$\{c|_{[0,\eta_0]}(t)\}_{t\in[0,\eta_0]} \cap \{a|_{[\frac{1}{2},\xi_0]}(t)\}_{t\in[\frac{1}{2},\xi_0]} = \{p_i\}. \tag{2}$$

К тому же так как $c(1) = r = a(\frac{1}{2})$, существуют точки $\xi_1 \in [\frac{1}{2}, \xi_0)$ и $\eta_1 \in (\eta_0, 1]$ такие, что $c|_{[\eta_0,\eta_1]}(\eta_1) = a|_{[\xi_1,\xi_0]}(\xi_1) = p_2$, причем

$$\{c|_{[\eta_0,\eta_1]}(t)\}_{t\in[\eta_0,\eta_1]} \cap \{a|_{[\xi_1,\xi_0]}(t)\}_{t\in[\xi_1,\xi_0]} = \{p_1\} \cap \{p_2\}. \tag{3}$$

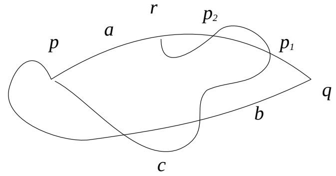

Рис. 1.

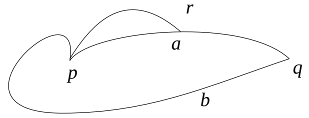

Рис. 2.

В силу (1)–(3) замкнутые кривые $c|_{[0,\eta_0]}(t)a|_{[0,\xi_0]}(t)$, $c|_{[0,\eta_1]}(t)a|_{[0,\xi_1]}(t)$ являются простыми. Поэтому независимо от того, какой угол рассматривать между геодезическими a и c, имеем, что одна из замкнутых простых кривых $c|_{[0,\eta_0]}(t)a|_{[0,\xi_0]}(t)$, $c|_{[0,\eta_1]}(t)a|_{[0,\xi_1]}(t)$ выпуклая. Следовательно, по теореме 2 периметр одной из них не более $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Так как каждая из этих кривых содержит отрезок $c|_{[0,\frac{1}{2}]}$, длина которого не менее $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, длина каждой кривой будет больше $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$; противоречие.

Таким образом, утверждение доказано. Тогда из построения геодезических b и c в лемме 1 имеем

$$\{c(t)\}_{t\in[0,1]} \cap \{b(t)\}_{t\in[0,1]} = \{p\}.$$

Далее, нетрудно заметить, что верно следующее утверждение:

$$\{c(t)\}_{t\in[0,1]} \setminus (\{p\} \cup \{r\}) \in G_0.$$

Предположим, что это не верно. Тогда получаем, что $\{c(t)\}_{t\in[0,1]} \setminus (\{p\} \cup \{r\}) \in G_0^1$ (рис. $2, 3$). Из односвязности M и соотношения (2) следует, что замкнутая кривая $c(t)a|_{[0,\frac{1}{2}]}(t)$ разбивает M на две односвязные области. Обозначим через G_1 область, ограниченную замкнутой простой кривой $c(t)a|_{[0,\frac{1}{2}]}(t)$ и принадлежащую области G_0^1. Так как углы в точках p и r со стороны области G_1 не больше π, по теореме 2 получим $L(c) + L(a|_{[0,\frac{1}{2}]}) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Поскольку $L(c) > 0$ и $L(a|_{[0,\frac{1}{2}]}) \ge \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, приходим к противоречию. Следовательно, утверждение верно.

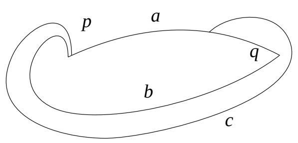

Рис. 3.

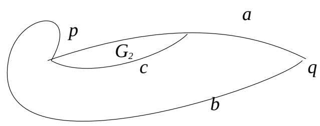

Рис. 4.

Область G_0 односвязна и кривые $c(t)a|_{[0,\frac{1}{2}]}(t)$, $c(t)a|_{[\frac{1}{2},1]}(t)b(t)$ являются замкнутыми и простыми, тем самым область G_0 разбивается геодезической c на две односвязные области (рис. 4). Обозначим через G_2 область, ограниченную замкнутой простой кривой $c(t)a|_{[0,\frac{1}{2}]}(t)$ и содержащуюся в области G_0. Тогда так как $A_p < 2\pi$, то либо угол A_p^1 в точке p со стороны области G_2 меньше π, либо угол A_p^{11} в точке p со стороны области $G_0 \setminus (G_2 \cup (\{c(t)\}_{t\in[0,1]} \setminus (\{p\} \cup \{r\})))$ меньше π. Если $A_p^1 < \pi$, то как и при доказательстве последнего утверждения, можно показать, что этот случай невозможен. Если $A_p^{11} < \pi$, то замкнутая простая кривая $c(t)a|_{[\frac{1}{2},1]}(t)b(t)$ будет выпуклой, так как углы в точках p и q со стороны области $G_0 \setminus (G_2 \cup (\{c(t)\}_{t\in[0,1]} \setminus (\{p\} \cup \{r\})))$ не больше π. По теореме 2 получаем $L(c) + L(a|_{[\frac{1}{2},1]}) + L(b) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Принимая во внимание, что $L(a) + L(b) \ge \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, получаем противоречие. Следовательно, предположение не верно, и тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы проведем от противного. Так как M удовлетворяет условию теоремы Хопфа — Ринова [3], все геодезические на M неограниченно и единственно продолжаемы на всю вещественную прямую. Предположим, что существует геодезическая $c : R \to M$, на которой для некоторого простого отрезка $c|_{[\alpha,\beta]}$, где $\alpha < \beta$ и $p = c(\alpha)$, $q = c(\beta)$, выполняется условие $L(c|_{[\alpha,\beta]}) \geq \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}$. По лемме 2 для геодезической $c|_{[\alpha,+\infty]}$ существует точка самопересечения. Обозначим ее через q^*. Можно считать, что $q^* \in \{c|_{[\alpha,\beta]}\}_{t\in[\alpha,\beta]} \setminus \{q\}$. В самом деле, пусть $q^* = c(t_0) \in \{c|_{[\beta,+\infty)}(t)\}_{t\in[\beta.+\infty]}$, т. е. $t_0 \in [\beta,+\infty]$. По определению точки самопересечения $q^* = c(t_0)$

1) существует число $h > 0$ такое, что $c|_{[\beta,+\infty]}(t_0) = c|_{[\beta,+\infty]}(t_0 + h)$,

2) $c|_{[\beta,+\infty]}(\tau_1) \neq c|_{[\beta,+\infty]}(\tau_2)$ для любых различных $\tau_1, \tau_2 \in [\beta, t_0 + h)$.

Пусть $\tau^* \in (t_0, t_0+h)$. Рассмотрим отрезок $c|_{[\alpha,\tau^*]}$ геодезической $c : R \to M$. Очевидно, отрезок $c|_{[\alpha,\tau^*]}$ имеет следующие свойства:

1) отрезок $c|_{[\alpha,\tau^*]}$ простой;

2) $L(c|_{[\alpha,\tau^*]}) = L(c|_{[\alpha,\beta]}) + L(c|_{[\beta,\tau^*]}) > \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}$;

3) $q^* \in \{c|_{[\alpha,\tau^*]}(t)\}_{t\in[\alpha,\tau^*]} \setminus \{c(\tau^*)\}$.

Таким образом, приходим к первоначальной задаче, в которой условие на длину заменили более слабым, причем имеет место свойство 3. Поэтому если предположить, что точки самопересечения q^* принадлежат множеству $\{c|_{[\alpha,\beta]}\}_{t\in[\alpha,\beta]} \setminus \{q\}$, то задача (с ослабленным условием на длину) представляет собой частный случай.

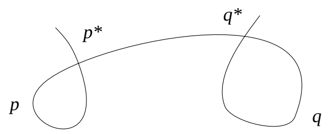

Рис. 5.

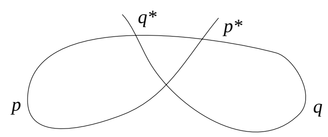

Рис. 6.

Рассматривая вместо геодезической $c|_{(-\infty,\beta]} : (-\infty,\beta] \to M$ геодезическую $(c|_{(-\infty,\beta]})^- : [-\beta,+\infty) \to M$, можно получить следующее определение точки самопересечения геодезической $c|_{(-\infty,\beta]} : (-\infty,\beta] \to M$ (т. е. точки самопересечения по убыванию параметра).

Точка $m_1 = c|_{(-\infty,\beta]}(t_1)$ называется *точкой самопересечения геодезической* $c|_{(-\infty,\beta]} : (-\infty,\beta] \to M$, если

1) существует число h_1 такое, что $c|_{(-\infty,\beta]}(t_1) = c|_{(-\infty,\beta]}(t_1 - h_1)$;

2) $c|_{(-\infty,\beta]}(\tau_1^1) \neq c|_{(-\infty,\beta]}(\tau_2^1)$ для любых различных $\tau_1, \tau_2 \in (t_1 - h_1, \beta)$.

Зафиксируем $p^* = c|_{(-\infty,\beta]}(t_p^*)$ и $q^* = c|_{[\alpha,+\infty)}(t_q^*)$ — точки самопересечения соответствующих геодезических и соответствующие им величины h_p^* и h_q^*. Аналогично тому, как было показано, что $q^* \in \{c|_{[\alpha,\beta]}(t)\}_{t\in[\alpha,\beta]} \setminus \{q\}$, показывается, что $p^* \in \{c|_{[\alpha,\beta]}(t)\}_{t\in[\alpha,\beta]} \setminus \{p\}$ (рис. 5).

Докажем, что

$$(\{c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(t)\}_{t\in[t_p^*-h_p^*,\alpha]} \setminus \{p^*\}) \cap (\{c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}(t)\}_{t\in[\beta,t_q^*+h_q^*]} \setminus \{q^*\}) = \varnothing. \tag{4}$$

Пусть (4) не верно. Тогда существуют $t_1 \in \left(t_p^* - h_p^*, \alpha\right]$ и $t_2 \in \left[\beta, t_q^* + h_q^*\right)$ (рис. 6) такие, что

$$c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(t_1) = c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}(t_2),$$

причем для любых $\tau_1 \in (t_1, \alpha]$, $\tau_2 \in [\beta, t_2)$

$$c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(\tau_1) \neq c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}(\tau_2).$$

Тогда $c|_{[t_1,t_2]}$ является простой замкнутой выпуклой кривой (так как $c|_{[t_1,t_2]}$ — цикл), которая по теореме 2 имеет длину не больше $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Так как $L(c|_{[\alpha,\beta]}) \geq \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}$, получаем противоречие. Следовательно, (4) справедливо.

Соединим точки p и q простой геодезической $c^* : [0,1] \to M$ с началом $p = c^*(0)$ и концом $q = c^*(1)$, удовлетворяющей условию

$$\{c^*(t)\}_{t\in[0,1]} \cap \{c|_{[\alpha,\beta]}(t)\}_{t\in[\alpha,\beta]} = \{p\} \cup \{q\}, \tag{5}$$

существование которой утверждает лемма 1. Обозначим через G одну из односвязных областей, которые получены разбиением M простой замкнутой кривой $c^*(t)c|_{[\alpha,\beta]}(t)$.

Обозначим через A и B соответственно углы в точках p и q со стороны области G, и пусть $\overline{G} = G \cup \{c^*(t)\}_{t\in[0,1]} \cup \{c|_{[\alpha,\beta]}(t)\}_{t\in[\alpha,\beta]}$. Заметим, что углы A и B не могут быть одновременно больше либо равными π или меньше либо равными π, так как в противном случае простая замкнутая кривая $c^*(t)c|_{[\alpha,\beta]}(t)$ была бы выпуклой и тогда по теореме 2 получили бы

$$L(c^*) + L(c|_{[\alpha,\beta]}) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

что противоречит соотношению

$$L(c|_{[\alpha,\beta]}) \geq \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Таким образом, возможны два случая: 1) $A > \pi$, $B < \pi$; 2) $A < \pi$, $B > \pi$.

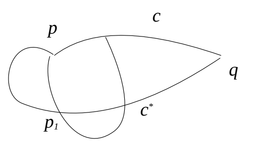

Рис. 7.

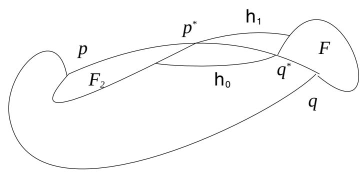

Рис. 8.

Можно считать, что имеет место случай 1, иначе можно рассматривать область $M \setminus \overline{G}$. Покажем, что

$$\{c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(t)\}_{t\in[t_p^*-h_p^*,\alpha]} \in \overline{G}. \tag{6}$$

Предположим, что (6) не верно. Тогда, учитывая, что $A > \pi$, имеем существуют $t_1 \in (t_p^*-h_p^*,\alpha]$ и $t_2 \in (0,1]$ (рис. 7) такие, что $c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(t_1) = c^*(t_2) = p_1$, причем для любых $\tau_1 \in (t_1,\alpha]$, $\tau_2 \in (t_2,1]$

$$c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(\tau_1) \neq c^*(\tau_2). \tag{7}$$

Поэтому $\{c|_{[t_1,\alpha]}(t)\}_{t\in[t_1,\alpha]} \in \overline{G}$. Замкнутая кривая $c|_{[t_1,\beta]}(t)c^*|_{[t_2,1]}(t)$ в силу (5) и (7) является простой. Обозначим через G_1 область, ограниченную простой замкнутой кривой $c|_{[t_1,\beta]}(t)c^*|_{[t_2,1]}(t)$ и лежащую в G. Тогда так как угол в точке q со стороны области G_1 равен B, который по условию меньше π, и угол в точке p_1 со стороны области G_1 также меньше π (как угол между геодезическими, исходящими из одной точки), то кривая $c|_{[t_1,\beta]}(t)c^*|_{[t_2,1]}(t)$ является выпуклой. По теореме 2 получаем $L(c|_{[t_1,\beta]}) + L(c^*|_{[t_2,1]}(t)) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, что противоречит неравенству $L(c|_{[\alpha,\beta]}) \ge \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Таким образом (6) доказано. Аналогично показывается, что

$$\{c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}(t)\}_{t\in[\beta,t_q^*+h_q^*]} \setminus (\{q\}\cup\{q^*\}) \in M\setminus\overline{G}. \tag{8}$$

Так как точка самопересечения q^* принадлежит $\{c|_{[\alpha,\beta]}(t)\}_{t\in[\alpha,\beta]}\setminus\{q\}$, то возможны следующие два случая:

1) $q^* \in \{c|_{[t_p^*,\beta]}(t)\}_{t\in[t_p^*,\beta]}\setminus\{q\}$,

2) $q^* \in \{c|_{[\alpha,t_p^*]}(t)\}_{t\in[\alpha,t_p^*]}\setminus\{p^*\}$.

Рассмотрим сначала случай 1 (рис. 8, 9). Пусть F — область, ограниченная циклом $c|_{[t_q^*,t_q^*+h_q^*]}$ и принадлежащая $M\setminus\overline{G}$, $\overline{F} = F\cup\{c|_{[t_q^*,t_q^*+h_q^*]}(t)\}_{t\in[t_q^*,t_q^*+h_q^*]}$ и A_F — угол в точке q^* со стороны области F. Так как M односвязно, то F и $M\setminus\overline{F}$ односвязны. Из свойства угла A_F следует, что $A_F<\pi$. Пусть $F_1 = G\cup F\cup(\{c|_{[t_q^*,\beta]}(t)\}_{t\in[t_q^*,\beta]}\setminus(\{q^*\}\cup\{q\}))$, и F_2 — область, ограниченная циклом $c|_{[t_p^*-h_p^*,t_p^*]}$ и принадлежащую области G. Далее, положим $F_3 = G\setminus(F_2\cup\{c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(t)\}_{t\in[t_p^*-h_p^*,\alpha]})$.

Учитывая, что угол в точке q^* со стороны F_1 равен $\pi+A_F>\pi$, угол в точке q со стороны F_1 равен $\pi+B>\pi$ и угол в точке p со стороны F_1 равен $A>\pi$, получаем, что кривая $c|_{[\alpha,t_q^*]}(t)c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}(t)c^*(t)$ является простой, замкнутой и выпуклой. Поэтому по теореме 2

$$L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}) + L(c^*) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}. \tag{9}$$

Аналогично, учитывая, что угол в точке p со стороны F_3 равен $A-\pi<\pi$, угол в точке q со стороны F_3 равен $B<\pi$ угол в точке p^* со стороны F_3 меньше π (угол между двумя геодезическими), получаем, что кривая $c|_{[t_p^*,\beta]}(t)c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}(t)c^*(t)$ является простой, замкнутой и выпуклой. Значит, по теореме 2

$$L(c|_{[t_p^*,\beta]}) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}) + L(c^*) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}. \tag{10}$$

Из условия можем записать еще одно неравенство:

$$L(c|_{[\alpha,t_p^*]}) + L(c|_{[t_p^*,t_q^*]}) + L(c|_{[t_q^*,\beta]}) \ge \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}. \tag{11}$$

Из (9) и (11) имеем

$$L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[t_q^*,\beta]}) \ge \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}, \quad L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}) + L(c^*) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

откуда

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \ge L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}) + L(c^*) \ge L(c^*) + \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}} - L(c|_{[t_q^*,\beta]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}).$$

Следовательно,

$$L(c|_{[t_q^*,\beta]}) \ge \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} + L(c^*) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}). \tag{12}$$

Из (10) и (11) вытекают соотношения

$$L(c|_{[\alpha,t_p^*]}) + L(c|_{[t_p^*,\beta]}) \ge \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}, \quad L(c|_{[t_p^*,\beta]}) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}) + L(c^*) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \geq L(c|_{[t_p^*,\beta]}) + L(c^*) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}) \geq \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}} - L(c|_{[\alpha,t_p^*]}) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}) + L(c^*).$$

Отсюда

$$L(c|_{[\alpha,t_p^*]}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} + L(c^*) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}). \tag{13}$$

Пусть $\overline{F_1} = F_1 \cup \{c|_{[\alpha,t_q^*]}(t)\}_{t\in[\alpha,t_q^*]} \cup \{c^*(t)\}_{t\in[0,1]} \cup \{c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}(t)\}_{t\in[\beta,t_q^*+h_q^*]}$.

Выбираем произвольные точки $\xi_0 \in (t_p^* - h_p^*, \alpha)$ и $\xi_1 \in (\beta, t_q^* + h_q^*)$. Так как M — полное многообразие и F_3 — выпуклая односвязная область, то $c|_{[t_p^*-h_p^*]}(\xi_0)$ и q^* можно соединить кратчайшей в области F_3, которая будет геодезической на M. Обозначим ее через $\eta_0 : [0,1] \to M$, $\eta_0(0) = c|_{[t_p^*-h_p^*]}(\xi_0)$, $\eta_0(1) = q^*$. Поэтому

$$\{\eta_0(t)\}_{t\in[0,1]} \setminus (\{\eta_0(0)\} \cup \{\eta_0(1)\}) \in F_3. \tag{14}$$

Аналогично так как $M \setminus \overline{F_1}$ — выпуклая односвязная область, то $c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}$ и p^* можно соединить кратчайшей в области $M \setminus \overline{F_1}$, которая будет геодезической на M. Обозначим ее через $\eta_1 : [0,1] \to M$, $\eta_1(0) = c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}(\xi_1)$, $\eta_1(1) = p^*$. Тогда

$$\{\eta_1(t)\}_{t\in[0,1]} \setminus (\{\eta_1(0)\} \cup \{\eta_1(1)\}) \in M \setminus \overline{F_1}. \tag{15}$$

В силу (14) и (15) область, ограниченную геодезическими $c|_{[t_p^*,t_q^*]}$, $c|_{[t_p^*-h_p^*,\xi_0]}$, $\eta_0(t)$ и принадлежащую F_3, можно обозначить через Q_0, а область, ограниченную геодезическими $c|_{[t_p^*,t_q^*]}$, $c|_{[\xi_1,t_q^*+h_q^*]}$, $\eta_1(t)$ и принадлежащую области $M \setminus \overline{F_1}$, через Q_1. Положим $Q = F \cup F_2 \cup Q_0 \cup Q_1 \cup (\{c|_{[t_p^*,t_q^*]}(t)\}_{[t_p^*,t_q^*]} \setminus (\{p^*\} \cup \{q^*\}))$. Угол в точке $c|_{[t_p^*-h_p^*,\xi_0]}(\xi_0)$ со стороны Q равен $\pi + (\dot\eta_0(0), -\dot c|_{[t_p^*-h_p^*,\xi_0]}(\xi_0)) > \pi$, угол в точке p^* со стороны Q равен $\pi + (-\dot\eta_1(1), \dot c|_{[t_p^*,t_q^*]}(t_p^*)) > \pi$, угол в точке $c|_{[\xi_1,t_q^*+h_q^*]}(\xi_1)$ со стороны Q равен $\pi + (\dot\eta_1(0), \dot c|_{[\xi_1,t_q^*+h_q^*]}(\xi_1)) > \pi$, угол в точке q^* с стороны Q равен $\pi + (\dot\eta_0(0), -\dot c|_{[t_p^*,t_q^*]}(t_q^*)) > \pi$. Следовательно, кривая, составленная из геодезических $c|_{[\xi_0,t_p^*]}$, η_1, $c|_{[t_q^*,\xi_1]}$, η_0, является простой, замкнутой и выпуклой, для которой по теореме 2 имеем

$$L(\eta_0) + L(c|_{[\xi_0,t_p^*]}) + L(c|_{[t_q^*,\xi_1]}) + L(\eta_1) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}. \tag{16}$$

Сложив неравенства (12) и (13), получим

$$L(c|_{[\alpha,t_p^*]}) + L(c|_{[t_q^*,\beta]}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} + 2L(c^*) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}). \tag{17}$$

Соотношения (16) и (17) противоречат друг другу, следовательно, случая 1 быть не может.

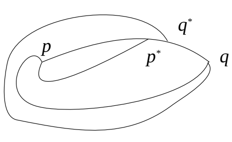

Рис. 9.

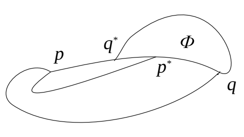

Рис. 10.

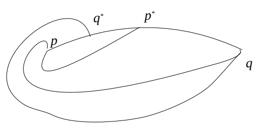

Рис. 11.

Рассмотрим теперь случай 2, т. е. $q^* \in \{c|_{[\alpha,t_p^*]}(t)\}_{t\in[\alpha,t_p^*]} \setminus \{p^*\}$ (рис. 10, 11). Обозначим через Φ область, ограниченную циклом $c|_{[t_q^*,t_q^*+h_q^*]}$ и принадлежащую $M \setminus \overline{G}$, через $\overline{\Phi}$ — объединение $\Phi \cup \{c|_{[t_q^*,t_q^*+h_q^*]}(t)\}_{t\in[t_q^*,t_q^*+h_q^*]}$, через A_Φ —

угол в точке q^* со стороны области Φ. Так как M односвязно, то Φ и $M \setminus \overline{\Phi}$ будут односвязными областями. В дальнейшем сохраним обозначения случая 1. Учитывая, что $c|_{[t_q^*, t_q^*+h_q^*]}$ и $c|_{[t_p^*-h_p^*, t_p^*]}$ — циклы, по теореме 2 имеем

$$L(c|_{[t_q^*,t_p^*]}) + L(c|_{[t_p^*,\beta]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}, \tag{18}$$

$$L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[t_q^*,t_p^*]}) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}. \tag{19}$$

По условию получаем еще одно неравенство:

$$L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[t_q^*,t_p^*]}) + L(c|_{[t_p^*,\beta]}) \geq \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}}. \tag{20}$$

Пусть $\Phi_1 = \Phi \cup F_2 \cup (\{c|_{[t_q^*,t_p^*]}(t)\}_{[t_q^*,t_p^*]} \setminus (\{p^*\} \cup \{q^*\}))$. Так как со стороны области Φ_1 угол в точке q^* равен $\pi + A_\Phi > \pi$, угол в точке p^* равен ($\pi+$ угол в точке p^* со стороны области F_2), следовательно, также больше π, то кривая, составленная из геодезических $c|_{[t_p^*-h_p^*,t_q^*]}$ и $c|_{[t_p^*,t_q^*+h_q^*]}$ простая замкнутая и выпуклая. Поэтому по теореме 2

$$L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[t_p^*,\beta]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}) + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) находим

$$L(c|_{[t_q^*,t_p^*]}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} + L(c|_{[t_p^*-h_p^*,\alpha]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}), \tag{22}$$

из (18) и (21) вытекает, что

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \geq L(c|_{[t_q^*,t_p^*]}) + L(c|_{[t_p^*,\beta]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}) \geq \frac{3\pi}{\sqrt{\kappa}} - L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}),$$

откуда

$$L(c|_{[\alpha,t_q^*]}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} + L(c|_{[\beta,t_q^*+h_q^*]}). \tag{23}$$

Сложив (22) и (23), приходим к противоречию с (19). Таким образом, невозможен и случай 2. Следовательно, наше предположение не верно, и тем самым теорема доказана.

Построение примера

Покажем, что оценка, полученная в теореме 1, неулучшаема. Для этого построим пример двумерного полного односвязного риманова многообразия гауссовой кривизны $K \geq K_0 > 0$, в котором существует простой отрезок геодезической длины $\frac{3\pi}{\sqrt{K_0}} - \alpha$, где α — произвольное число, принадлежащее интервалу $(0, \frac{3\pi}{\sqrt{K_0}})$. Идея построения примера состоит в следующем: на двумерной сфере со стандартной метрикой берется замкнутая геодезическая (большая окружность), проходящая через северный и южный полюсы, длины 2π. В окрестности экваториальной точки этой геодезической надлежащим способом возмущается стандартная метрика так, чтобы исходная геодезическая перестала быть замкнутой и самопересекалась в полюсах. В результате получается пример простой геодезической длины, сколь угодно близкой к 3π.

Рассмотрим двумерную сферу S^2 с гауссовой кривизной $K = 1$. В сферических координатах запишем параметрическое задание сферы с единичным радиусом:

$$x = \cos(v)\cos(u), \quad y = \sin(v)\cos(u), \quad z = \sin(u).$$

Данная параметризация является полугеодезической, в которой геодезическими будут $v = \text{const}$ (меридианы), а $u = \text{const}$ — ортогональные к ним траектории (параллели). Первая квадратичная форма имеет вид $ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2$, где $G(u) = \cos^2(u)$, причем геодезические задаются уравнениями

$$V = V(u) = c_0 \int \frac{du}{\sqrt{G}\sqrt{G - c_0^2}} + c_1,$$

где c_0, c_1 — произвольные постоянные. Возьмем на сфере три точки: A с координатами $(u, v) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $B(\frac{\pi}{2}, 0)$, $P_0(0, 0)$ (A и B суть северный и южный полюсы соответственно). Выберем числа a, b, c так, что $0 < c < a < \frac{\pi}{2}$. Обозначим через W_0 область, ограниченную координатными линиями $v = b$, $v = -b$, $u = a$, $u = -a$, причем $P_0 \in W_0$, через W_1 — область, ограниченную координатными линиями $v = c$, $v = -c$, $u = a$, $u = -a$, через Q_0 — область, ограниченную координатными линиями $v = -c$, $v = -b$, $u = a$, $u = -a$, через Q_1 — область, ограниченную координатными линиями $v = c$, $v = b$, $u = a$, $u = -a$. Далее, через $\overline{W}_0$, $\overline{W}_1$, $\overline{Q}_0$, $\overline{Q}_1$ обозначим замыкания W_0, W_1, Q_0, Q_1 соответственно. Очевидно, что $\overline{W}_0 = \overline{W}_1 \cup \overline{Q}_0 \cup \overline{Q}_1$.

Пусть $v_0 : [0, 1] \to S^2$ — геодезическая, $v_0(0) = v_0(1) = P_0$, $\dot{v}_0(0) = \dot{v}_0(1)$, причем

1) $v_0(\tau_1) \neq v_0(\tau_2)$ для любых различных τ_1, $\tau_2 \in (0, 1)$,

2) геодезическая v_0 в сферической системе координат задается уравнением $v = 0$ (меридиан).

Заметим, что длина отрезка геодезической v_0, лежащего вне замкнутой области $\overline{W}_0$, равна $2\pi - 2a$ (рис. 12, 13).

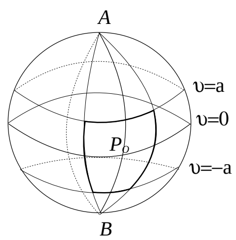

Рис. 12.

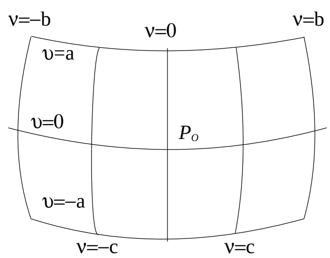

Рис. 13.

В замкнутой области $\overline{W}_0$ изменим риманову метрику, задав первую квадратичную форму следующим образом: $ds_\delta^2 = du^2 + 2\delta\widetilde{F}(u, v)\,du dv + G(u)\,dv^2$, где δ — достаточно малый строго положительный параметр. Будем считать, что $0 < \delta < \frac{1}{2}$. В окрестности $\overline{W}_1$

$$\widetilde{F}(u, v) = \cos^n \frac{\pi u}{2a}, \tag{24}$$

и в замкнутых областях $\overline{Q}_0$ и $\overline{Q}_1$, где $n \geq 3$ — натуральное число,

$$\widetilde{F}(u, v) = \cos^n \frac{\pi u}{2a} \cos \frac{\pi v (v^2 - c^2)^n}{2b(b^2 - c^2)^n}. \tag{25}$$

Тогда в силу (24) и (25) на границе склейки имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial^{i-1}\widetilde{F}}{\partial u^{i-1}}(\pm a, v) = 0 \quad \text{для всех } i = 1, 2, \ldots, n, \tag{26}$$

$$\frac{\partial^{i-1}\widetilde{F}}{\partial v^{i-1}}(u, \pm b) = 0 \quad \text{для всех } i = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

$$\widetilde{F}(u, \pm c) = \cos^n \frac{\pi u}{2a}; \quad \frac{\partial^{i-1}\widetilde{F}}{\partial v^{i-1}}(u, \pm c) = 0 \quad \text{для всех } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{28}$$

Учитывая, что $\widetilde{F}(u,v) \in C^{n-1,n-1}_{u,v}$ на компакте $\overline{W}_0$ в силу соотношений (24)–(28) и $G(u) \in C^\infty$, для каждой точки $(u,v) \in \overline{W}_0$ находим

$$\left|\frac{\partial^{i+j}\widetilde{F}}{\partial u^i \partial v^j}(u,v)\right| \le A \quad \text{для всех } i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, n-1;\ i+j \le n-1,$$
$$\left|\frac{\partial^i G}{\partial u^i}(u)\right| \le B, \quad \frac{\partial^j G}{\partial v^j}(u) = 0 \quad \text{для всех } i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{29}$$

Ясно, что гауссова кривизна вне области изменения метрики осталась прежней и равна 1. Оценим гауссову кривизну $\widetilde{K}(u,v)$ для каждой точки $(u,v) \in \overline{W}_0$ в новой метрике и покажем, что $\widetilde{K}(u,v)$ непрерывна. По формуле Гаусса имеем

$$\widetilde{K}(u,v) = -\frac{1}{4(G-\delta^2\widetilde{F}^2)^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta\widetilde{F} & \delta\widetilde{F}_u & \delta\widetilde{F}_v \\ G & G_u & 0 \end{vmatrix}$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{G-\delta^2\widetilde{F}^2}}\left[\left(-\frac{\delta\widetilde{F}_u}{\sqrt{G-\delta^2\widetilde{F}^2}}\right)_v - \left(\frac{\delta\widetilde{F}_v - G_u}{\sqrt{G-\delta^2\widetilde{F}^2}}\right)_u\right]. \tag{30}$$

Это следует из (29) и того факта, что коэффициент при du^2 в квадратичной форме, задающей новую метрику, равен 1. Подсчитав определитель и учтя (29), получим

$$\widetilde{K}(u,v) = -\frac{1}{4(G-\delta^2\widetilde{F}^2)^2}[(G_u^2 - 2G_{uu}G) + \delta 4\widetilde{F}_{uv}G$$
$$+ \delta^2(2G_{uu}\widetilde{F}^2 + 2\widetilde{F}\widetilde{F}_u G_u) + \delta^3(4\widetilde{F}_u\widetilde{F}\widetilde{F}_v - 4\widetilde{F}_{uv}\widetilde{F}^2)]. \tag{31}$$

Поскольку $(\sqrt{G})_{uu} + (\sqrt{G}) = 0$ и $K = 1$ в старой метрике, перепишем (31):

$$\widetilde{K}(u,v) = -\frac{1}{4(G-\delta^2\widetilde{F}^2)^2}[4KG^2 + 4\delta\widetilde{F}_{uv}G + 2\delta^2(G_{uu}\widetilde{F}^2 + \widetilde{F}\widetilde{F}_u G_u)$$
$$+ 4\delta^3(\widetilde{F}_u\widetilde{F}\widetilde{F}_v - \widetilde{F}_{uv}\widetilde{F}^2)] = K + \frac{4\delta\widetilde{F}_{uv}G}{(G-\delta^2\widetilde{F}^2)^2}$$
$$+ \frac{\delta^2[G_{uu}\widetilde{F}^2 + \widetilde{F}\widetilde{F}_u G_u + 4KG\widetilde{F}^2]}{2(G-\delta^2\widetilde{F}^2)^2} + \frac{\delta^3[\widetilde{F}_u\widetilde{F}\widetilde{F}_v - \widetilde{F}uv\widetilde{F}^2]}{(G-\delta^2\widetilde{F}^2)^2} - \frac{\delta^4 K\widetilde{F}^4}{(G-\delta^2\widetilde{F}^2)^2}.$$

Из соотношений (26)–(28) находим $\widetilde{K}(u, \pm b) = K = 1$; $\widetilde{K}(\pm a, v) = K = 1$. Так как $\widetilde{F}(u,v) \in C^{n-1,n-1}_{u,v}$, $G(u) \in C^\infty$ и для достаточно малого δ выполнено неравенство $G - \delta^2\widetilde{F}^2 \ge l > 0$, заключаем, что $\widetilde{K}(u,v)$ непрерывна. Кроме того, $|\widetilde{K}(u,v) - K(u,v)| \le \delta M_1^*$, где M_1^* — некоторая строго положительная постоянная. Тогда

$$K(u,v) - \delta M_1^* \le \widetilde{K}(u,v) \le K(u,v) + \delta M_1^*. \tag{32}$$

Запишем дифференциальное уравнение геодезических $v = \tilde{v}(u,\delta)$ в замкнутой окрестности в $\overline{W}_1$ в новой метрике:

$$\ddot{\tilde{v}} + \big(\widetilde{\Gamma}_{11}^2 + 2\widetilde{\Gamma}_{12}^2\ddot{\tilde{v}} + 2\widetilde{\Gamma}_{22}^2\ddot{\tilde{v}}^2\big) - \big(\widetilde{\Gamma}_{11}^1 + 2\widetilde{\Gamma}_{12}^1\ddot{\tilde{v}} + \widetilde{\Gamma}_{22}^1\ddot{\widetilde{V}}^2\big)\ddot{\tilde{v}} = 0. \tag{33}$$

Учитывая, что в $\overline{W}_1$ в новой метрике коэффициенты Кристоффеля $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ находятся из соотношений

$$\begin{cases} \widetilde{\Gamma}_{11}^1 + \widetilde{\Gamma}_{11}^2\delta\widetilde{F} = 0, \\ \widetilde{\Gamma}_{11}^1\delta\widetilde{F} + \widetilde{\Gamma}_{11}^2 G = \delta\widetilde{F}_u, \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{\Gamma}_{12}^1 + \widetilde{\Gamma}_{12}^2\delta\widetilde{F} = 0, \\ \widetilde{\Gamma}_{12}^1\delta\widetilde{F} + \widetilde{\Gamma}_{12}^2 G = \tfrac12 G_u, \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{\Gamma}_{22}^1 + \widetilde{\Gamma}_{22}^2\delta\widetilde{F} = -\tfrac12 G_u, \\ \widetilde{\Gamma}_{22}^1\delta\widetilde{F} + \widetilde{\Gamma}_{22}^2 G = 0, \end{cases}$$

получаем следующие значения для величин $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ $(k,i,j = 1,2)$ на отрезке $-a \le u \le a$:

$$\widetilde{\Gamma}_{11}^2 = \frac{\delta\widetilde{F}_u}{G - \delta^2\widetilde{F}^2}, \quad \widetilde{\Gamma}_{12}^2 = \frac{\frac12 G_u}{G - \delta^2\widetilde{F}^2}, \quad \widetilde{\Gamma}_{22}^2 = \frac{\frac12 G_u\delta\widetilde{F}}{G - \delta^2\widetilde{F}^2},$$
$$\widetilde{\Gamma}_{11}^1 = \frac{-\delta^2\widetilde{F}\widetilde{F}_u}{G - \delta^2\widetilde{F}^2}, \quad \widetilde{\Gamma}_{12}^1 = \frac{-\frac12\delta\widetilde{F}G_u}{G - \delta^2\widetilde{F}^2}, \quad \widetilde{\Gamma}_{22}^1 = \frac{-\frac12 GG_u}{G - \delta^2\widetilde{F}^2}$$

при δ таком, что $G - \delta^2\widetilde{F}^2 \ge l_0 > 0$. После подстановки полученных величин Кристоффеля в уравнение геодезических (33) имеем

$$(G - \delta^2\widetilde{F}^2)\ddot{\tilde{v}} + \left(\delta\widetilde{F}_u + \dot{\tilde{v}}G_u + \frac12\delta\widetilde{F}G_u\dot{\tilde{v}}^2\right) + \left(\delta^2\widetilde{F}\widetilde{F}_u + \delta\widetilde{F}G_u\dot{\tilde{v}} + \frac12 GG_u\dot{\tilde{v}}^2\right)\dot{\to}\tilde{v} = 0. \tag{34}$$

Покажем, что в замкнутой окрестности $\overline{W}_1$ в новой метрике функция

$$v(u,\delta) = -\delta\int\limits_{-a}^{u}\frac{\widetilde{F}(t)}{G(t)}\,dt \tag{35}$$

— решение уравнения (34), т. е. $v = v(u,\delta)$ является геодезической в $\overline{W}_1$ в новой метрике. Для этого из (35) находим

$$\dot{v}(u,\delta) = -\delta\frac{\widetilde{F}(u)}{G(u)}, \quad \ddot{v}(u,\delta) = \frac{-\delta(\widetilde{F}_u G - G_u\widetilde{F})}{G^2},$$

и после подстановки этих величин в левую часть имеем

$$-\delta(G - \delta^2\widetilde{F}^2)\left(\frac{\widetilde{F}_u G - G_u\widetilde{F}}{G^2}\right) + \left[\delta\widetilde{F}_u + G_u(-\delta\frac{\widetilde{F}}{G}) + \frac12\delta^3\widetilde{F}G_u(\frac{\widetilde{F}}{G})^2\right]$$
$$+ \left(-\delta\frac{\widetilde{F}}{G}\right)\left[\delta^2\widetilde{F}\widetilde{F}_u + \delta\widetilde{F}G_u\left(-\delta\frac{\widetilde{F}}{G}\right) + \frac12 GG_u\left(\delta^2\frac{\widetilde{F}^2}{G^2}\right)\right] = \delta\Bigg(-G\frac{\widetilde{F}_u G - G_u\widetilde{F}}{G^2} + \widetilde{F}_u$$
$$- \frac{G_u\widetilde{F}}{G}\Bigg) + \delta^3\left(\widetilde{F}^2\frac{\widetilde{F}_u G - G_u\widetilde{F}}{G^2} + \frac{G_u\widetilde{F}^3}{2G^2} - \frac{\widetilde{F}_u\widetilde{F}^2}{G} + \frac{G_u\widetilde{F}^3}{G^2} - GG_u\frac{\widetilde{F}^3}{2G^3}\right)$$

$$= \delta\left(-\widetilde{F}_u + \widetilde{F}_u + \frac{G_u\widetilde{F}}{G} - \frac{G_u\widetilde{F}}{G}\right)$$

$$+ \delta^3\left(\widetilde{F}_u\frac{\widetilde{F}^2G}{G^2} - \frac{\widetilde{F}^3G_u}{G^2} + \frac{1}{2}\frac{\widetilde{F}^3G_u}{G^2} - \frac{\widetilde{F}^2\widetilde{F}_u}{G^2} + \frac{\widetilde{F}^3G_u}{G^2} - \frac{1}{2}\frac{\widetilde{F}^3G_u}{G^2}\right) = 0.$$

Из ограниченности и непрерывности $\widetilde{F}(u)$, $G(u)$ в $\overline{W}_1$ следует, что $\frac{\widetilde{F}(u)}{G(u)}$ непрерывно и ограничено в $\overline{W}_1$, и по выбору a имеем $G(u) \neq 0$. Тем самым при достаточно малом δ функция $v(u,\delta) = -\delta \int\limits_{-a}^{u} \frac{\widetilde{F}(t)}{G(t)}\,dt$ будет определена на отрезке $-a \leq u \leq a$ в замкнутой окрестности $\overline{W}_1$ в новой метрике, причем эта интегральная кривая в $\overline{W}_1$ в новой метрике является простой.

Отметим некоторые свойства этого решения:

$$v(u,\delta)|_{u=-a} = -\delta \int\limits_{-a}^{a} \frac{\widetilde{F}(t)}{G(t)}\,dt = 0, \tag{36}$$

$$v(u,\delta)\Big|_{u=a} = -\delta \int\limits_{-a}^{a} \frac{\widetilde{F}(t)}{G(t)}\,dt < 0. \tag{37}$$

Соотношение (37) имеет место, ибо

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{\widetilde{F}(t)}{G(u)}\,dt \geq \kappa \int\limits_{-a}^{a} \widetilde{F}(t)\,dt = \kappa \int\limits_{-a}^{a} \cos^n \frac{\pi t}{2a}\,dt = \kappa \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{\pi}\cos^n t\,dt$$

$$= \frac{4a\kappa}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \frac{4a\kappa}{\pi}\begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & \text{при четном} \quad n, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при нечетном} \quad n, \end{cases}$$

$$\dot{v}(u,\delta)|_{u=a} = -\delta\frac{\widetilde{F}(u)}{G(u)}\bigg|_{u=a} = 0, \tag{38}$$

$$\dot{v}(u,\delta)|_{u=-a} = -\delta\frac{\widetilde{F}(u)}{G(u)}\bigg|_{u=-a} = 0. \tag{39}$$

Соотношения (38) и (39) следуют из (24).

Теперь вычислим угол между геодезической $v = v(u,\delta)$ и координатной линией $u = -a$ в точке $u = -a$. Поскольку $v = v(u,\delta)$ имеет в точке $u = -a$ направление $(1, \dot{v}(-a,\delta)) = (1,0)$ в силу (39), а координатная линия $u = -a$ в точке $u = -a$ — направление $(0,1)$, геодезическая v пересекает координатную линию $u = -a$ под прямым углом. Поэтому, учитывая (36), получаем, что продолжением геодезической $v = v(u,\delta)$ за координатную линию $u = -a$ является отрезок геодезической v_0. Аналогично угол между геодезической $v = v(u,\delta)$ и координатной линией $u = a$ равен $\frac{\pi}{2}$, так как в силу (38) геодезическая $v = v(u,\delta)$ имеет в точке $u = a$ направление $(1, \dot{v}(a,\delta)) = (1,0)$, а координатная линия $u = a$ в точке $u = a$ — направление $(0,1)$. Продолжение геодезической $v = v(u,\delta)$ за координатную линию $u = a$ обозначим через $v^+ = v(u,\delta)|_{u=a}$. Это меридиан, следовательно, геодезическая на S^2. Будем продолжать ее от координатной прямой $u = a$ до северного полюса A. Аналогично тому, как была построена геодезическая $v(u,\delta)$, построим геодезическую $\tilde v(u,\delta) = -\delta \int\limits_u^a \frac{\widetilde F(t)}{G(t)}\,dt$ в замкнутой области $\overline{W}_1$ в новой метрике. Так как геодезическая $\tilde v$ будет пересекать координатную линию $u=a$ под прямым углом и $\tilde v(a,\delta)=0$, продолжением геодезической $\tilde v$ за координатную линию $u=a$ будет геодезическая v_0. Легко заметить, что $\tilde v$ пересекает координатную линию $u=-a$ также под прямым углом, следовательно, продолжением геодезической $\tilde v$ за координатную линию $u=-a$ будет геодезическая-меридиан, которую мы обозначим через $v_- = \tilde v|_{u=-a}$, продолжив ее до южного полюса B. Таким образом, построена геодезическая $v_0\setminus \overline{W}_1, v, v_+\setminus A, \tilde v, v_-\setminus B$. Вычислим длину полученной геодезической в $\overline{W}_1$ в новой метрике. Как отмечено,

$$L(v_0\setminus \overline{W}_1) = 2\pi - 2a, \quad L(v_+) = L(v_-) = \frac{\pi}{2} - a.$$

Вычислим длины $\tilde v$ и v в новой метрике:

$$L(\tilde v(u,\delta)) = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + 2\delta \widetilde F \dot{\tilde V} + G\dot{\tilde V}^2}\,dt = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + 2\delta^2 \widetilde F \frac{-\widetilde F}{G} + G\left(\frac{\widetilde F}{G}\right)^2}\,dt$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 - \delta^2 \frac{\widetilde F^2}{G}}\,dt = 2a - \delta^2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{\frac{\widetilde F^2}{G}}{1 + \sqrt{1 - \delta^2 \frac{\widetilde F^2}{G}}}\,dt = L(v(u,\delta)).$$

Итак, построено двумерное полное односвязное риманово многообразие гауссовой кривизны $\widetilde K \ge K_0 = 1 - \delta M_1^*$, в котором в силу построения существует простая геодезическая (для достаточно малых δ).

Поэтому длина этой геодезической равна

$$3\pi - 2\delta^2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{\frac{\widetilde F^2}{G}}{1 + \sqrt{1 - \delta^2 \frac{\widetilde F^2}{G}}}\,dt - 2\delta^2 = 3\pi - O(\delta),$$

где $O(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $O(\delta) > 0$. Таким образом, какова бы ни была достаточно малая величина $\varepsilon > 0$, найдется полное односвязное риманово многообразие размерности 2 гауссовой кривизны $K \ge K_0$, в котором существует простая геодезическая длины $\frac{3\pi}{\sqrt{K_0}} - \varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Либерман И. М.* Геодезические линии на выпуклых поверхностях // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 2. С. 310–312.
2. *Топоногов В. А.* Оценка длины выпуклой кривой на двумерной поверхности // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 5. С. 1189–1183.
3. *Громол Д., Клингенберг В., Метер В. Е.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
4. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
5. *Розенфельд Б. А.* Неэвклидовы геометрии. М.: Гостехиздат, 1955.

Статья поступила 27 июня 2000 г., окончательный вариант — 12 февраля 2001 г.

Вайгант Владимир Андреевич
Мюнстерский университет, Германия

Матукевич Ольга Юрьевна
Алтайский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Димитрова, 66, Барнаул 656099
matukevich@math.dcn-asu.ru