Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 512.541

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ СМЕШАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

П. А. Крылов

Аннотация: Пусть A — самомалая смешанная абелева sp-группа конечного ранга без кручения, $E(A)$ — ее кольцо эндоморфизмов. Даются условия правой и левой наследственности кольца $E(A)$. Кольцо называется наследственным справа, если каждый его правый идеал проективен. Находится также строение односторонних идеалов кольца $E(A)$. Библиогр. 32.

Ассоциативное кольцо с единицей называется *наследственным справа*, если каждый его правый идеал проективен. Наследственность — довольно важное кольцевое свойство, и естественно исследовать его в роли свойства кольца эндоморфизмов (с этой тематикой можно познакомиться в [1; 2, гл.15]). Имеется значительное число публикаций, касающихся абелевых групп без кручения с наследственными кольцами эндоморфизмов [3–9].

Внимание многих специалистов привлекли смешанные абелевы группы, лежащие между суммой и произведением своих p-компонент [10–16]. Здесь они называются *sp-группами*. Смешанная группа содержит одновременно ненулевые элементы конечных порядков и элементы бесконечного порядка. Особенно интенсивно изучается один подкласс sp-групп, обозначенный в настоящей работе через W_f. Эквивалентности и двойственности между определенными категориями смешанных групп и групп без кручения, открытые в [17–19], свидетельствуют о богатстве класса групп W_f. В данной статье изучаются группы из W_f с наследственными кольцами эндоморфизмов. Рассматриваются также некоторые примыкающие вопросы.

В § 1 содержатся определения и ряд свойств групп класса W_f и более широкого класса групп W. Доказывается теорема 1.3 о строении односторонних идеалов кольца эндоморфизмов группы из W_f. Вспомогательный характер носит § 2. Основные результаты § 3 — теоремы 3.3, 3.5 о группах из W_f с наследственными кольцами эндоморфизмов. Важное место занимает пример 3.6, гарантирующий содержательность рассматриваемой ситуации.

Дадим необходимые определения и обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа или поле рациональных чисел. Все группы, встречающиеся в статье, абелевы. Буква p обозначает некоторое простое число. Если A — группа, то A_p — p-компонента группы A, т. е. наибольшая подгруппа в A, являющаяся p-группой. Далее,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00876).

$T(A)$ — периодическая часть группы A, совокупность всех ее элементов конечного порядка, $T(A) = \bigoplus\limits_p A_p$. *Рангом группы без кручения* называется мощность любой максимальной линейно независимой системы ее элементов. Под рангом без кручения смешанной группы A понимается ранг фактор-группы $A/T(A)$.

Пусть A — группа, тогда $E(A)$ — ее кольцо эндоморфизмов. Часто будем использовать следующие обозначения: $T = T(A)$, $V = A/T$, $R = E(A)$, $R_p = E(A_p)$, $R_t = \mathrm{Hom}(A,T)$, $S = R/R_t$. Групповые термины, примененные к кольцу или модулю, относятся к их аддитивным группам. Радикал Джекобсона кольца K обозначим через $J(K)$.

§ 1. *sp*-Группы

Напомним определение категории Уокера Walk из [20]. Объектами категории Walk служат группы, а в качестве множества морфизмов $\mathrm{Hom}_W(A,B)$ выбрано $\mathrm{Hom}(A,B)/\mathrm{Hom}(A,T(B))$. В частности, $E(A)/\mathrm{Hom}(A,T(A))$ — кольцо эндоморфизмов группы A в Walk, которое обозначим через $E_W(A)$.

Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$. Кольцо $E(A)$ можно отождествить с кольцом матриц (α_{ij}) порядка n, где $\alpha_{ij} \in \mathrm{Hom}(A_j, A_i)$ [2, теорема 106.1]. Обозначим через $\overline{R}$ множество матриц $(\bar{\alpha}_{ij})$ порядка n, где $\bar{\alpha}_{ij} \in \mathrm{Hom}_W(A_j, A_i)$. Такие матрицы можно складывать и умножать обычным образом. Получаем кольцо матриц $\overline{R}$.

Лемма 1.1. $E_W(A) \cong \overline{R}$.

Доказательство. Отображение $f : (\alpha_{ij}) \to (\bar{\alpha}_{ij})$ является сюръективным гомоморфизмом колец $E(A) \to \overline{R}$ с ядром $\mathrm{Hom}(A,T(A))$. Откуда $E_W(A) = E(A)/\mathrm{Hom}((A,T(A)) \cong \overline{R}$.

sp-Группой называется редуцированная смешанная группа A с бесконечным числом ненулевых p-компонент такая, что естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \to A$ продолжается до сервантного вложения $A \to \prod\limits_p A_p$ [10–16]. Таким образом, для *sp*-группы A можно считать, что $\bigoplus\limits_p A_p \subset A \subset \prod\limits_p A_p$, причем A сервантна в $\prod\limits_p A_p$ (это равносильно делимости фактор-группы $A/T(A)$). Здесь и далее подразумевается, что p пробегает множество всех простых чисел с $A_p \neq 0$. Итак, если A — *sp*-группа, то для каждого p имеем $A = A_p \oplus B_p$, где B_p — дополнительное слагаемое, $pB_p = B_p$ и $E(A) = E(A_p) \oplus E(B_p)$. Кроме того, $A/T(A)$ — $\mathbb{Q}$-пространство, а $E_W(A)$ — $\mathbb{Q}$-алгебра.

Пусть W — полная подкатегория категории Walk, состоящая из *sp*-групп A таких, что образ всякого гомоморфизма $A \to T(A)$ содержится в сумме конечного числа компонент A_p. В [14] замечено, что W — аддитивная категория с расщепляющимися идемпотентами. Следовательно, в ней выполняется теорема Крулля — Шмидта о единственности разложения объекта в прямую сумму объектов с локальными кольцами эндоморфизмов [21, теорема 18.18].

Для группы $A \in W$ до конца статьи фиксируем обозначения: $T = T(A)$, $V = A/T$, $R = E(A)$, $R_p = E(A_p)$, $R_t = \mathrm{Hom}(A,T) = \bigoplus\limits_p R_p$, $S = R/R_t$.

Обозначим теперь через W_f полную подкатегорию категории W, состоящую из групп конечного ранга без кручения. Возьмем группу $A \in W_f$. $\mathbb{Q}$-алгебра S вкладывается в $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$, где $\dim_{\mathbb{Q}} V < \infty$. Таким образом, S — конечномерная алгебра. Из [14, лемма 1.3] или [16, лемма 3.2] получается, что неразложимость группы A в W_f равносильна локальности кольца S. Поэтому A обладает свойством единственности разложения в W_f в прямую сумму неразложимых в W_f групп (впервые это доказано в [17]). Отметим еще, что $S = R \otimes \mathbb{Q}$ и по аналогии с группами без кручения S можно назвать алгеброй квазиэндоморфизмов группы A.

Кратко изложим предложенный в [14, 15] полезный способ задания на *sp*-группе структуры модуля над определенным кольцом (этот способ рассматривается также в [22]). Пусть $\chi = (k_p)$ — некоторая характеристика, т. е. последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞, пронумерованных всеми простыми числами. Считаем, что $k_p \neq 0$ для бесконечного множества чисел p. Для каждого p определим кольцо R_p (зависящее от χ), полагая $R_p = 0$, если $k_p = 0$, R_p — кольцо вычетов по модулю p^{k_p}, если $0 < k_p < \infty$, и R_p — кольцо целых p-адических чисел при $k_p = \infty$.

Положим $\overline{K}(\chi) = \prod\limits_p R_p$, $T(\chi) = \bigoplus\limits_p R_p$. Здесь $\overline{K}(\chi)/T(\chi)$ — $\mathbb{Q}$-алгебра. Пусть $K(\chi)$ — подкольцо в $\overline{K}(\chi)$ такое, что $T(\chi) \subset K(\chi)$ и $K(\chi)/T(\chi) = \mathbb{Q}$.

Пусть теперь дана *sp*-группа A. Составим характеристику $\chi_m = (k_p)$ следующим образом. Полагаем $k_p = 0$ при $A_p = 0$ и $k_p = \infty$, если A_p — неограниченная группа, в противном случае пусть p^{k_p} — точная верхняя грань порядков ее элементов. Возьмем некоторую характеристику χ с $\chi \geq \chi_m$. Тогда на группе A естественным способом появляется структура $K(\chi)$ модуля [15].

Будет удобно также использовать понятие E-модуля. Модуль M над кольцом K называется *$E(K)$-модулем* или *E-модулем над* K, если $\mathrm{Hom}_K(K, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, M)$ [23, 24]. Если K_K — $E(K)$-модуль, то кольцо K называют *E-кольцом.* Поскольку $K(\chi)/\langle 1\rangle$ — делимая группа, то $K(\chi)$ — E-кольцо [23]. Далее, если A, B — *sp*-группы и $K(\chi)$-модули для некоторой характеристики χ, то A и B — $E(K(\chi))$-модули и $\mathrm{Hom}_{K(\chi)}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ [23].

Группа A называется *самомалой*, если образ всякого гомоморфизма $A \to \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ($A_i \cong A$, $i \geq 1$) содержится в сумме конечного числа слагаемых A_i. Теория самомалых групп изложена в [25].

Говорят, что *sp*-группа A *удовлетворяет условию на проекции*, если существует свободная подгруппа F группы A, для которой ограничение проекции $A \to A_p$ на F совпадает с A_p для почти всех p [10, 13]. Следующую теорему мы приводим для удобства ссылок (эквивалентность утверждений (а)–(в) установлена в [10, 11], (г) и (д) — в [14, 15]). П. 2 теоремы (см. [14, 15]) сводит изучение групп из W_f к изучению самомалых *sp*-групп.

Теорема 1.2. 1. *Записанные ниже утверждения о sp-группе A конечного ранга без кручения эквивалентны:*

а) *A — самомалая группа;*

б) *$A \in W_f$, и каждая A_p — конечная группа;*

в) *A удовлетворяет условию на проекции, и каждая A_p — конечная группа;*

г) *A — конечно-порожденный $K(\chi)$-модуль для некоторой характеристики χ;*

д) *кольцо $E(A)$ дискретно в конечной топологии.*

2. *Если группа $A \in W_f$, то $A = B \oplus G$, где B — самомалая sp-группа, G — периодическая группа, т. е. $A \stackrel{\sim}{=} B$ в категории W.*

Далее, для *sp*-группы A пусть J обозначает такой идеал кольца R, что $R_t \subseteq J$ и $J/R_t = J(S) = J(R/R_t)$. Верны левые аналоги оставшихся утверждений этого параграфа.

Теорема 1.3. *Пусть A — группа из W_f и I — правый идеал кольца R. Тогда $I = eR \oplus P$, где $e^2 = e \in R$, P — правый идеал кольца R, лежащий в J, и $P = I \cap (1-e)R$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторое артиново справа кольцо T и его правый идеал I. Докажем, что $I = eT \oplus X$, где $e^2 = e \in T$, X — правый идеал, $X \subseteq J(T)$ и $X = I \cap (1-e)T$. Можно считать, что $I \not\subset J(T)$. Существует ненулевой идемпотент $e_1 \in I$ [26, теорема 1.3.2]. Следовательно, $T = e_1T \oplus (1-e_1)T = e_1T \oplus L_1$. Отсюда $I = e_1T \oplus (I \cap L_1) = e_1T \oplus X_1$. Если $X_1 \not\subset J(T)$, то найдется идемпотент $0 \neq f \in X_1$. Тогда $T = e_1T \oplus fT \oplus X$ для какого-то правого идеала X. Переобозначая, это разложение можно записать в виде $T = e_1T \oplus e_2T \oplus (1-e_1-e_2)T$, где e_1, e_2 — ортогональные идемпотенты, или $T = e_1T \oplus e_2T \oplus L_2$. Для идеала I получаем $I = e_1T \oplus e_2T \oplus X_2$, где $X_2 = I \cap L_2$. В силу артиновости кольца T через несколько шагов придем к равенству $I = e_1T \oplus \cdots \oplus e_kT \oplus X$, в котором $e_1, \ldots, e_k$ — ортогональная система идемпотентов, $X \subseteq J(T)$ и $X = I \cap (1-e_1-\cdots-e_k)T$. Осталось положить $e = e_1 + \cdots + e_k$ и заметить, что $e^2 = e$ и $I = eT \oplus X$.

Вернемся к кольцу R. Считаем, что $I \not\subseteq J$. По доказанному $\overline{I} = \bar{e}S \oplus X$, где $\overline{I} = (I+R_t)/R_t$, $\bar{e}^2 = \bar{e} \in S$, $X \subseteq J(S)$ и $X = \overline{I} \cap (1-\bar{e})S$. Согласно [14, лемма 1.3] идемпотент $\bar{e}$ поднимается до некоторого идемпотента e кольца R. В частности, $e \in I + R_t$ и $e = f + x$, где $f \in I$, $x \in R_t$. Запишем разложение $R = R_1 \oplus R_2$, где R_2 — произведение конечного числа колец R_p и $x \in R_2$. Возьмем теперь представление $f = e_1 + y$ относительно разложения $I = (I \cap R_1) \oplus (I \cap R_2)$. Тогда $e = e_1 + z$, где $z = y + x \in R_2$. Ясно, что e_1 — идемпотент, причем $e_1 \in I \cap R_1$. Достаточно проверить утверждение для идеала $I \cap R_1$. Поэтому считаем, что $e \in I$. В таком случае $I = eR \oplus P$, где $P = I \cap (1-e)R$. Из $X = \overline{I} \cap (1-\bar{e})S$ следует, что $(P + R_t)/R_t = X$. Поскольку $X \subseteq J(S) = J/R_t$, то $P \subseteq J$, что и требовалось. Теорема доказана.

Модуль M над кольцом K называется *конечно-представимым*, если найдется точная последовательность $0 \to X \to K^n \to M \to 0$, в которой $n \in \mathbb{N}$, X — конечно-порожденный K-модуль. Модуль называется *когерентным*, если каждый его конечно-порожденный подмодуль конечно-представим [27, § 6.4]. Применяя это понятие к кольцу, приходим к когерентным справа или слева кольцам. В [28] получен ряд результатов общего характера о группах с когерентными кольцами эндоморфизмов.

Следствие 1.4. *Для группы $A \in W_f$ справедливы следующие утверждения:*

1) *правая когерентность кольца R равносильна когерентности правого R-модуля J;*

2) *каждый правый идеал кольца R плоский тогда и только тогда, когда каждый подмодуль правого R-модуля J плоский.*

Доказательство. 1. Пусть J — когерентный правый R-модуль. Для произвольного конечно-порожденного правого идеала I кольца R имеем по теореме 1.3 $I = eR \oplus P$, где $e^2 = e \in R$, P — конечно-порожденный подмодуль правого R-модуля J. По предположению модуль P конечно-представим, а eR — конечно-представимый модуль, который является прямым слагаемым в R. Следовательно, I — конечно-представимый идеал, а R — когерентное справа кольцо. Обратное верно всегда.

В доказательстве п. 2 подобно п. 1 достаточно применить теорему 1.3. Следствие доказано.

Однородной называется p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп одинакового порядка.

Следствие 1.5. *Пусть A — самомалая sp-группа конечного ранга без кручения с полупростой алгеброй S. Тогда*

1) *R когерентно справа;*

2) *если дополнительно все компоненты A_p — однородные группы, то каждый конечно-порожденный правый идеал кольца R является главным, т. е. R — правое кольцо Безу.*

Доказательство. 1. Достаточно убедиться, что J — когерентный правый R-модуль (следствие 1.4). По условию $J(S) = 0$, поэтому $J = R_t$. Затем из $A \in W_f$ (теорема 1.2) следует $R_t = \bigoplus\limits_p R_p$, где каждое R_p — конечное кольцо и прямое слагаемое в R. Конечно-порожденный правый идеал I кольца R, лежащий в R_t, содержится в сумме конечного числа колец R_p. Понятно, что идеал I конечно-представим.

2. Кольца R_p являются полными кольцами матриц над кольцами вычетов. Следовательно, эти кольца и их конечные произведения будут кольцами Безу. Возьмем произвольный конечно-порожденный правый идеал I кольца R. На основании теоремы 1.3 имеем $I = eR \oplus P$, где $e^2 = e$, $P \subseteq J = \bigoplus\limits_p R_p$ и $P = I \cap (1-e)R$. Идеал P лежит в сумме X конечного числа колец R_p. Запишем $R = R_0 \oplus X$ и, далее, $e = e_0 + e_1$, где $e_0 \in R_0$, $e_1 \in X$. Тогда $I = e_0R \oplus K$ для некоторого $K \subseteq X$. Как замечено выше, $K = fR$, причем $e_0f = fe_0 = 0$. Тогда $I = e_0R + fR = (e_0 + f)R$, поскольку $e_0 = (e_0 + f)e_0$, а $f = (e_0 + f)(1 - e_0)$. Следствие доказано.

С помощью теоремы 1.3 можно получить более короткое доказательство теоремы 4.1 работы [14] о точных группах из W_f. Группа A называется *точной*, если $IA \neq A$ для любого собственного правого идеала I кольца R. В [14] доказано, что группа A из W_f точна в том и только в том случае, если каждая компонента A_p — конечная однородная группа и A не имеет смешанных прямых слагаемых D со свойством $D \subseteq JA$.

§ 2. Элементарные sp-группы

Группа, равная прямой сумме циклических групп простых порядков, называется *элементарной*. Sp-группу A назовем *элементарной sp-группой*, если ее периодическая часть — элементарная группа. Обозначим через $K(1)$ кольцо $K(\chi)$ для характеристики χ, состоящей из единиц. Группа A будет элементарной sp-группой тогда и только тогда, когда A — sp-группа, являющаяся $K(1)$-модулем.

Модуль M будем называть *элементарным*, если M как группа будет элементарной. Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга без кручения. В таком случае любой элементарный R-модуль M проективен. Действительно, имеет место R-модульное разложение $M = \bigoplus\limits_p M_p$. Проективность R-модуля M_p равносильна его проективности как R_p-модуля. Ввиду предположения и теоремы 1.2 R_p — полное кольцо матриц над полем из p элементов. Следовательно, все модули R_p и модуль M проективны.

Предложение 2.1. 1. *Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга без кручения. Тогда всякий правый (левый) идеал I кольца R равен $K \oplus E$, где K — конечно-порожденный, E — элементарный правый (левый) идеалы.*

2. *Для идеала I из п. 1 найдется элементарный правый (левый) идеал L такой, что $I \cap L = 0$ и $R_t \subseteq I + L$.*

Доказательство. В пп. 1 и 2 рассмотрим правый случай.

1. Положим $X = I \cap R_t$ и возьмем R-модуль I/X. Его можно считать S-модулем, учитывая, что $(I/X)R_t = 0$. Имеется вложение $I/X \to R/R_t = S$, $\alpha + X \to \alpha + R_t$, $\alpha \in I$. Следовательно, I/X — конечно-порожденный S-модуль. Выберем некоторую его систему образующих $\alpha_1 + X, \dots, \alpha_k + X$. Тогда $I = K + X$, где $K = \alpha_1 R + \dots + \alpha_k R$. Далее, из $I/K = (K+X)/K \cong X/(K \cap X)$ делаем вывод, что I/K — элементарный и, значит, проективный R-модуль. Поэтому $I = K \oplus E$, где K — конечно-порожденный, а E — элементарный ($E \cong I/K$) правые идеалы.

2. Принимая во внимание, что R_p — простое артиново кольцо, для каждого p можно записать $R_p = (I \cap R_p) \oplus L_p$, где L_p — некоторый правый идеал кольца R_p. Положим $L = \bigoplus\limits_p L_p$. Ясно, что $R_t \subseteq I + L$. Пусть $\alpha \in I \cap L$, а 1_p — единица кольца R_p. Тогда $\alpha 1_p \in I \cap R_p \cap L_p = 0$ для всякого p и $\alpha = 0$. Следовательно, $I \cap L = 0$.

§ 3. sp-Группы с наследственными кольцами эндоморфизмов

Если K — наследственное кольцо, $e^2 = e \in K$, то eKe — также наследственное кольцо. Пусть теперь группа A равна $B \oplus C$ и $e : A \to C$ — проекция с ядром B. Тогда $E(C) \cong eE(A)e$. Заключаем, что кольцо эндоморфизмов прямого слагаемого C группы A с наследственным кольцом эндоморфизмов само наследственно. Например, если C — циклическая группа порядка p^k, то $k = 1$, поскольку $E(C)$ — это кольцо вычетов по модулю p^k. Таким образом, периодическая часть группы A является элементарной группой. Изучая sp-группы с наследственными кольцами эндоморфизмов, можно ограничиться элементарными sp-группами.

Лемма 3.1. *Для группы $A \in W_f$ правый и левый R-модуль S является плоским.*

Доказательство. Имеем $S = R \otimes \mathbb{Q}$, а $\mathbb{Q} \cong \varinjlim Z_i$ (прямой предел; $i \in J$), где $Z_i \cong Z$ для каждого $i \in J$, откуда $S \cong \varinjlim (R \otimes Z_i)$, где $R \otimes Z_i \cong R$ для каждого $i \in J$. Следовательно, S — плоский правый и левый R-модуль.

Предложение 3.2. *Пусть A — элементарная sp-группа и $A \in W_f$. Каждый правый идеал кольца R является плоским тогда и только тогда, когда каждый правый идеал кольца S является плоским.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем произвольный правый идеал $\overline{I} = I/R_t$ кольца S, где I — правый идеал кольца R. Тогда $\overline{I} = I \otimes \mathbb{Q}$, причем по предположению I — плоский R-модуль. Можно записать $I \cong \varinjlim F_i$, где F_i — конечно-порожденный проективный R-модуль для каждого $i \in J$. Следовательно, $\overline{I} \cong \varinjlim (F_i \otimes \mathbb{Q})$, где $F_i \otimes \mathbb{Q}$ — конечно-порожденный проективный S-модуль для всех $i \in J$, так как $S = R \otimes \mathbb{Q}$. Отсюда $\overline{I}$ — плоский S-модуль.

Достаточность. Покажем, что любой правый идеал I кольца R является плоским R-модулем. Можно считать, что I конечно-порожден. По предложению 2.1 найдется правый идеал L кольца R такой, что $I \cap L = 0$ и $R_t \subseteq I + L$ (с учетом п. 2 теоремы 1.2). В точной последовательности правых R-модулей $0 \to R_t \to I + L \to \overline{I} \to 0$ первый модуль плосок ввиду $R_t = \bigoplus\limits_p E(A_p)$. Далее, $\overline{I}$ плосок как S-модуль по предположению. На основании леммы 3.1 и [21, следствие 6.29] $\overline{I}$ плосок как R-модуль. Теперь в силу [29, с. 31] $I + L$ — плоский R-модуль. Откуда I — плоский модуль. Предложение доказано.

Пусть $A = \bigoplus\limits_{i \in J} A_i$, причем все слагаемые A_i не равны 0 и J — бесконечное множество.

Кольцо $E(A)$ не может быть наследственным ни справа, ни слева, так как содержит произведение $\prod\limits_{i \in J} E(A_i)$ [30]. Предположим, что A — элементарная sp-группа конечного ранга без кручения. Группа A равна $C \oplus H$, где C — самомалая sp-группа, H — элементарная группа [16, предложение 3.6]. Если кольцо $E(A)$ наследственное, то $E(H)$ также наследственное кольцо. Так что H — конечная группа. Поэтому далее ограничимся элементарными самомалыми sp-группами.

Модуль называется *наследственным*, если каждый его подмодуль проективен. Напомним, что когерентные модули и кольца определены перед следствием 1.4.

$\mathbb{Q}$-алгебра S для самомалой sp-группы A конечного ранга без кручения конечномерна. Следовательно, проективность любого одностороннего идеала алгебры S равносильна его плоскостности. Правая наследственность алгебры S равносильна левой [31, с. 66].

Теорема 3.3. *Пусть A — элементарная sp-группа конечного ранга без кручения. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *R наследственно справа;*
2) *R полунаследственно справа;*
3) *R когерентно справа, и S — наследственная алгебра;*
4) *J — наследственный правый R-модуль;*
5) *J — проективный когерентный правый R-модуль.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) верна всегда. 2) $\Rightarrow$ 3). Полунаследственность влечет когерентность. Конечно-порожденные правые идеалы кольца R проективны. Поэтому все правые идеалы кольца R плоские. По предложению 3.2 все правые идеалы кольца S плоские, значит, проективные и S — наследственная алгебра.

3) $\Rightarrow$ 1). Все правые идеалы кольца R плоские (предложение 3.2). В силу когерентности все конечно-порожденные правые идеалы кольца R проективны. Учитывая предложение 2.1 и факт проективности элементарного модуля, приходим к выводу о проективности каждого правого идеала кольца R.

Импликации 1) $\Rightarrow$ 4) и 4) $\Rightarrow$ 5) верны всегда.

5) $\Rightarrow$ 1). Как видно из доказательства предложения 3.2 (необходимость), $J(S)$ — плоский, т. е. проективный правый R-модуль. Это влечет наследственность алгебры S [31, с. 66]. Далее, R — когерентное справа кольцо (следствие 1.4). Таким образом, для кольца R верно 3), следовательно, и 1). Теорема доказана.

Предложение 3.4. *Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга без кручения. Тогда*

1) *если алгебра S является полупростой, то R — наследственное справа и слева кольцо;*

2) *если группа A неразложима в W, то R наследственно справа (слева) тогда и только тогда, когда S — тело.*

Доказательство. 1. По следствию 1.5 кольцо R когерентно справа. Попадаем в условия п. 3 теоремы 3.3. Следовательно, кольцо R наследственно справа. Аналогично R наследственно слева, так как справедливы левые аналоги следствия 1.5 и теоремы 3.3.

2. Допустим, что R — наследственное справа или слева кольцо. Как отмечено в § 1, S — локальная алгебра, а по теореме 3.3 S — наследственная алгебра. Отсюда $J(S)$ — проективный и, таким образом, свободный S-модуль. Это возможно лишь при $J(S) = 0$. Следовательно, S — тело. Обратное содержится в 1). Предложение доказано.

Для групп B и C группа $\mathrm{Hom}(B, C)$ естественным образом является правым $E(B)$-модулем и левым $E(C)$-модулем. Поскольку идеал $E_t(B)$ аннулирует $\mathrm{Hom}_W(B, C)$, то $\mathrm{Hom}_W(B, C)$ будет правым $E_W(B)$-модулем. Аналогично $\mathrm{Hom}_W(B, C)$ — левый $E_W(C)$-модуль.

Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга без кручения. Запишем $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, где все A_i неразложимы в W. В соответствии с леммой 1.1 и сказанным перед ней отождествляем кольца S и R с указанными там кольцами матриц. Если R — наследственное кольцо, то по замечанию в начале параграфа каждое из колец $E(A_i)$ также наследственное. По предложению 3.4 $E_W(A_i)$ — тело ($i = 1, \dots, k$). Рассматривая вопрос о наследственности кольца R, можно считать, что каждое слагаемое A_i таково, что $E_W(A_i)$ — тело. Детально исследуем вопрос о наследственности для случая двух слагаемых A_i. Учитывая предложение 3.4, будем считать алгебру S неполупростой.

В доказательстве ниже множество матриц вида $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ записываем как (X, Y). То же самое будет, когда нули стоят в верхней строке. Аналогичные соглашения принимаем и для отдельных матриц. В частности, матрицы $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ записываем в виде вектора $(x, 0)$ или самого элемента x.

Теорема 3.5. *Пусть A — элементарная самомалая sp-группа конечного ранга без кручения, $A = B \oplus C$, где $E_W(B)$, $E_W(C)$ — тела и S — неполупростая алгебра. Тогда*

1) *алгебра S является наследственной тогда и только тогда, когда одна из групп $\mathrm{Hom}_W(B, C)$ или $\mathrm{Hom}_W(C, B)$ равна нулю;*

2) *кольцо R наследственно справа (слева) тогда и только тогда, когда одна из групп $\mathrm{Hom}_W(B, C)$ или $\mathrm{Hom}_W(C, B)$ равна нулю и если, например, $\mathrm{Hom}_W(C, B) = 0$, то $\mathrm{Hom}(B, C)$ — наследственный правый $E(B)$-модуль (наследственный левый $E(C)$-модуль).*

Доказательство. 1. Проведем прежде некоторые рассмотрения с алгеброй S. Обозначим $F = E_W(B)$, $D = E_W(C)$. Здесь F и D — тела, $\mathrm{Hom}_W(B, C)$ — правое F-пространство и левое D-пространство, а $\mathrm{Hom}_W(C, B)$ — наоборот. Ввиду леммы 1.1

$$S = \begin{pmatrix} F & \mathrm{Hom}_W(C, B) \\ \mathrm{Hom}_W(B, C) & D \end{pmatrix}.$$

Положим
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = e_1 S, \quad P_2 = e_2 S.$$

Тогда $S = P_1 \oplus P_2$, где $\operatorname{End}_S P_1 \cong e_1 S e_1 \cong F$, $\operatorname{End}_S P_2 \cong e_2 S e_2 \cong D$. Следовательно, P_1 и P_2 — неразложимые проективные правые S-модули. Если P — некоторый конечно-порожденный проективный правый S-модуль, то можно написать $P \oplus X = S^m = P_1^m \oplus P_2^m$, $m \in \mathbb{N}$, X — какой-то модуль. По теореме Крулля — Шмидта модуль P является прямой суммой некоторого числа копий модулей P_1 и P_2.

Предположим теперь, что алгебра S наследственна, но $\operatorname{Hom}_W(B,C) \neq 0$ и $\operatorname{Hom}_W(C,B) \neq 0$. Имеем $J(S) = (P_1 \cap J(S)) \oplus (P_2 \cap J(S))$. Пусть, например, $P_2 \cap J(S) \neq 0$. Идеал $P_2 \cap J(S)$ нильпотентен, а D — тело. Отсюда $P_2 \cap J(S) = (X, 0)$ для некоторого F-подпространства X в $\operatorname{Hom}_W(B,C)$. Поскольку, далее, $(X,0)S \subseteq (X,0)$ и $(X,0)S = (X, X\operatorname{Hom}_W(C,B))$, то $X\operatorname{Hom}_W(C,B) = 0$. Выбрав некоторое F-подпространство M в X размерности 1, получим правый идеал $(M,0)$ алгебры S, который проективен, и по установленному выше $(M,0) = P_1^s \oplus P_2^t$, где $s,t \in \mathbb{N}$. Но этого не может быть из соображений о размерностях над $\mathbb{Q}$. Получили противоречие. Возможность $P_1 \cap J(S) \neq 0$ разбирается таким же образом. Делаем вывод, что группа $\operatorname{Hom}_W(B,C)$ или $\operatorname{Hom}_W(C,B)$ равна нулю.

Для доказательства обратного предположим, что $\operatorname{Hom}_W(C,B) = 0$. Случай $\operatorname{Hom}_W(B,C) = 0$ разбирается аналогично. Итак, S — кольцо нижних треугольных матриц $\begin{pmatrix} F & 0 \\ \operatorname{Hom}_W(B,C) & D \end{pmatrix}$, причем $\operatorname{Hom}_W(B,C) \neq 0$. Для наследственности алгебры S достаточно проективности радикала $J(S)$ как правого S-модуля, где $J(S) = (\operatorname{Hom}_W(B,C), 0)$ [31, с. 66]. Заметим, что $(F,0)$ — проективный правый S-модуль. Имеется изоморфизм правых F-пространств $(\operatorname{Hom}_W(B,C),0) \cong (F,0)^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Существует также сюръективный гомоморфизм колец $S \to F$, $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \to x$. Поэтому записанный изоморфизм F-пространств является изоморфизмом S-модулей и $(\operatorname{Hom}_W(B,C),0)$, т. е. $J(S)$ — проективный правый S-модуль.

2. Пусть R — наследственное справа кольцо (левый случай получается аналогично). По теореме 3.3 S — наследственная алгебра. Принимая во внимание п. 1, считаем для определенности, что $\operatorname{Hom}_W(C,B) = 0$ и, значит, $\operatorname{Hom}(C,B) = \operatorname{Hom}_t(C,B)$. Можно записать $R = \begin{pmatrix} E(B) & \operatorname{Hom}(C,B) \\ \operatorname{Hom}(B,C) & E(C) \end{pmatrix}$ и $J = (E_t(B), \operatorname{Hom}(C,B)) \oplus (\operatorname{Hom}(B,C), E_t(C))$ (с учетом $J(S) = (\operatorname{Hom}_W(B,C),0)$). Обозначим второе слагаемое через L. Первое слагаемое является наследственным R-модулем как элементарный модуль. Поэтому правая наследственность идеала J равносильна наследственности L. На основании теоремы 3.3 заключаем, что правая наследственность кольца R равносильна наследственности L как правого R-модуля.

Итак, L — наследственный R-модуль. Докажем, что $\operatorname{Hom}(B,C)$ — наследственный $E(B)$-модуль. Пусть X — $E(B)$-подмодуль в $\operatorname{Hom}(B,C)$. Обозначим через $\overline{X}$ R-подмодуль в L, порожденный X. Тогда $\overline{X} = (X, X\operatorname{Hom}(C,B))$. Зафиксируем некоторую систему образующих $\{a_i\}(i \in I)$ $E(B)$-модуля X. Она будет системой образующих для $\overline{X}$ как R-модуля (напоминаем, что $a_i = (a_i, 0)$). Ввиду проективности $\overline{X}$ по лемме о дуальном базисе [21, лемма 3.23] существуют гомоморфизмы R-модулей $F_i : \overline{X} \to R$ $(i \in I)$ такие, что всякий элемент $y \in \overline{X}$ равен $\sum\limits_{i\in I} a_i F_i(y)$, где почти все $F_i(y)$ равны 0. Пусть g — аддитивный гомоморфизм $R \to E(B)$, $\begin{pmatrix} v & * \\ * & * \end{pmatrix} \to v$ (здесь и далее $*$ обозначает несущественные для нас элементы). Определим для каждого $i \in I$ аддитивный гомоморфизм $f_i : X \to E(B)$, полагая $f_i(x) = gF_i(x, 0)$ для каждого $x \in X$. Проверим, что $f_i(xv) = f_i(x)v$ для $x \in X$, $v \in E(B)$. Вычисляем

$$f_i(xv) = (gF_i)(xv, 0) = g(F_i(x, 0)v) = g\left(\begin{pmatrix} u & * \\ * & * \end{pmatrix} v\right) = g\begin{pmatrix} uv & * \\ * & * \end{pmatrix} = uv,$$

где $u \in E(B)$. С другой стороны,

$$f_i(x)v = (gF_i(x, 0))v = \left(g\begin{pmatrix} u & * \\ * & * \end{pmatrix}\right) v = uv.$$

Следовательно, все f_i являются гомоморфизмами $E(B)$-модулей. Для всякого элемента $x \in X$ имеем (ниже под знаком суммы опускаем $i \in I$)

$$(x, 0) = \sum a_i F_i(x, 0) = \sum a_i \begin{pmatrix} b_i & * \\ * & * \end{pmatrix} = \sum (a_i b_i, *), \quad x = \sum a_i b_i$$

(здесь $b_i \in E(B)$ и почти все b_i равны 0). Таким образом, $x = \sum a_i f_i(x)$, и по лемме о дуальном базисе X — проективный $E(B)$-модуль. Следовательно, $\operatorname{Hom}(B, C)$ — наследственный $E(B)$-модуль.

Достаточность. Пусть $\operatorname{Hom}_W(C, B) = 0$. Тогда $\operatorname{Hom}(B, C)$ — наследственный $E(B)$-модуль. Как замечено выше, нужно лишь убедиться в наследственности R-модуля L. Возьмем некоторый подмодуль M R-модуля L. Обозначим через X множество первых координат всех элементов из M и положим $\overline{X} = (X, X\operatorname{Hom}(C, B))$. Здесь X — $E(B)$-подмодуль в $\operatorname{Hom}(B, C)$, $\overline{X}$ — R-подмодуль в L. Ясно также, что $\overline{X} \subseteq M$ и $M/\overline{X}$ — элементарный R-модуль. Но такие модули проективны. Значит, $M = \overline{X} \oplus P$ с проективным модулем P. Осталось проверить проективность модуля $\overline{X}$.

Так как X — проективный $E(B)$-модуль, то $X \oplus Y = E(B)^k$, где Y — некоторый $E(B)$-модуль, k — кардинальное число. Можно еще записать прямое разложение правых $E(C)$-модулей:

$$\begin{aligned} X\operatorname{Hom}(C, B) \oplus Y\operatorname{Hom}(C, B) &= E(B)^k \operatorname{Hom}(C, B) \\ &= (E(B)\operatorname{Hom}(C, B))^k = \operatorname{Hom}(C, B)^k. \end{aligned}$$

Два записанных разложения дают прямое разложение правых R-модулей:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= (X, X\operatorname{Hom}(C, B)) \oplus (Y, Y\operatorname{Hom}(C, B)) \\ &= (E(B)^k, \operatorname{Hom}(C, B)^k) = (E(B), \operatorname{Hom}(C, B))^k. \end{aligned}$$

Поскольку $(E(B), \operatorname{Hom}(C, B))$ — проективный R-модуль, то $\overline{X}$ также проективный R-модуль. Теорема доказана.

Учитывая достаточно большой объем статьи, мы кратко приведем соответствующие построения лишь в пп. 1 и 2 следующего примера. Пп. 3 и 4 требуют пространных рассуждений. Автор надеется полностью опубликовать этот пример в другом месте.

Пример 3.6. Для каждого из указанных ниже свойств 1–4 кольца R существует элементарная самомалая sp-группа A конечного ранга без кручения с наследственной неполупростой алгеброй S, имеющая своим кольцом эндоморфизмов данное кольцо R:

1) R не наследственно ни слева, ни справа;
2) R наследственно слева, но не справа;
3) R наследственно справа, но не слева;
4) R наследственно с обеих сторон.

Построение группы A. В пп. 1 и 2 группу A берем в виде $A = B \oplus C$, где $B = K(1)$, C — некоторая элементарная самомалая sp-группа конечного ранга без кручения такая, что $E_W(C)$ — тело и $\mathrm{Hom}_W(C, B) = 0$. Кольцо $K(1)$ введено в начале § 2, при этом группу C можно рассмотреть как $K(1)$-модуль. В § 1 были определены E-кольца и E-модули, там же приведены их свойства. Кольцо $K(1)$ — E-кольцо, а $K(1)$-модуль C — E-модуль над кольцом $K(1)$. Отсюда $E(B) \cong K(1)$ и $\mathrm{Hom}(K(1), C) = \mathrm{Hom}_{K(1)}(K(1), C)$. Следовательно, имеет место изоморфизм $E(C)$-модулей $\mathrm{Hom}(K(1), C) \cong C$. По теореме 3.5 алгебра S для группы A является наследственной неполупростой. По этой же теореме кольцо R будет наследственным слева (справа), если $\mathrm{Hom}(K(1), C)$, т. е. C — наследственный $E(C)$-модуль (C — наследственный $K(1)$-модуль). Во втором случае в силу изоморфизма прямых разложений в W_f группа C должна быть изоморфной в W свободному $K(1)$-модулю. Теперь, чтобы получить свойство из п. 1, в качестве C достаточно взять элементарную самомалую sp-группу конечного ранга без кручения такую, что $E_W(C)$ — тело и C не является эндопроективной группой (т. е. проективным $E(C)$-модулем; эти группы изучались в [12, 14]). В п. 2 разобьем множество всех простых чисел на два бесконечных непересекающихся подмножества P_1, P_2. В качестве C возьмем $K(1)/(\oplus Z_p))$, где p пробегает P_2 (Z_p — поле из p элементов). Альтернативным способом можно построить C подобно кольцу $K(1)$, исходя из множества P_1.

Замечания. 1. Ситуация с наследственностью колец эндоморфизмов sp-групп значительно отличается от случая групп без кручения и тем более конечномерных алгебр. Если A — редуцированная группа без кручения конечного ранга, то левая и правая наследственности кольца R совпадают и наследственность кольца R влечет полупростоту алгебры $R \otimes \mathbb{Q}$ [4].

2. Хотелось бы, конечно, описать группы из W_f с наследственными кольцами эндоморфизмов на групповом языке. Однако пример 3.6 и положение с подобной постановкой вопроса для групп без кручения подводят к выводу, что это маловероятно.

3. В [32] группа $\mathrm{Hom}(B, C)$ исследуется как инъективный $E(B)$- или $E(C)$-модуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.* Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 183–254. (Итоги науки и техники).
2. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М: Мир, 1977. Т. 2.
3. *Arnold D. M., Lady E. L.* Endomorphism rings and direct sums of torsion-free Abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 211. P. 225–237.
4. *Huber M., Warfield R. B. Jr.* Homomorphisms between cartesian powers of an Abelian group // Lecture Notes Math. 1981. V. 874. P. 202–227.
5. *Albrecht U.* Baer's lemma and Fuchs' problem 84a // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 293. P. 565–582.

6. *Faticoni T. G.* On the lattice of right ideals of the endomorphism ring of an Abelian group // Bull. Austral. Math. Soc. 1988. V. 38, N 2. P. 273–291.
7. *Крылов П. А.* Об одном классе абелевых групп с наследственными кольцами эндоморфизмов // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 6. С. 60–65.
8. *Крылов П. А.* Об абелевых группах без кручения с наследственными кольцами эндоморфизмов // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 3. С. 295–304.
9. *Крылов П. А.* О модулях с наследственными кольцами эндоморфизмов // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 4. С. 159–160.
10. *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Comm. Algebra. 1994. V. 22, N 4. P. 1161–1176.
11. *Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W.* The flat dimension of mixed abelian groups as E-modules // Rocky Mountain J. Math. 1995. V. 25, N 11. P. 569–590.
12. *Albrecht U. F.* Mixed Abelian groups with Artinian quasi-endomorphism ring // Comm. Algebra. 1997. V. 25. P. 3497–3511.
13. *Fomin A., Wickless W.* Self-small mixed Abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Comm. Algebra. 1998. V. 26. P. 3563–3580.
14. *Крылов П. А.* Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, № 3. С. 793–812.
15. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г., Подберезина Е. И.* Об одном классе смешанных абелевых // Вестн. Томск. ун-та. 2000. Т. 269. С. 29–34.
16. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г.* Абелевы группы и регулярные модули // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 402–411.
17. *Wickless W.* A functor from mixed group to torsion-free group // Contemp. Math. 1995. V. 171. P. 407–419.
18. *Fomin A., Wickless W.* Categories of mixed and torsion-free finite rank Abelian group // Abelian Groups and Modules. Boston: Kluwer, 1995. P. 185–192.
19. *Fomin A., Wickless W.* Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 1. P. 45–52.
20. *Warfield R. B. Jr.* The structure of mixed Abelian groups // Lecture Notes Math. 1977. V. 616. P. 1–38.
21. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977 (Т. 1), 1979 (Т. 2).
22. *Fomin A. A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules, Trends in Math. 1999. P. 87–100.
23. *Pierce R. S.* E-modules // Contemp. Math. 1989. V. 87. P. 221–240.
24. *Крылов П. А., Приходовский М. А.* Обобщенные T-модули и E-модули // Универсальная алгебра и ее приложения: Тр. междунар. семинара, посвященного памяти Л. А. Скорнякова. Волгоград, 2000. С. 153–169.
25. *Arnold D. M., Murley C. E.* Abelian groups A, such that $\mathrm{Hom}(A,-)$ preserves direct sums of copies of A // Pacific J. Math. 1975. V. 56, N 1. P. 7–20.
26. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.
27. *Пунинский Г. Е., Туганбаев А. А.* Кольца и модули. М.: Союз, 1998.
28. *Albrecht U. F.* Abelian groups flat as modules over their endomorphism ring // Comm. Algebra. 1993. V. 21. P. 3403–3423.
29. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
30. *Osofsky B. L.* Noninjective cyclic modules // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19. P. 1383–1384.
31. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. Киев: Вища школа, 1980.
32. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г.* Абелевы группы как инъективные модули над кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1365–1384.

Статья поступила 28 февраля 2001 г.

Крылов Петр Андреевич
Томский гос. университет, механико-математический факультет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
krylov@ctc.tsu.ru