Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.53

О КОЭФФИЦИЕНТНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ПРОСТРАНСТВ БЛОХА И ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ

Р. Ф. Шамоян

Аннотация: Получено полное описание пространств коэффициентных мультипликаторов, действующих из пространств со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}$ и из классов Харди H^p в пространства Блоха в поликруге, а также из классов Харди H^p в H^q при $0 < p < 1$, $p < q \leq \infty$. Библиогр. 18.

Введение

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех голоморфных в D функций, $B(D)$ — класс Блоха в круге D:

$$B(D) = \{f \in H(D) : \|f\|_B = \sup_{z \in D}(1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty\}.$$

Хорошо известно, что различные свойства функций из пространств Блоха играют основополагающую роль в теории однолистных функций и в теории конформных отображений (см. [1–4]).

Классы Блоха вводились и изучались различными авторами и в многомерных областях в $\mathbb{C}^n$ (в шаре, в поликруге) (см. [4–6]). При этом выяснилось, что естественные аналоги пространств Блоха в поликруге D^n не обладают многими свойствами класса Блоха в круге D (см. [4]).

Одна из целей работы — нахождение таких аналогов пространств $B(D)$ в поликруге, на которые можно перенести некоторые утверждения недавно появившейся статьи [7], касающиеся коэффициентных мультипликаторов в классы Блоха. Оказалось, что метод, предложенный в работе автора (см. [8]), позволяет проводить прямые и более простые доказательства выше упомянутых результатов, причем при надлежащем выборе классов Блоха в D^n сразу в случае поликруга.

Применяя тот же подход во второй части заметки, мы получим полное описание мультипликаторов из класса Харди $H^p(D^n)$ в $H^q(D^n)$ при $0 < p < 1$, $0 < p < q \leq \infty$. При $n = 1$ другим методом этот результат получен в [9]. Отметим также, что мультипликаторам классов Харди посвящено большое количество работ (см. [4, 9]). Результаты о коэффициентных мультипликаторах различных классов аналитических функций, в частности пространств Харди $H^p(D^n)$, в поликруге начали появляться совсем недавно (см. [8, 10]).

Для формулировки основных утверждений работы введем обозначения и сформулируем основные определения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00992).

Пусть $D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| < 1,\ j = 1, \dots, n\}$ — единичный поликруг комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n),\ |z_j| = 1,\ j = 1, \dots, n\}$ — его остов, $I^n = [0, 1)^n$, $H(D^n)$ — множество всех голоморфных в D^n функций. Далее, пусть

$$M_p(f, R) = \Bigg(\int\limits_{T^n} |f(R\xi)|^p \, dm_n(\xi) \Bigg)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$M_\infty(f, R) = \sup_{\substack{|z_j| = R_j \\ j = 1, \dots, n}} |f(z)|, \quad R \in I^n,$$

где $m_n(\xi)$ — мера Лебега на T^n, $Rz = (R_1 z_1, \dots, R_n z_n)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $R \in I^n$,

$$|z - \xi|^\gamma = \prod_{k=1}^{n} |z_k - \xi_k|^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R},\ \xi, z \in \mathbb{C}^n,\ \xi_k \neq z_k,\ k = 1, \dots, n,$$

$m_{2n}(w)$ — $2n$-мерная мера Лебега на D^n, $Z_+^n = Z_+ \times \dots \times Z_+$, $Z_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $dr = dr_1 \dots dr_n$.

Введем классы $H^{p,q,\alpha}(D^n)$:

$$H^{p,q,\alpha}(D^n) = \Bigg\{ f \in H(D^n) : \|f\|^q_{H^{p,q,\alpha}} = \int\limits_{I^n} M_p^q(f, r)(1 - r)^{\alpha q - 1} \, dr < \infty,$$
$$0 < q < \infty,\ 0 < p \le \infty,\ 0 < \alpha < \infty \Bigg\},$$

$$H^{p,\infty,\alpha}(D^n) = \{ f \in H(D^n) : \|f\|_{H^{p,\infty,\alpha}} = \sup_{r \in I^n} M_p(f, r)(1 - r)^\alpha < \infty,$$
$$0 < \alpha < \infty,\ 0 < p \le \infty \}.$$

Свойства пространств со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}(D)$ и их аналогов в поликруге или в шаре B^n пространства $\mathbb{C}^n$ хорошо изучены (см. [4, 7, 11]). Легко видеть, что $H^{p,\infty,0}(D^n)$ и $H^{p,p,\alpha}(D^n)$ — классы Харди и Бергмана — Джрбашяна в поликруге D^n соответственно. Далее

$$(\mathfrak{D}^\alpha f)(z),\ (D^\alpha f)(z), \quad f \in H(D^n),\ f(z) = \sum_{|k| \ge 1} a_k z^k$$

— операторы дробного дифференцирования (см. [11, 12]):

$$(\mathfrak{D}^\alpha f)(z) = \sum_{|k| \ge 0} (k + 1)^\alpha a_k z^k,\ \alpha \ge 0, \quad (k + 1)^\alpha = \prod_{j=1}^{n} (k_j + 1)^\alpha;$$

$$(D^\alpha f)(z) = \sum_{|k| \ge 0} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k,\ \alpha \ge 0,\ \Gamma(k + \alpha + 1) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(k_j + \alpha + 1).$$

Легко видеть, что $(\mathfrak{D}^\alpha f)(z)$ и $(D^\alpha f)(z) \in H(D^n)$, если $f \in H(D^n)$, и что

$$(\mathfrak{D} f)(z) = \frac{\partial^n (z_1 \dots z_n f(z))}{\partial z_1 \dots \partial z_n}, \quad \mathfrak{D}^m f = \mathfrak{D}^{m-1}(\mathfrak{D} f), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Введем операторы $D^{-\alpha}$ и $\mathfrak{D}^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, так, что

$$\mathfrak{D}^{-a}(\mathfrak{D}^\alpha f) = f, \quad D^{-a}(D^\alpha f) = f, \quad \alpha \ge 0.$$

Определение. Пусть X и Y — подпространства $H(D^n)$. Говорят, что последовательность комплексных чисел $(c_k)_{k\in Z_+^n}$ является *мультипликатором из X в Y*, если для любой функции $f\in H(D^n)$, $f(z)=\sum\limits_{|k|\geq 0} a_kz^k$, функция h, $h(z)=\sum\limits_{|k|\geq 0} c_ka_kz^k$, принадлежит Y. Множество всех мультипликаторов из X в Y обозначим через $M_T(X,Y)$. Введем классы Блоха $Bl(D^n)$, $B_\alpha(D^n)$ и $B(D^n)$ в поликруге D^n:

$$Bl(D^n)=\{f\in H(D^n):\|f\|_{Bl}=\sup_{r\in I^n} M_\infty(Df,r)(1-r)<\infty\},$$
$$B_\alpha(D^n)=\{f\in H(D^n):=\sup_{r\in I^n} M_\infty(\mathfrak{D}^\alpha f,r)(1-r)^\alpha<\infty\},\quad 0<\alpha<\infty,$$
$$B(D^n)=\bigcup_{\alpha>0} B_\alpha(D^n).$$

Отметим также, что «нормы» для классов Блоха в поликруге можно вводить и другим способом, например,

$$\|f\|=\sup_{z\in D^n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\right|(1-|z_1|)\dots(1-|z_j|)<\infty,\quad j=1,\dots,n,$$

или

$$\|f\|=\sup_{z\in D^n}|D^nf(z)|(1-|z_n|)<\infty.$$

Легко видеть, что при $n=1$ в силу результатов [11] и леммы 1.4 работы [7] $Bl(D)=B_\alpha(D)=B(D)=B_\beta(D)$ для любых $\alpha,\beta>0$, $B(D)$ — обычные классы Блоха в круге D.

Нетрудно показать также, что имеет место включение $B_\alpha(D^n)\subset B_\beta(D^n)$, $\beta>\alpha>0$, $n\in\mathbb{N}$. Рассмотрим для простоты случай двух переменных. Учитывая, что верна оценка (см., например, [13])

$$M_\infty(\mathfrak{D}^\alpha f,r)\leq c(\alpha)(1-r)^{-\alpha}M_\infty(f,r),\quad f\in H(D),\ \alpha>0,$$

и очевидное равенство

$$(\mathfrak{D}^{\alpha+\beta}f)(z)=\mathfrak{D}^\alpha(\mathfrak{D}^\beta f)(z),\quad \alpha,\beta>0,\ f\in H(D^n),$$

выводим:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{r_1\in I,\\ r_2\in I}}\Big(\sup_{\substack{|z_1|=r_1,\\ |z_2|=r_2}}\big|\mathfrak{D}^\beta_{z_1}\mathfrak{D}^\beta_{z_2}f(z_1,z_2)\big|\Big)(1-r_1)^\beta(1-r_2)^\beta\\
&\qquad=\sup_{r_1\in I}\sup_{|z_1|=r_1}\Big(\sup_{r_2\in I}\sup_{|z_2|=r_2}\big|\mathfrak{D}^\beta_{z_2}\big(\mathfrak{D}^\beta_{z_1}f(z_1,z_2)\big)\big|(1-r_2)^\beta\Big)(1-r_1)^\beta\\
&\qquad=\sup_{r_1\in I}\sup_{|z_1|=r_1}\Big(\sup_{r_2\in I}\sup_{|z_2|=r_2}\big|\mathfrak{D}^{\beta-\alpha}_{z_2}\mathfrak{D}^\alpha_{z_2}\big(\mathfrak{D}^\beta_{z_1}f(z_1,z_2)\big)\big|(1-r_2)^\beta\Big)(1-r_1)^\beta\\
&\qquad\leq c(\beta,\alpha)\sup_{r_1\in I}\sup_{|z_1|=r_1}\Big(\sup_{r_2\in I}\sup_{|z_2|=r_2}\big|\mathfrak{D}^\alpha_{z_2}\big(\mathfrak{D}^\beta_{z_1}f(z_1,z_2)\big)\big|(1-r_2)^\alpha\Big)(1-r_1)^\beta\\
&\qquad=c(\beta,\alpha)\sup_{r_2\in I}\sup_{|z_2|=r_2}\Big(\sup_{r_1\in I}\sup_{|z_1|=r_1}\big|\mathfrak{D}^{\beta-\alpha}_{z_1}\mathfrak{D}^\alpha_{z_1}\big(\mathfrak{D}^\alpha_{z_2}f(z_1,z_2)\big)\big|(1-r_1)^\beta\Big)(1-r_2)^\alpha\\
&\qquad\qquad\leq c_1(\beta,\alpha)\sup_{r\in I^2}M_\infty(\mathfrak{D}^\alpha f,r_1,r_2)(1-r_1)^\alpha(1-r_2)^\alpha.
\end{aligned}$$

§ 1. Описание мультипликаторов из классов Харди $H^p(D^n)$ и из пространств со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}(D^n)$ в пространства $B_\alpha(D^n)$ и $B(D^n)$

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 1. 1. *Пусть $0 < p \le 1$. Тогда последовательность $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\}$ принадлежит классам $M_T(H^p(D^n))$, Bl в том и только том случае, если*

$$\sup_{r\in I^n} M_\infty(DD^{\beta+1/p-2}g, r)(1-r)^\beta < \infty, \tag{1}$$

где

$$1 < \beta < \infty, \quad g(z) \in H(D^n), \quad g(z) = \sum_{|k|\ge 0} c_k z^k.$$

2. *Пусть $\beta > 0$, $1 < p < \infty$. Тогда $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\} \in M_T(H^p(D^n), B_\beta(D^n))$ в том и только том случае, если*

$$\sup_{r\in I^n} M_{p'}(\mathfrak{D}^\beta g, r)(1-r)^\beta < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \tag{2}$$

где

$$g \in H(D^n), \quad g(z) = \sum_{|k|>0} c_k z^k.$$

Теорема 2. 1. *Пусть $0 < \alpha < \infty$, $0 < p \le 1$, $0 < q \le 1$. Тогда последовательность $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\}$ принадлежит классам $M_T(H^{p,q,\alpha}(D^n))$, $Bl(D^n)$ в том и только том случае, если*

$$\sup_{r\in I^n} M_\infty(DD^{\beta+\alpha+1/p-2}g, r)(1-r)^\beta < \infty, \tag{3}$$

где $\beta > 1$ — некоторое число.

2. *Пусть $0 < \alpha < \infty$, $1 < q, p < \infty$, $S = \beta + \alpha$, $\beta > \{\alpha(q-1)\}$. Тогда последовательность $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\}$ принадлежит классам $M_T(H^{p,q,\alpha}(D^n)$, $B_S(D^n)$ в том и только том случае, если*

$$\sup_{r\in I^n} M_{p'}(\mathfrak{D}^{\beta+\alpha}g, r)(1-r)^\beta < \infty, \tag{4}$$

где

$$g(z) = \sum_{|k|\ge 0} c_k z^k, \quad g \in H(D^n).$$

Замечание 1. Из результатов работ [7, 11] нетрудно вывести, что при $n = 1$ пространства мультипликаторов $M_T(H^p, Bl)$, $0 < p < \infty$, и $M_T(H^{p,q,\alpha}, Bl)$ при $0 < p \le 1$, $0 < q \le 1$ $(1 < q,\ p < \infty)$, описанные в теоремах 1 и 2, совпадают с соответствующими пространствами, описание которых дано в работе [7]. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться нижеследующей леммой 2 и учесть, что

$$\mathfrak{D}^\alpha(\mathfrak{D}^\beta g(z)) = \mathfrak{D}^{\alpha+\beta} g(z)(\mathfrak{D}^\alpha D^\beta)g(z) = (D^\beta\mathfrak{D}^\alpha)g(z) = D^\beta(\mathfrak{D}^\alpha g(z)), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Замечание 2. Методами, применяемыми в доказательствах теорем 1 и 2, по-видимому, можно получить также описание пространств $M_T(H^{p,q,\alpha}(D^n), X)$, где X — одно из введенных выше классов Блоха в D^n, а $1 < q < \infty$, $0 < p \le 1$ или $1 < p < \infty$, $0 < q \le 1$. В дальнейшем через C, $C(\alpha)$, C_1, $C_2(p)$ мы обозначаем различные положительные константы.

Для доказательства теорем нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Справедливы следующие оценки:*

$$\left\|\frac{1}{(1-rz)^{S+1}}\right\|_{H^p(D^n)} \le \frac{C(p,\beta)}{(1-r)^{S+1-1/p}}, \quad r\in I^n,\ S>1/p-1,$$

$$1-zr=\prod_{k=1}^{n}(1-r_kz_k), \quad z_k\in D,\ k=1,\dots,n;$$

$$\left\|\frac{1}{(1-rz)^{\gamma}}\right\|_{H^{p,q,\alpha}(D^n)} \le \frac{C(p,q,\alpha,\gamma)}{(1-r)^{\beta-1}},$$

$$r\in I^n,\ 0<p,\ q<\infty,\ 0<\alpha<\infty,\ \gamma=\beta+\alpha+1/p-1,\ \beta>1.$$

Доказательство оценок леммы следует непосредственно из хорошо известных оценок (см. [12])

$$\int_0^1 (1-\rho r)^{-\lambda}(1-r)^{\alpha}\,dr \le c(\lambda,\alpha)(1-\rho)^{-\lambda+\alpha+1}, \quad \rho\in I,\ \lambda>\alpha+1,\ \alpha>-1,$$

$$\int_T \frac{dm(\varphi)}{|1-re^{i\varphi}|^{\gamma}} \le \frac{C(\gamma)}{(1-r)^{\gamma-1}}, \quad \gamma>1,\ r\in I. \tag{5}$$

Введем пространства

$$H_S^{p,q,\alpha}(D^n)=\{f\in H(D^n):\|\mathfrak{D}^S f\|_{H^{p,q,\alpha}}<\infty,\ S\in\mathbb{R}\}.$$

Лемма 2. 1. *Пусть $t>0$, $g\in H(D)$. Тогда $D^t g\in H^{p,q,\alpha}(D)$, $0<p$, $q<\infty$, $0<\alpha<\infty$, в том и только том случае, если $\mathfrak{D}^t g\in H^{p,q,\alpha}(D)$.*

2. *Пусть $\alpha,\beta>0$, $\alpha-\beta=S-t$, $s,t\in\mathbb{R}$, $0<p$, $q\le\infty$. Тогда $H_S^{p,q,\alpha}(D)=H_t^{p,q,\beta}(D)$.*

3. *Пусть $f,g\in H(D^n)$, $\alpha>0$. Тогда*

$$\left|\int_{T^n}\overline{g(rt)}f(rt)\,dm_n(t)\right| \le C(r,\alpha)\int_{D^n}|\mathfrak{D}^{\alpha}g(w)|\,|f(w)|(1-|w|)^{\alpha-1}\,dm_{2n}(w),$$

причем $C(r,\alpha)\to C(\alpha)$ при $r\to1$.

Доказательство утверждений 1–3 приведены в [11, 7, 14] соответственно.

Лемма 3. *Пусть $g\in H(D^n)$, $0<p$, $q\le1$, $X=H^{p,q,\alpha}(D^n)$ или $F_\alpha^{p,q}(D^n)$, где*

$$F_\alpha^{p,q}(D^n)=\left\{f\in H(D^n),\ \|f\|^p_{F_\alpha^{p,q}(D^n)} = \int_{T^n}\left(\int_{I^n}|f(R\xi)|^q(1-R)^{\alpha q-1}\,dR\right)^{p/q}dm_n(\xi)<\infty, \quad 0<p,q,\alpha<\infty\right\}.$$

Тогда

$$\int_{D^n}|f(w)|(1-|w|)^{\alpha+1/p-2}\,dm_{2n}(w)\le c\|f\|_X, \quad f\in X.$$

Доказательство. Утверждение леммы доказано в [8] при $X=F_\alpha^{pq}(D^n)$. При $X=H^{p,q,\alpha}_{(D^n)}$ рассуждения не претерпевают значительных изменений.

Лемма 4. 1. *Пусть $(B_\gamma(D^n))^*$ — пространство всех линейных непрерывных функционалов класса $B_\gamma(D^n)$. Тогда каждая функция из класса $H_1^{1,1,1}(D^n)$ порождает линейный непрерывный функционал в пространстве $B_\gamma(D^n)$.*

2. Имеет место оценка

$$\int\limits_{D^n} |f(w)|(1-|w|)^{1/p-2}\,dm_{2n} \le C(p)\|f\|_{H^p}, \quad f \in H^p(D^n),\ 0<p<1.$$

Доказательство. 1. Покажем, что любая функция $f \in H_1^{1,1,1}(D^n)$ порождает линейный непрерывный функционал на $B_\gamma(D^n)$ по формуле

$$\Phi_f(g) = \lim_{r\to1}\int\limits_{T^n} g(rt)\overline{f(rt)}\,dm_n(t), \quad g\in B_\gamma(D^n).$$

Действительно, проводя стандартные рассуждения и учитывая лемму 2, получим

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{T^n}\overline{f(rt)}g(rt)\,dm_n(t)\right| &= \left|\int\limits_{T^n}\overline{(\mathfrak{D}f(rt))}\mathfrak{D}^{-1}g(rt)\,dm_n(t)\right|\\ &\le C(r,\gamma)\int\limits_{D^n}|\mathfrak{D}^\gamma g(w)|\,|\mathfrak{D}f(w)|(1-|w|)^\gamma\,dm_{2n}(w),\end{aligned}$$

где $C(r,\gamma)\to C_1(\gamma)$ при $r\to1$. Отсюда $|\Phi_f(g)|\le C\|g\|_{B_\gamma(D^n)}\|f\|_{H_1^{1,1,1}(D^n)}$.

2. См. [14].

Лемма 5. *Пусть $0<p,\ q<\infty$, $f\in H^{p,q,\alpha}(D^n)$. Тогда*

$$M_p(f,r)(1-r)^\alpha \le c\|f\|_{H^{p,q,\alpha}}, \quad r\in I^n,$$

для некоторой константы c.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}Q &= M_p(f,r_1,\dots,r_n)(1-r_1)^\alpha\dots(1-r_n)^\alpha\\ &\le C\Biggl(\int\limits_{1-2^{k_{s,1}-1}}^{1-2^{-k_{s,1}-2}}\cdots\int\limits_{1-2^{k_{s,n}-1}}^{1-2^{-k_{s,n}-2}} M_p^q(f,r_1,\dots,r_n)\\ &\qquad\times(1-r_1)^{\alpha q}\dots(1-r_n)^{\alpha q}\,dR_1\dots dR_n(2^{k_{s,1}+\dots+k_{s,n}})\Biggr)^{1/q},\end{aligned}$$

где $k_{s,j}\to\infty$ при $s\to\infty$; $j=1,\dots,n$, $r_j\in[1-2^{-k_{s,j}};1-2^{-k_{s,j}-1})$; $j=1,\dots,n$. Далее,

$$Q^q \le C_1\int\limits_{1-2^{k_{s,1}-1}}^{1-2^{-k_{s,1}-2}}\cdots\int\limits_{1-2^{k_{s,n}-1}}^{1-2^{-k_{s,n}-2}} M_p^q(f,R)(1-R)^{\alpha q-1}\,dR \le C_2\|f\|^q_{H^{p,q,\alpha}}.$$

В силу неравенств $M_p(f,R_1)\le M_p(f,R_2)$, $f\in H(D^n)$, $R_k=\bigl(R_k^1,\dots,R_k^n\bigr)$, $k=1,2$, $R_k\in I^n$, $k=1,2$, $R_1^j\le R_2^j$, $j=1,\dots,n$. Лемма 5 доказана.

Доказательство теорем 1 и 2. Доказательство необходимости условий (1) и (3) следует из леммы 1 и из теоремы о замкнутом графике. Докажем, к примеру, необходимость условия (3).

Пусть

$$f_r(z) = \frac{1}{(1-rz)^{\gamma}}, \quad r \in I^n, \ \gamma = \beta + \alpha + 1/p - 1, \ \beta > 1.$$

Тогда функцию

$$h(z) = \sum_{|k|\geq 0} a_k c_k z^k,$$

где

$$f_r(z) = \sum_{|k|\geq 0} a_k z^k r^k, \quad g(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k z^k,$$

можно представить в виде $h_r(z) = D^{\gamma-1} g_r(z)$. Следовательно, используя теорему о замкнутом графике и оценку леммы 1, получаем

$$\sup_{R\in I^n} M_\infty(D(D^{\beta+\alpha+1/p-2} g_r), R)(1-R)$$
$$= \|D^{\beta+\alpha+1/p-2} g_r\|_{Bl(D^n)} \leq C\|f_r(z)\|_{H^{p,q,\alpha}} \leq \frac{C_1}{(1-r)^{\beta-1}}.$$

Отсюда учитывая, что $f(r) \leq \sup\limits_{R\in I^n} f(R)$, где $r \in I^n$ любое, выводим

$$\sup_{r\in I^n} M_\infty(D(D^{\alpha+\beta+1/p-2} g), r)(1-r)^{\beta} < \infty,$$

и условие (3) установлено. Аналогично, используя оценку 1 леммы 1, можно вывести необходимость условия (1). Докажем необходимость условия (2). Заметим для этого, что если оператор

$$T_g : T_g(f) = h, \quad h(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{|k|\geq 0} a_k z^k$$

действует из X в Y, где X, Y — квазинормированные подпространства $H(D^n)$, то сопряженный к нему оператор $(T_g)^*$ действует из Y^* в X^* по тому же правилу:

$$(T_g)^* \tilde{f} = \tilde{h}, \quad \tilde{h} \in X^*, \ \tilde{f} \in Y^*, \ \tilde{h}(z) = \sum_{|k|\geq 0} c_k \tilde{a}_k z^k, \ f(z) = \sum_{|k|\geq 0} \tilde{a}_k z^k$$

(X^* и Y^* — сопряженные пространства к классам X и Y соответственно). Следовательно, T_g — ограниченный оператор из $(B_\beta(D^n))^*$ в $H^{p'}(D^n)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Поэтому по лемме 4 T_g действует ограниченно из $H_1^{1,1,1}(D^n)$ в $H^{p'}(D^n)$. Остается, используя теорему о замкнутом графике, провести рассуждения, аналогичные проведенным выше при доказательстве необходимых условий (1) и (3), и учесть при этом, что из оценок (5) и леммы 2 следует

$$\|f_r(z)\|_{H_1^{1,1,1}} = \left\|\mathfrak{D}^{\beta} \frac{1}{(1-rw)}\right\|_{H_1^{1,1,1}(D^n)} = \prod_{k=1}^{n} \left\|\mathfrak{D}^{\beta} \frac{1}{1-r_k w_k}\right\|_{H_1^{1,1,1}}$$
$$\leq \left\|\frac{1}{(1-rw)^{\beta+1}}\right\|_{H_1^{1,1,1}(D^n)} \leq C(\beta) \int_{D^n} \frac{dm_{2n}(w)}{|1-rw|^{\beta+2}} \leq \frac{C_1}{(1-r)^{\beta}}, \quad \beta > 0.$$

Установим, наконец, необходимость условия (4). Для доказательства воспользуемся описанием сопряженного пространства класса $H^{p,q,\alpha}(D^n)$:

$$(H^{p,q,\alpha}(D^n))^* = \{g \in H(D^n) : \mathfrak{D}^{A+1} g \in H^{p',q',(A+1)/q'}\}, \tag{6}$$

где $\alpha q - 1 = A$, $1 < q$, $p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$; $1/q + 1/q' = 1$, а X^*, как и выше, пространство, сопряженное к подпространству $X \subset H(D^n)$. При $n = 1$ равенство (6) приведено в [15], при $p = q$, $n \in \mathbb{N}$ — в [12]. Вышеприведенное равенство в полидиске нетрудно установить стандартным наращиванием общего числа переменных (см. [16]). Используя п. 1 леммы 4 при $\gamma = \alpha + \beta$ и применяя соображения двойственности, аналогичные приведенным выше, и лемму 5, выводим оценки

$$M_{p'}(\mathfrak{D}^{A+1}(\mathfrak{D}^\gamma g), r) \le C(1-r)^{\frac{\alpha q}{q'}} \|\mathfrak{D}^{\gamma+A+1} g_r\|_{H^{p'q'}_{(A+1)/q'}}$$
$$\le C_1 (1-r)^{\frac{\alpha q}{q'}} \int\limits_{D^n} \mathfrak{D}(f_r(z))\, dm_{2n}(z),$$

где

$$f(z) = \sum_{k_1,\dots,k_n \ge 0} (k+1)^\gamma z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} = \mathfrak{D}^\gamma \left(\frac{1}{1-z}\right), \quad \gamma > 0.$$

Из лемм 1 и 2 имеем

$$\int\limits_{D^n} |\mathfrak{D} f_r(z)|\, dm_{2n}(z) \le C_1 \prod_{k=1}^n \int\limits_D \left| \mathfrak{D}^{\gamma+1} \frac{1}{(1 - r_k z_k)} \right| dm_2(z)$$
$$\le C_2 \int\limits_{D^n} \frac{1}{|1 - rz|^{\gamma+2}}\, dm_{2n}(z) \le C_3 (1-r)^\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Следовательно, получаем $M_{p'}(\mathfrak{D}^{\alpha q}(\mathfrak{D}^\gamma g), r)(1-r)^{\gamma + \alpha q/q'} < C$, что равносильно условию

$$\sup_{r \in I^n} M_{p'}(\mathfrak{D}^{\alpha+\beta} g, r)(1-r)^\beta < \infty,$$

где $\beta = \gamma + \alpha q - \alpha > \alpha q - \alpha$. Необходимость условия (4) установлена.

Займемся доказательством достаточности условий (1)–(4) в теоремах 1, 2. Заметим, что если

$$f(z) = \sum_{|k| \ge 0} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{|k| \ge 0} c_k z^k,$$

то

$$h(z) = \sum_{|k| \ge 0} c_k a_k z^k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(r\bar{t}) g(rt\xi)\, dm_n(t), \quad z = r^2 \xi,\ z \in D^n.$$

Достаточность условия (2) следует из цепочки соотношений

$$\mathfrak{D}^\beta h(rz) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \mathfrak{D}^\beta g_r(\bar{t}) f(tz)\, dm_n(t);$$

$$|\mathfrak{D}^\beta h(rz)|(1-r)^\beta \le \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int\limits_{T^n} |f(tz)|^p\, dm_n(t) \right)^{1/p}$$
$$\times \left(\int\limits_{T^n} |\mathfrak{D}^\beta g_r(\bar{t})|^{p'}\, dm_n(t) \right)^{1/p'} (1-r)^\beta \le C \|f\|_{H^p(D^n)}.$$

Для доказательства достаточности условия (1) воспользуемся равенством, установленным в работе [8] при $\gamma = m \in \mathbb{N}$. В общем случае доказательство проходит аналогичным образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f_\rho(rt)g_\xi(r\bar{t})\,dm_n(t)$$
$$= \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^n r_1^{-2\gamma}\dots r_n^{-2\gamma}\int\limits_0^{r_1}\cdots\int\limits_0^{r_n}\int\limits_{T^n} f_\rho(R\bar{t})D^\gamma g_\xi(Rt)(1-R)^{\gamma-1}\,dm_n(\xi), \quad (7)$$

$\gamma > 0$, $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $\rho \in I^n$. Учитывая (7), получаем

$$h(\rho\xi r^2) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f_\rho(r\bar{t})g_\xi(rt)\,dm_n(t), \quad r \in I^n,\ \rho \in I^n,\ \xi \in T^n,$$

$$|Dh_\rho(r^2\xi)| \le C(r,\beta,p)\int\limits_0^{r_1}\cdots\int\limits_0^{r_n}\int\limits_{T^n}|D(D^{\beta+1/p-2}g_\xi)(w)|$$
$$\times |f_\rho(\bar{w})|(1-|w|)^{\beta+1/p-3}\,dm_{2n}(w), \quad \beta > 1,\ 0 < p \le 1. \quad (8)$$

Далее, подбираем параметры ρ_j и r_j так, что $1-\rho_j \le 1-r_j$; $j = 1,\dots,n$. Тогда из (8) вытекает оценка

$$|Dh_p(r^2\xi)|(1-\rho) \le C_3(r,\beta,p)\int\limits_0^{r_1}\cdots\int\limits_0^{r_n} M_1(f,|w|)$$
$$\times (1-|w|)^{1/p-3}|w|d|w_1|\dots d|w_n|(1-\rho)$$
$$\le C_3(r,\beta,p)\int\limits_0^{r_1}\cdots\int\limits_0^{r_n} M_1(f,|w|)(1-|w_1|)^{1/p-2}\dots(1-|w_n|)^{1/p-2}$$
$$\times |w_1|\dots|w_n|d|w_1|\dots d|w_n| \le C_4(r,\beta,p)\|f\|_{H^p(D^n)}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 4. Остается в полученном неравенстве перейти к супремуму и к пределу при $r_j \to 1$, $j = 1,\dots,n$, $\|h\|_{Bl(D^n)} \le c\|f\|_{H^p(D^n)}$, $0 < p < 1$. Для доказательства утверждений теорем осталось установить достаточность условий (3) и (4). Учитывая равенства

$$Dh(r^2z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f(rt)(Dg_r(\bar{t}z))\,dm_n(t),\ r \in I^n,\ z \in D^n,\ |z_j| > r,\ j = 1,\dots,n;$$

$Dg_r(z) = Dg(rz)$ и (7), выводим

$$|Dh(r^2z)| \le C(\alpha,\beta,p,r)\int\limits_0^{r}\cdots\int\limits_0^{r}|f(\bar{w})|\,|D^{\beta+\alpha+1/p-2}(Dg_z)(w)|$$
$$\times (1-|w|)^{\beta+\alpha+1/p-3}\,dm_{2n}(w), \quad \beta > 1,\ 0 < p \le 1,\ 0 < \alpha < \infty.$$

Умножим обе части полученного неравенства на $\prod\limits_{j=1}^n(1-|z_j|)$. Из очевидных оценок $1-|z_j| < 1-r < 1-|w_j|$, $j = 1,\dots,n$, следует, что

$$|Dh(r^2z)|(1-|z|) \le C(\alpha,\beta,p,r)\sup_{\rho\in I^n}(M_\infty(D(D^{\beta+\alpha+1/p-2}g),\rho)(1-\rho)^\beta)$$
$$\times \int\limits_{D^n}|f(w)|(1-|w|)^{\alpha+1/p-2}\,dm_{2n}(w).$$

Остается воспользоваться леммой 3 и перейти к пределу при $r \to 1$: $\|h\|_{Bl(D^n)} \le c\|f\|_{H^{p,q,\alpha}(D^n)}$. При $\max(p,q) \le 1$ утверждение теоремы 2 установлено.

Замечание. Аналогичными рассуждениями легко установить следующий результат:

$$\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\} \in M_T\big(F_\alpha^{p,q}(D^n), Bl(D^n)\big), \quad 0 < \max(p,q) \le 1,$$

тогда и только тогда, когда

$$\sup_{r\in I^n} M_\infty(D(D^{\beta+\alpha+1/p-2}g), r)(1-r)^\beta < \infty,$$

где $\beta > 1$ — некоторое число. Отметим также, что применяемыми в данной работе методами нами получены многие утверждения работы [7] о коэффициентных мультипликаторах, действующих между классами $H^{p,q,\alpha}$ в D^n (см. [17]). Достаточность условия (4) вытекает из следующих оценок:

$$|\mathfrak{D}^\nu h(r^2\xi)|(1-r)^\nu \le \left(\int\limits_{T^n} |\mathfrak{D}^{\nu-\alpha q-\gamma} f(r\xi)|^p\, dm_n(\xi)\right)^{1/p}$$
$$\times \left(\int\limits_{T^n} |\mathfrak{D}^{\alpha q+\gamma} g(r\xi)|^{p'}\, dm_n(\xi)\right)^{1/p'} (1-r)^\nu$$
$$\le C_4 M_p(\mathfrak{D}^{\nu-\alpha q-\gamma} f, r)(1-r)^{\nu-\alpha q/q'-\gamma} M_{p'}(\mathfrak{D}^{\alpha q+\gamma} g, r)(1-r)^{\alpha q/q'+\gamma}.$$

Остается положить $\nu = \alpha q + \gamma$, $\gamma = \beta + \alpha - \alpha q$ и использовать оценку леммы 5 $M_{p'}(f,r)(1-r)^\alpha \le C\|f\|_{H^{p,q,\alpha}}$, $r \in I^n$.

Теоремы 1 и 2 доказаны полностью.

Установим еще одно утверждение о коэффициентных мультипликаторах пространств Блоха в поликруге.

Теорема 3. *Пусть $g \in H(D^n)$, $g(z) = \sum\limits_{|k|\ge 0} c_k z^k$. Тогда*

1) $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\} \in M_T(H^\infty, Bl)$ *в том и только том случае, если*

$$\sup_{r\in I^n} M_1(DD^\beta f, r)(1-r)^{\beta+1} < \infty, \tag{9}$$

где β — некоторое положительное число.

2) $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\} \in M_T(B, B)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{r\in I^n} M_1(\mathfrak{D}^\beta f, r)(1-r)^\beta < \infty \tag{10}$$

для некоторого $\beta > 0$.

Замечание. Используя результаты работы [7] и лемму 2, легко показать, что пространства $M_T(B,B)$ и $M_T(H^\infty, Bl)$ при $n = 1$ совпадают с соответствующими пространствами, описание которых дано в работе [7].

Доказательство теоремы 3. 1. Докажем сначала необходимость условия (9). Заметим сначала, что

$$\sup_{|z|<1} |f_w(z)| \le \sup_{|z|\le 1} |f_w(z)| = |f_w(z_0)|,$$

где $z_0 \in T$, $f \in H(D)$, $w \in D$. Следовательно,

$$\sup_{\substack{|z_j|<1\\ j=1,\dots,n}} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{|1-w_k z_k|^{\beta+1}}\right) \le \prod_{k+1}^n \frac{1}{|1-w_k z_k^0|^{\beta+1}}, \quad w_k \in D,\ z_k^0 \in T,\ k = 1,\dots,n.$$

Поэтому, применив теорему о замкнутом графике, выводим

$$|DD^\beta g_w(z)|(1-|z|) \le c\left\|\frac{1}{(1-wz)^{\beta+1}}\right\|_{H^\infty(D^n)} \le c\prod_{k+1}^{n}\frac{1}{|1-w_k z_k^0|^{\beta+1}},$$

где $\beta>0$, $z_k^0\in T$, $w_k\in D$, $k=1,\dots,n$. Проинтегрируем обе части неравенства по T^n:

$$\int\limits_{T^n}|DD^\beta g_w(z)|\,dm_n(\xi)(1-|z|)\le c\int\limits_{T^n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\left|1-w_k z_k^0\right|^{\beta+1}}\right)dm_n(\xi),$$

$w_k=\xi_k r_k$, $k=1,\dots,n$. Далее,

$$M_1(DD^\beta g,|w|\,|z|)(1-|z|)\le\frac{C}{(1-|w|)^\beta}.$$

Остается положить $|z_k|=|w_k|$, $k=1,\dots,n$, $w_k=\xi_k r_k$. Тогда

$$\sup_{r\in I^n}M_1(DD^\beta g,r)(1-r)^{\beta+1}<+\infty,\quad \beta>0.$$

Докажем, что это условие является также достаточным.

Из равенства

$$h_R(r^2\xi)=\int\limits_{T^n}g_R(rt)f_\xi(r\bar t)\,dm_n(t),\quad r\in I,\ R\in I^n,\ \xi\in T^n,$$

используя соотношение (7), выводим

$$\begin{aligned}
|Dh_R(r^2\xi)| &= \left|\int\limits_{T^n}f_\xi(r\bar t)Dg_R(rt)\,dm_n(t)\right|\\
&\le C(r)\int\limits_0^r\cdots\int\limits_0^r\int\limits_{T^n}|D^\beta(Dg_R)(w)|(1-|w|)^{\beta-1}|f_\xi(\bar w)|\,dm_{2n}(w)\\
&\le C(r)\|f\|_\infty\int\limits_0^r\cdots\int\limits_0^r\int\limits_{T^n}|D^\beta Dg_R(w)|(1-|w|)^{\beta-1}\\
&\quad\times(1-R|w|)^{\beta+1}(1-R|w|)^{-\beta-1}\,dm_{2n}(w)\\
&\le C(r)\|f\|_\infty\sup_{|w_i|<r}(M_1(D^\beta Dg_R,|w|))(1-R|w|)^{\beta+1}\\
&\quad\times\int\limits_0^r\cdots\int\limits_0^r\prod_{k=1}^{n}(1-R_k|w_k|)^{-\beta-1}(1-|w_k|)^{\beta-1}\,d|w_k|\\
&\le C(r)C_1\prod_{k=1}^{n}(1-R_k)^{-1},\quad \beta>0,
\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из оценок (5) и соотношений

$$\begin{aligned}
\sup_{|w_j|<r}M_1(D^\beta Dg,R|w|)(1-R|w|)^{\beta+1}&\le\sup_{R_j|w_j|<rR_j}M_1(D^\beta Dg,R|w|)(1-R|w|)^{\beta+1}\\
&\le\sup_{R_j|w_j|<1}M_1(D^\beta Dg,R|w|)(1-R|w|)^{\beta+1}<C_2.
\end{aligned}$$

Остается перейти к пределу при $r \to 1$:

$$|Dh(R\xi)|(1-R_1)\dots(1-R_n) < C_3, \quad R \in I^n,\ \xi \in T^n,$$
$$\sup_{z=R\xi\in D^n} |Dh(R\xi)|(1-R_1)\dots(1-R_n) < C_3.$$

Поэтому $h \in Bl(D^n)$.

2. Покажем, что условие $\sup\limits_{r\in I^n} M_1(\mathfrak{D}^\beta g, r)(1-r)^\beta < \infty$, $\beta > 0$, достаточно. Действительно, пусть $f \in B$. Тогда $|\mathfrak{D}^\alpha f(z)|(1-|z|)^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$. Далее,

$$\mathfrak{D}^\beta h(r^2\xi) = \int\limits_{T^n} f(rt\xi)\mathfrak{D}^\beta g(r\bar{t})\,dm_n(t).$$

Отсюда

$$\mathfrak{D}^{\alpha+\beta} h(r^2\xi)(1-r)^{\alpha+\beta} \le CM_\infty(\mathfrak{D}^a, f, r)(1-r)^\alpha M_1(\mathfrak{D}^\beta g, r)(1-r)^\beta < C_1.$$

Следовательно, $h \in B(D^n)$. Установим необходимость условия (10). По теореме о замкнутом графике имеем

$$|\mathfrak{D}^\beta\mathfrak{D}^S g_w(r\xi)|(1-r)^S \le C\left\|\mathfrak{D}^\beta\left(\frac{1}{1-wz}\right)\right\|_{B_\gamma},$$

где γ, S, β — некоторые положительные числа, $w \in D^n$. Используя неравенство $|1-w_k z_k|^{-\gamma} \le (1-|z_k|)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве первой части теоремы 3, и применяя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{D}^\beta\left(\frac{1}{1-wz}\right)\right\|_{B_\gamma} &\le \prod_{k=1}^n \sup_{z_k\in D}\left|\mathfrak{D}^\gamma\mathfrak{D}^\beta\frac{1}{(1'-w_kz_k)}\right|(1-|z_k|)^\gamma \\
&\le C\prod_{k=1}^n \sup_{z_k\in D}\left|D^{\gamma+\beta}\frac{1}{(1-w_kz_k)}\right|(1-|z_k|)^\gamma \\
\le C\prod_{k=1}^n \sup_{z_k\in D}&\left(\frac{1}{|1-w_kz_k|^{\beta+1}}\right) \le C_1\prod_{k=1}^n \sup_{z_k\in D}\left(\frac{1}{|1-w_kz_k|^{\beta+1}}\right) \\
&\le C\prod_{k=1}^n \frac{1}{\left|1-w_kz_k^0\right|^{\beta+1}}, \quad z_k^0 \in T,\ k=1,\dots,n,\ \beta > 0.
\end{aligned}$$

Для получения нужного условия остается проинтегрировать обе части неравенства по T^n и положить $r_k = |w_k|$, $k = 1,\dots,n$. Теорема 3 доказана полностью.

§ 2. О коэффициентных мультипликаторах из $H^p(D^n)$ в $H^q(D^n)$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 4. *Пусть*

$$g \in H(D^n), \quad g(z) = \sum_{|k|\ge 0} C_k z^k, \quad 0 < p < q \le \infty,\ 0 < p < 1.$$

Тогда следующие условия равносильны:

1) $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\} \in M_T(H^p(D^n), H^q(D^n))$;

2) $\sup\limits_{r\in I^n} M_q(D^\beta g,r)(1-r)^{(\beta+1)-1/p}<\infty$, β — *некоторое число*, $\beta>1/p-1$.

Замечание. При $n=1$ этот результат установлен в работе [9]. Рассуждения существенным образом опираются на теоремы Харди — Литтлвуда о действии дробной производной в пространствах аналитических функций, суммируемых по площади. При $q>1$ наше доказательство использует соображения двойственности, что, на наш взгляд, упрощает вышеупомянутое доказательство и позволяет перенести его в поликруг D^n. При $q\le 1$ мы применяем подход, предложенный в работе [8].

Доказательство теоремы 4. Доказательство необходимости условия

$$\sup_{r\in I^n} M_q(D^\beta g,r)(1-r)^{\beta+1-1/p}<\infty,\quad \beta>1/p-1,$$

легко получить, используя теорему о замкнутом графике и повторяя рассуждения соответствующих импликаций предыдущих теорем. Докажем теперь, что это же условие будет достаточным. Пусть $0<p<1$, $0<p<q\le 1$. Тогда, используя равенство (7), имеем

$$|h(\rho^2 rt)|=\left|\int\limits_{T^n} g_r(t\xi\rho)f(\bar\xi\rho)\,dm_n(\xi)\right|$$
$$\le C(\rho,\beta)\int\limits_{D^n}|D^\beta g_{rt}(\bar w)|(1-|w|)^{\beta-1}|f(w)|\,dm_{2n}(w),\quad \beta>1/p-1. \tag{11}$$

Устремляя $\rho\to 1$ и возводя обе части неравенства в степень q, получим

$$|h(rt)|^q\le C_1(\beta)\biggl(\int\limits_{D^n}|D^\beta g_{rt}(\bar w)||f(w)|(1-|w|)^{\beta-1}\,dm_{2n}(w)\biggr)^q.$$

Следующая оценка установлена в работе [8] методами, изложенными в [12]:

$$\biggl(\int\limits_{D^n}|D^\beta g_{rt}(\bar w)||f(w)^q(1-|w|)^{\beta-1}\,dm_{2n}(w)\biggr)^q$$
$$\le c(q)\int\limits_{D^n}|D^\beta g_{rt}(\bar w)|^q|f(w)|^q(1-|w|)^{(\beta+1)q-2}\,dm_{2n}(w),\quad \beta>1/q-1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{T^n}|h(rt)|^q\,dm_n(t)$$
$$\le C_2(q,\beta)\int\limits_{T^n}\int\limits_{D^n}|D^\beta g_{rt}(\bar w)|^q|f(w)|^q(1-|w|)^{(\beta+1)q-2}\,dm_{2n}(w)\,dm_n(t).$$

Применяя теорему Фубини и учитывая условие 2 теоремы, получаем

$$\int\limits_{T^n}|h(rt)|^q\,dm_n(t)\le C_2(q,\beta)\int\limits_{D^n}|f(w)|^q(1-|w|)^{q/p-2}\,dm_{2n}(w),\quad 0<p<q\le 1.$$

Докажем теперь, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{D^n}|f(w)|^q(1-|w|)^{q/p-2}\,dm_{2n}(w)\le C(q)\|f\|_{H^p(D^n)},\quad 0<p<q\le 1. \tag{12}$$

Воспользуемся индукцией по n. При $n=1$ неравенство (12) — следствие теоремы вложения Карлесона (см. [13]). Далее, учитывая следствие 2.7 работы [14] и тот факт, что для $k=n-1$ оценка (12) верна, приходим к неравенству

$$\int_D \cdots \int_D |f(w_1,\dots,w_n)|^q((1-|w_1|)(1-|w_2|)\dots(1-|w_n|))^{q/p-2}\,dm_{2n}(w)$$
$$\le C_1\int_D \Big(\sup_{R_1,\dots,R_{n-1}\in(0,1)}|f(w_1,\dots,w_n)|^p\,dm_1(\xi_1)\dots dm_1$$
$$\times(\xi_{n-1})\Big)^{q/p}(1-|w_n|)^{q/p-2}\,dm_2(w_n)\le C_2\|f\|_{H^p(D^n)},\quad 0<p<q\le 1.$$

В случае $0<p<q\le 1$ теорема доказана.

Пусть теперь $0<p<1<q<\infty$. Используя двойственность пространств $H^q(D^n)$, $H^{q'}(D^n)$, $1/q'+1/q=1$, имеем

$$\Big(\int_{T^n}|h(r^2\xi)|^q\,dm_n(\xi)\Big)^{1/q}=\Big|\int_{T^n}\psi(r\xi)h(r\bar{\xi})\,dm_n(\xi)\Big|,$$

где $\psi\in H^{q'}(D^n)$, $\|\psi\|_{H^{q'}(D^n)}=1$. Далее, применяя теорему Фубини, неравенство Гёльдера, условие 2 теоремы и лемму 4, окончательно получаем

$$\Big(\int_{T^n}|h(r^3\xi)|^q\,dm_n(\xi)\Big)^{1/q}\le C\int_{T^n}|\psi(r\xi)|\,|h(r^2\bar{\xi})|\,dm_n(\xi)$$
$$\le\frac{C(\beta,n)}{(r_1\dots r_n)^{2\beta}}\int_{T^n}\int_{D^n}|D^\beta g(R\tilde{\xi}\bar{\xi})|\,|f(R\tilde{\xi})|\,dm_n(\tilde{\xi})(1-R)^{\beta-1}R\,dR|\psi(r\xi)|\,dm_n(\xi)$$
$$\le\frac{C(\beta,n)}{(r_1\dots r_n)^{2\beta}}\int_{T^n}\int_{I^n}|f(R\tilde{\xi})|\Big(\int_{T^n}|D^\beta g(Rt)|^q\,dm_n(t)\Big)^{1/q}$$
$$\times\Big(\int_T|\psi(rt)^{q'}|\,dm_n(t)\Big)^{1/q'}(1-R)^{\beta-1}\,dm_n(\tilde{\xi})R\,dR$$
$$\le\frac{C(\beta,n)}{(r_1\dots r_n)^{2\beta}}\int_{D^n}|f(w)|(1-|w|)^{1/p-2}\,dm_{2n}(w)\le\frac{C(\beta,n)}{(r_1,\dots,r_n)^{2\beta}}\|f\|_{H^p(D^n)}.$$

Остается перейти к пределу при $r_j\to 1$, $j=1,\dots,n$. При $q=\infty$ из (11) вытекает, что

$$\|h\|_{H^\infty(D^n)}\le c(\beta)\int_{D^n}|f(w)|(1-|w|)^{1/p-2}\,dm_{2n}(w)\le C(\beta)\|f\|_{H^p}.$$

Теорема 4 доказана.

Пусть, далее,

$$H^p_\beta(D^n)=\{f\in H(D^n):\|D^\beta f\|_{H^p}<\infty,\ 0<\beta<\infty\}.$$

Незначительно модифицируя доказательство, легко доказать несколько более общий результат.

Теорема 5. *Пусть* $g(z) \in H(D^n)$, $g(z) = \sum_{|k|\ge 0} c_k z^k$. *Тогда равносильны следующие условия:*

1) $\{(c_k)_{k\in Z_+^n}\} \in M_T\big(H^p_\beta(D^n),\, H^q_\alpha(D^n)\big)$, $0<p<1<q\le\infty$, $0<\alpha,\ \beta<\infty$;

2) $M_q(D^\gamma D^\alpha D^{-\beta} g, R)(1-R)^{\gamma+1-1/p}<\infty$, γ — *некоторое число*, $\gamma>1/p-1$.

В заключение отметим, что из теорем 1–5, используя результаты работы [18], можно получить различные достаточные условия о действии мультипликаторов из классов H^p_α в поликруге в пространствах $l^2(D^n)$ и $l^1(D^n)$, где

$$l^p(D^n) = \Big\{a_k = (a_{k_1,\dots,k_n},\ k_j\in Z^+,\ j=1,\dots,n;\ \sum_{|k|\ge 0} |a_{k_1,\dots,k_n}|^p<\infty\Big\},$$

при $1\le p<\infty$, а также утверждения о действии дробной производной между классами Блоха и $H^{p,q,\alpha}(D^n)$, $H^p(D^n)$, между классами Харди $H^p(D^n)$ и Харди — Соболева $H^p_\alpha(D^n)$. Приведем два следствия такого рода. С учетом теоремы 5 и результата работы [18] получаем

Следствие 1. *Если* $\lambda_k = c_k a_k$, $k\in Z^n_+$,

$$\sum_{k_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{N_n} k_1^2\dots k_n^2|a_{k_1\dots k_n}|^2 = O\big(N_1^2\dots N_n^2\big),\quad g(z)=\sum_{|k|\ge 0} c_k z^k$$

и выполнено условие 2 *теоремы* 5 *при* $\alpha=0$, $q=1$, *то*

$$\{(\lambda_k)_{k\in Z^n_+}\}\in M_T\big(H^p_\beta, l^2\big),\quad 0<p<1.$$

Из теорем 1 и 4 вытекает

Следствие 2. 1. *Пусть* $0<p,\ q\le 1$, $0<s\le 1$, $\gamma=1/s$, $\beta=\alpha+1/p$. *Тогда*

$$\|G(z)\|_{Bl(D^n)}\le C\|\mathfrak{D}^\beta G\|_{H^{p,q,\alpha}(D^n)\left(F^{p,q}_\alpha\right)},\quad \|G(z)\|_{Bl(D^n)}\le C'\|\mathfrak{D}^\gamma G\|_{H^s}.$$

2. *Пусть* $0<p<q<\infty$, $\alpha=1/p-1/q$. *Тогда*

$$\|G(z)\|_{H^q(D^n)}\le C_1\|\mathfrak{D}^\alpha G(z)\|_{H^p(D^n)}.$$

Замечание. Утверждение 2 следствия 2 при $n=1$ — хорошо известная теорема Харди — Литтлвуда о действии дробной производной в пространствах Харди (см. [12, 14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson J. M.* Bloch function: the basic theory // Proc. Conf. «Operators and function theory». Univ. Lancaster, 1984. P. 4–6.
2. *Anderson J. M., Clunie J., Pommerenke Ch.* On Bloch functions and normal functions // J. Reine Angev. Math. 1974. Bd 270. S. 12–37.
3. *Макаров Н. Г.* Вероятностные методы в теории конформных отображений // Алгебра и анализ. 1989. V. 1, вып. 1. С. 3–59.
4. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Математический анализ. М: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 3–123. (Итоги науки и техники).
5. *Timoney R. M.* Bloch functions in several complex variables // J. Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12, N 4. P. 241–267.
6. *Zhu K.* Multipliers of BMO in the Bergman metric with application to Toeplitz operators // J. Funct. Anal. 1989. V. 87, N 12. P. 31–50.

7. *Jevtic M., Pavlovic M.* Coefficient multipliers on spaces of analytic functions // Acta Sci. Math. 1998. V. 64. P. 531–545.

8. *Шамоян Р. Ф.* О мультипликаторах из пространств типа Бергмана в пространства Харди в поликруге // Укр. мат. журн. 2000. № 10. С. 1392–1401.

9. *Mateljevic M., Pavlovic M.* Multipliers of H^p and BMOA // Pacif. J. Math. 1990. V. 146. P. 71–84.

10. *Тригуб М.* Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 4. С. 145–160.

11. *Buckley S. M., Koskela P., Vicotic D.* Fractional integration, differentiation, and weighted Bergman spaces // Proc. Camb. Soc. 1999. V. 126, N 2. P. 369–385.

12. *Djrbashian A., Shamoian F. A.* Topics in the theory of A_α^p spaces. Leipzig: Teubner texte zur Math., 1988. V. 105.

13. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. New York; London: Acad. Press, 1970.

14. *Aleksandrov A. V.* Essays on non locally convex Hardy classes // Lecture Notes in Math. 1981. V. 864. P. 1–90.

15. *Ahern P., Jevtic M.* Duality and multipliers for mixed norm spaces // Lecture Michigan Math. J. 1983. V. 30, N 1. P. 53–64.

16. *Шамоян Ф. А.* Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 2. С. 197–215.

17. *Шамоян Р. Ф.* Непрерывные функционалы и мультипликаторы степенных рядов одного класса аналитических в поликруге функций // Изв. вузов. 2000. № 7. С. 67–69.

18. *Oberlin D. M.* Two multiplier theorems for $H^1(U^2)$ // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1979. V. 22, N 1. P. 43–47.

Статья поступила 16 ноября 2000 г.

Шамоян Роми Файзоевич
Брянский гос. педагогический университет, кафедра математического анализа
ул. Бежицкая, 16, Брянск 241036
sham@bgpi.bitmcnit.bryansk.su