Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.958

МЕТОД ГЛАДКИХ ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

А. М. Хлуднев

Аннотация: Рассматривается краевая задача со свободной границей, описывающая равновесие упругой пластины с трещиной. Предполагается, что на берегах трещины заданы краевые условия взаимного непроникания, имеющие вид системы равенств и неравенств. Предлагается новый подход к формулировке рассматриваемой задачи, позволяющий формулировать ее в гладкой области, несмотря на то, что изначально она сформулирована в области с разрезами. При этом заданные на берегах трещины ограничения на компоненты вектора перемещений и тензора напряжений рассматриваются как внутренние ограничения, т. е. заданные на подмножествах гладкой области определения решения.

Ключевые слова: пластина, негладкая область, краевая задача, трещина

В работе предлагается новый подход к формулировке задачи о равновесии упругой пластины, содержащей трещину с условиями взаимного непроникания берегов. Подход позволяет формулировать исходную задачу в гладкой области, несмотря на то, что изначально она сформулирована в области с разрезами. Как известно, традиционный подход к задаче равновесия пластины с трещиной характеризуется тем, что условия взаимного непроникания, задаваемые на берегах трещины, формулируются в терминах компонент вектора перемещений. При этом задача допускает вариационную формулировку и соответствует минимуму функционала энергии на выпуклом множестве всех допустимых перемещений. Граничные условия на компоненты тензора напряжений являются естественными при такой формулировке. Они могут быть найдены непосредственно из вариационного неравенства. В данной работе мы предлагаем другой подход к задаче, суть которого состоит в том, что вводится в рассмотрение множество всех допустимых напряжений, а условия непроникания для перемещений являются следствием уравнений и неравенств, образующих математическую модель. В соответствии с принятой в настоящее время терминологией такую формулировку задачи называют смешанной. Для областей с гладкими границами и обычными краевыми условиями смешанные формулировки достаточно хорошо исследованы. Особенность краевой задачи, рассматриваемой в данной работе, заключается в том, что краевые условия на негладких компонентах границы имеют вид системы уравнений и неравенств. Как оказалось, предлагаемая в работе смешанная формулировка весьма полезна при обосновании метода гладких областей для рассматриваемого класса задач. Метод гладких областей в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00842) и гранта Министерства образования в области фундаментального естествознания (2000.4.19).

теории трещин состоит в том, чтобы искомые функции определялись в области без разрезов. В этом случае заданные на берегах трещины ограничения на компоненты вектора перемещений и тензора напряжений рассматриваются как внутренние ограничения, т. е. заданные на подмножествах гладкой области определения решения. В работе даются и обосновываются смешанная формулировка задачи и метод гладких областей для проблемы равновесия упругой пластины, содержащей трещину с условиями взаимного непроникания берегов.

Смешанные формулировки краевых задач для эллиптических уравнений в гладких областях анализируются в [1]. В данной работе исследуется краевая задача в области с негладкой границей. Более того, рассматриваемая задача относится к классу задач со свободной границей. В частности, конкретное краевое условие в данной точке определяется лишь после решения всей задачи в целом. В этом случае говорят, что краевое условие обеспечивает возможность контакта берегов. В классической математической теории трещин, для которой характерны негладкие границы, краевые условия на берегах трещины задаются заранее и имеют вид равенств. По этому поводу можно обратиться к [2–6]. Что же касается математической теории трещин с возможным контактом берегов, то читатель может найти это в [7, 8]. Широкий класс других задач с ограничениями на решение имеется в работах [9, 10].

1. Вариационная формулировка

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, а $\Gamma_c \subset \Omega$ — гладкая кривая без самопересечений. Будем предполагать, что кривая Γ_c может быть продолжена до замкнутой кривой Σ без самопересечений класса $C^{1,1}$ так, что Ω разбивается при этом на две подобласти Ω_1, Ω_2. Границей области Ω_1 будет служить кривая Σ, внешнюю нормаль к которой обозначим через ν, а границей области Ω_2 служит $\Sigma \cup \Gamma$. Считаем, что Γ_c не содержит концевых точек, т. е. $\Gamma_c = \overline{\Gamma}_c \setminus \partial\Gamma_c$. Пусть также $\Omega_c = \Omega \setminus \bar{\Gamma}_c$. Проблема равновесия упругой пластины, содержащей трещину с условиями взаимного непроникания берегов, формулируется следующим образом [7]. В области Ω_c требуется найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $w, \sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, что

$$-\operatorname{div}\sigma = F \quad \text{в } \Omega_c, \tag{1}$$

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{2}$$

$$C\sigma - \varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_c, \tag{3}$$

$$Dm + \nabla\nabla w = 0 \quad \text{в } \Omega_c, \tag{4}$$

$$u = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{5}$$

$$[u_\nu] \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right|, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad [m_\nu] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \tag{6}$$

$$|m_\nu| \leq -\sigma_\nu, \quad \sigma_\nu[u_\nu] - m_\nu \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \tag{7}$$

$$\sigma_\tau = 0, \quad t^\nu(m) = 0 \quad \text{на } \Gamma_c^\pm. \tag{8}$$

Здесь $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на Γ_c, а знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν; $F = (F_1, F_2)$;

$f, F_i \in L^2(\Omega)$ — заданные функции, $i = 1, 2$,

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad \nabla\nabla m = m_{ij,ij}, \quad \sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \cdot \nu,$$
$$\sigma_\tau = \{\sigma_\tau^i\}_{i=1}^2, \quad \sigma\nu = \{\sigma_{ij}\nu_j\}_{i=1}^2, \quad \nabla\nabla w = \{w_{,ij}\}_{i,j=1}^2,$$
$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}_{i,j=1}^2,$$
$$t^\nu(m) = m_{ij,j}\nu_j + m_{ij,k}\tau_k\tau_j\nu_i, (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Тензор C удовлетворяет условиям симметрии и положительной определенности $\{C\sigma\}_{ij} = c_{ijkl}\sigma_{kl}$, $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$, $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, $c_{ijkl}\xi_{ji}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2$, $\xi_{ji} = \xi_{ij}$, $c_0 > 0$. Аналогичным условиям удовлетворяет и тензор D, $\{Dm\}_{ij} = d_{ijkl}m_{kl}$, $i, j = 1, 2$. Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам, т. е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и т. д. Добавим, что (1), (2) суть уравнения равновесия, а (3), (4) представляют собой уравнения состояния. Краевое условие (5) соответствует жесткому защемлению пластины на внешней границе Γ, а (6)–(8) описывают условия взаимного непроникания берегов Γ_c^+ и Γ_c^-. Физический смысл функций, входящих в уравнения (1)–(4), следующий: u — горизонтальные перемещения точек пластины, w — вертикальные перемещения, σ — тензор напряжений, m — тензор моментов, F, f — заданные внешние нагрузки.

Для того чтобы дать вариационную формулировку задачи (1)–(8), введем пространства Соболева

$$H^{1,0}(\Omega_c) = \{v \in H^1(\Omega_c) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\},$$
$$H^{2,0}(\Omega_c) = \left\{v \in H^2(\Omega_c) \mid v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma\right\}.$$

Здесь n — внешняя нормаль к Γ.

Выпуклое множество допустимых перемещений определяется следующим образом:

$$K = \left\{(u, w) \in [H^{1,0}(\Omega_c)]^2 \times H^{2,0}(\Omega_c) \mid [u_\nu] \geq \left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right| \text{ п. в. на } \Gamma_c\right\}.$$

Можно решить задачу минимизации:

$$\min_{(u,w)\in K} \left\{\frac{1}{2}(\sigma(u), \varepsilon(u))_{\Omega_c} - \frac{1}{2}(m(w), \nabla\nabla w)_{\Omega_c} - (F, u)_{\Omega_c} - (f, w)_{\Omega_c}\right\},$$

которая эквивалентна вариационному неравенству

$$(u, w) \in K, \quad (\sigma(u), \varepsilon(\bar{u} - u))_{\Omega_c} - (m(w), \nabla\nabla\bar{w} - \nabla\nabla w)_{\Omega_c}$$
$$\geq (F, \bar{u} - u)_{\Omega_c} + (f, \bar{w} - w)_{\Omega_c} \quad \forall(\bar{u}, \bar{w}) \in K. \quad (9)$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_{\Omega_c}$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega_c)$, а $\sigma(u) = \sigma$, $m(w) = m$ определяются из (3), (4). Для простоты здесь и далее мы используем одно и то же обозначение для пространств $L^2(\Omega_c)$, $[L^2(\Omega_c)]^2$, $[L^2(\Omega_c)]^4$. Множество K замкнуто (и, следовательно, слабо замкнуто) в пространстве $[H^{1,0}(\Omega_c)]^2 \times H^{2,0}(\Omega_c)$, а минимизируемый функционал коэрцитивен и слабо полунепрерывен снизу. Поэтому задача (9) имеет решение (см. [7]). Ясно, что, выбирая $(\bar{u}, \bar{w}) \in C_0^\infty(\Omega_c)$, из (9) получаем уравнения равновесия (1), (2), выполненные в смысле обобщенных функций. В следующем разделе мы обсудим, в каком смысле выполнены краевые условия (6)–(8). Отметим также, что решение вариационного неравенства (9) будет единственным.

2. Смешанная формулировка

Рассмотрим пространство функций

$$H(\Omega_c) = \{(\sigma, m) \mid \sigma = \{\sigma_{ij}\},\ m = \{m_{ij}\};\ \sigma, \operatorname{div}\sigma \in L^2(\Omega_c), m, \nabla\nabla m \in L^2(\Omega_c)\}$$

с нормой

$$\|(\sigma, m)\|^2_{H(\Omega_c)} = \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \|\operatorname{div}\sigma\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \|m\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \|\nabla\nabla m\|^2_{L^2(\Omega_c)}$$

и введем множество допустимых напряжений и моментов

$$K(\Omega_c) = \big\{(\sigma, m) \in H(\Omega_c) \mid [\sigma\nu] = [m_\nu] = [t^\nu(m)] = 0 \text{ на } \Gamma_c;\\ |m_\nu| \le -\sigma_\nu,\ \sigma_\tau = 0,\ t^\nu(m) = 0 \text{ на } \Gamma_c^\pm\big\}.$$

Введем также пространства $H^{\frac{i}{2}}(\Sigma)$, $i = 1, 3$, с нормами

$$\|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = \|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma)} + \int\limits_\Sigma \int\limits_\Sigma \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x - y|^2}\, dxdy,$$

$$\|\varphi\|^2_{H^{\frac{3}{2}}(\Sigma)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Sigma)} + \int\limits_\Sigma \int\limits_\Sigma \frac{|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|^2}{|x - y|^2}\, dxdy.$$

Обозначим через $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{-\frac{3}{2}}(\Sigma)$ пространства, сопряженные к $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{3}{2}}(\Sigma)$ соответственно. Отметим, что для $(\sigma, m) \in H(\Omega_c)$ можно определить следы $(\sigma\nu)^\pm, m_\nu^\pm$ на Σ как элементы пространства $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, при этом операторы взятия следа непрерывны. Кроме того, можно определить $(\sigma_\nu)^\pm, (\sigma_\tau^i)^\pm \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, $i = 1, 2$, $t^\nu(m)^\pm \in H^{-\frac{3}{2}}(\Sigma)$, так что справедливы формулы Грина [7, 11]

$$(\operatorname{div}\sigma, v)_{\Omega_1} = -(\sigma, \varepsilon(v))_{\Omega_1} + \langle\sigma_\nu^-, v_\nu\rangle_{\frac{1}{2}} + \langle\sigma_\tau^-, v_\tau\rangle_{\frac{1}{2}} \quad \forall v = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_1), \tag{10}$$

$$(w, \nabla\nabla m)_{\Omega_1} = (\nabla\nabla w, m)_{\Omega_1} + \langle t^\nu(m)^-, w\rangle_{\frac{3}{2}} - \left\langle m_\nu^-, \frac{\partial w}{\partial\nu}\right\rangle_{\frac{1}{2}} \quad \forall w \in H^2(\Omega_1), \tag{11}$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{1}{2}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{3}{2}}$ обозначают двойственность между пространствами $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ и $H^{-\frac{3}{2}}(\Sigma)$, $H^{\frac{3}{2}}(\Sigma)$ соответственно.

Формулы, аналогичные (10), (11), имеют место и для области Ω_2. В этом случае граница области Ω_2 состоит из компонент Σ и Γ.

Поясним, как понимаются краевые условия для σ, m в определении множества $K(\Omega_c)$. Нулевые скачки для $\sigma\nu, m_\nu, t^\nu(m)$ означают, что

$$\langle(\sigma\nu)^+ - (\sigma\nu)^-, \varphi\rangle_{\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma),$$

$$\langle m_\nu^+ - m_\nu^-, \varphi\rangle_{\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma),$$

$$\langle t^\nu(m)^+ - t^\nu(m)^-, \varphi\rangle_{\frac{3}{2}} = 0 \quad \forall\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Sigma).$$

Из совпадения функционалов $(\sigma\nu)^+$ и $(\sigma\nu)^-$ получаем также равенства $\sigma_\nu^+ = \sigma_\nu^-$, $\sigma_\tau^+ = \sigma_\tau^-$. Неравенство $|m_\nu| \le -\sigma_\nu$ выполнено в следующем смысле:

$$\langle\sigma_\nu^\pm \pm m_\nu^\pm, \varphi\rangle_{\frac{1}{2}} \le 0 \ \forall\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad \varphi \ge 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma_c. \tag{12}$$

При $m_\nu^\pm = 0$ из (12), в частности, следует, что $\sigma_\nu^\pm \le 0$ на Γ_c.

Наконец, равенства $\sigma_\tau = 0$, $t^\nu(m) = 0$ в определении множества $K(\Omega_c)$ выполняются в следующем смысле:

$$\left\langle \sigma_\tau^\pm, \varphi \right\rangle_{\frac{1}{2}} = 0 \ \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad \varphi_i \nu_i = 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \Gamma_c, \tag{13}$$

$$\langle t^\nu(m)^\pm, \varphi \rangle_{\frac{3}{2}} = 0 \quad \forall \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Sigma), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \Gamma_c. \tag{14}$$

Легко видеть, что множество $K(\Omega_c)$ является выпуклым. Непрерывность операторов взятия следа обеспечивает его замкнутость в пространстве $H(\Omega_c)$. Отсюда, в частности, вытекает, что $K(\Omega_c)$ будет слабо замкнутым.

Важно отметить, что во всех приведенных выше формулах кривая Σ может быть выбрана произвольно с точностью до наложенных на нее требований. Сформулированные краевые условия для σ, m в определении множества $K(\Omega_c)$ в точности соответствуют краевым условиям, вытекающим из (9) для решения $\sigma = \sigma(u)$, $m = m(w)$, т. е. каждое из выписанных выше соотношений для σ, m аналогично соотношению для $\sigma(u)$, $m(w)$, которое можно вывести из вариационного неравенства (9).

Отметим также, что в соотношениях (12) в качестве пробных функций можно выбирать $\overline{\varphi}$, где $\overline{\varphi}$ — продолжение нулем на Σ функций φ из пространства $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)$, $\varphi \geq 0$ п. в. на Γ_c. Норма в $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)$ определяется следующим образом:

$$\|\phi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)} = \|\phi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + \int\limits_{\Gamma_c} \rho^{-1} \phi^2,$$

где $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Gamma_c)$. Известно, что $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ (см. [7, 12]). Такая же ситуация и в соотношениях (13), где в качестве пробных функций можно выбирать $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2)$, $\varphi_i \in H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_c)$, $\varphi_i \nu_i = 0$ п. в. на Γ_c. Аналогично в соотношениях (14) в качестве пробных функций можно выбирать $\overline{\varphi}$, где $\overline{\varphi}$ — продолжение нулем на Σ функций φ из пространства $H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_c)$. Норму в пространстве $H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_c)$ можно определить формулой

$$\|\phi\|^2_{H^{\frac{3}{2}}_{00}(\Gamma_c)} = \|\phi\|^2_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)} + \int\limits_{\Gamma_c} \rho^{-1} |\nabla \phi|^2.$$

Теперь мы в состоянии привести смешанную формулировку задачи (1)–(8). Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, w, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$ такие, что

$$u = (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_c), \quad w \in L^2(\Omega_c), \quad (\sigma, m) \in K(\Omega_c), \tag{15}$$

$$-\operatorname{div} \sigma = F \quad \text{в } \Omega_c, \tag{16}$$

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}(u, \operatorname{div} \bar\sigma - \operatorname{div} \sigma)_{\Omega_c} &+ (w, \nabla\nabla \overline{m} - \nabla\nabla m)_{\Omega_c} \\ &+ (C\sigma, \bar\sigma - \sigma)_{\Omega_c} + (Dm, \overline{m} - m)_{\Omega_c} \geq 0 \quad \forall (\bar\sigma, \overline{m}) \in K(\Omega_c).\end{aligned} \tag{18}$$

Неравенство (18) можно получить, умножая (3), (4) на $\bar\sigma - \sigma$, $\overline{m} - m$ соответственно, $(\bar\sigma, \overline{m}) \in K(\Omega_c)$, и интегрируя по Ω_c с использованием формул Грина вида (10), (11). С другой стороны, из (18) следуют уравнения (3), (4). Для этого достаточно в (18) в качестве пробных функций выбрать $(\bar\sigma, \overline{m}) = (\sigma, m) + (\tilde\sigma, \widetilde{m})$, где

$(\tilde{\sigma}, \widetilde{m}) \in C_0^\infty(\Omega_c)$. Кроме того, соотношения (15)–(18) содержат в себе все краевые условия (5)–(8). Для проверки этого утверждения достаточно убедиться в справедливости (5), первого неравенства (6) и второго соотношения (7). Условия (5) сразу вытекают из (18) в силу того, что функции $(\bar{\sigma}, \overline{m})$ произвольны на Γ.

Проверим справедливость первого неравенства (6) и второго соотношения (7). Разбивая область Ω_c на подобласти Ω_1, Ω_2 так, как указано в начале разд. 1, и используя формулы Грина вида (10), (11) для областей Ω_1, Ω_2, интегрированием по частям из (18) получаем

$$-\int\limits_\Sigma (\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu)[u_\nu] - \int\limits_\Sigma [t^\nu(\overline{m} - m)w] + \int\limits_\Sigma (\overline{m}_\nu - m_\nu)\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] + (C\sigma - \varepsilon(u), \bar{\sigma} - \sigma)_{\Omega_c} + (Dm + \nabla\nabla w, \overline{m} - m)_{\Omega_c} \geq 0. \quad (19)$$

Второй интеграл по границе Σ здесь равен нулю в силу определения $K(\Omega_c)$. Как мы уже отметили, уравнения состояния (3), (4) выполнены в Ω_c, поэтому интегралы по Ω_c здесь также обращаются в нуль. Таким образом, из (19) следует, что

$$\int\limits_\Sigma (\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu)[u_\nu] - \int\limits_\Sigma (\overline{m}_\nu - m_\nu)\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] \leq 0 \quad \forall (\bar{\sigma}, \overline{m}) \in K(\Omega_c). \quad (20)$$

Возьмем в (20) сначала $(\bar{\sigma}, \overline{m}) = 0$, а затем $(\bar{\sigma}, \overline{m}) = 2(\sigma, m)$. Это приведет к соотношению

$$\int\limits_\Sigma \left(\sigma_\nu[u_\nu] - m_\nu\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right) = 0. \quad (21)$$

Поэтому из (20) вытекает, что

$$\int\limits_\Sigma \left(\bar{\sigma}_\nu[u_\nu] - \overline{m}_\nu\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right) \leq 0 \quad \forall (\bar{\sigma}, \overline{m}) \in K(\Omega_c).$$

Выбирая здесь $\overline{m}_\nu = \pm\bar{\sigma}_\nu$, получим

$$\int\limits_\Sigma \bar{\sigma}_\nu\left([u_\nu] \pm \left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right) \leq 0. \quad (22)$$

Так как $\bar{\sigma}_\nu \leq 0$ на Γ_c и $[u_\nu] = [\frac{\partial w}{\partial \nu}] = 0$ на $\Sigma \setminus \Gamma_c$, из (22) заключаем, что

$$[u_\nu] \geq \left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right| \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (23)$$

т. е. выполнено первое неравенство (6). Далее, из (23) и неравенства $|m_\nu| \leq -\sigma_\nu$ находим, что подынтегральное выражение в (21) неположительно и, следовательно,

$$\sigma_\nu[u_\nu] - m_\nu\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \quad (24)$$

т. е. выполнено и второе соотношение (7). Таким образом, предыдущие рассуждения показывают, что формально, т. е. в предположении достаточной регулярности решения, формулировки (1)–(8) и (15)–(18) эквивалентны. В то же время мы должны иметь в виду, что формулировка (15)–(18) точна в том смысле, что мы указываем классы функций, в которых следует искать решение этой задачи. Отметим здесь, что множество $K(\Omega_c)$ описывает лишь ограничения на σ, m, так что первое соотношение (6) и второе соотношение (7), включающие функции u, w, σ, m, можно рассматривать как естественные условия, содержащиеся в (18)–(21). В то же время если говорить о вариационной формулировке (9), то там ситуация полностью противоположна. Множество K описывает лишь первое неравенство (6), т. е. лишь ограничение на u, w, поэтому все остальные соотношения (6)–(8), включающие u, w, σ, m, надо рассматривать как следствие справедливости вариационного неравенства (9).

Целью дальнейших рассуждений является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Существует единственное решение задачи* (15)–(18).

Доказательство. Для доказательства существования решения нам понадобится функция $(\sigma^0, m^0) \in K(\Omega_c)$, компоненты которой удовлетворяют уравнениям

$$-\operatorname{div}\sigma^0 = F, \quad -\nabla\nabla m^0 = f \quad \text{в } \Omega_c.$$

Такая функция может быть найдена из вариационного неравенства (9) с произвольными уравнениями состояния вида (3), (4) (естественно, удовлетворяющими требованиям, наложенным на тензоры C, D). Более того, в действительности, решая вариационное неравенство (9), можно получить теорему существования решения задачи (15)–(18) как эквивалентной задачи. Однако здесь мы даем прямое доказательство существования решения задачи (15)–(18) как представляющее самостоятельный интерес. Далее эта же схема будет использоваться при анализе задачи о равновесии пластины, содержащей трещину, сформулированной в гладкой области, т. е. при анализе метода гладких областей.

Общая схема доказательства существования решения будет следующая. Рассмотрим регуляризованную задачу, решение которой зависит от положительного параметра α. Затем установим разрешимость этой вспомогательной задачи и получим априорные оценки, равномерные по указанному параметру. В заключение осуществим переход к пределу при $\alpha \to 0$.

Итак, пусть α — положительный параметр, $\alpha \le \alpha_0$. Рассмотрим регуляризованную задачу

$$u = (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_c), \quad w \in L^2(\Omega_c), \quad (\sigma, m) \in K(\Omega_c), \tag{25}$$

$$\alpha u - \operatorname{div}\sigma = F \quad \text{в } \Omega_c, \tag{26}$$

$$\alpha w - \nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{27}$$

$$(C\sigma, \bar\sigma - \sigma)_{\Omega_c} + (Dm, \overline{m} - m)_{\Omega_c} + (u, \operatorname{div}\bar\sigma - \operatorname{div}\sigma)_{\Omega_c} \\ + (w, \nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m)_{\Omega_c} \ge 0 \quad \forall(\bar\sigma, \overline{m}) \in K(\Omega_c). \tag{28}$$

Мы не указываем здесь зависимость решения от α для упрощения записи. Из (25)–(28) следует, что

$$\alpha(u,u)_{\Omega_c} - (\operatorname{div}\sigma, u)_{\Omega_c} = (F,u)_{\Omega_c}, \quad \alpha(w,w)_{\Omega_c} - (\nabla\nabla m, w)_{\Omega_c} = (f,w)_{\Omega_c},$$

$$-(u, \operatorname{div}\sigma^0 - \operatorname{div}\sigma)_{\Omega_c} - (w, \nabla\nabla m^0 - \nabla\nabla m)_{\Omega_c} - (C\sigma, \sigma^0 - \sigma)_{\Omega_c} - (Dm, m^0 - m)_{\Omega_c} \le 0.$$

Складывая эти соотношения, получаем равномерную по α оценку

$$\alpha\|u\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \alpha\|w\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \|m\|^2_{L^2(\Omega_c)} \le c. \tag{29}$$

Поскольку из (26), (27) вытекает справедливость уравнений

$$\operatorname{div}\sigma = \alpha u - F, \quad \nabla\nabla m = \alpha w - f \quad \text{в } \Omega_c,$$

в силу (29) получаем такую равномерную по α оценку:

$$\|\operatorname{div}\sigma\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \|\nabla\nabla m\|^2_{L^2(\Omega_c)} \le c. \tag{30}$$

Выражая u и w из (26), (27) и подставляя в (28), придем к следующему вариационному неравенству относительно σ, m:

$$(\sigma, m) \in K(\Omega_c), \quad \frac{1}{\alpha}(F + \operatorname{div}\sigma, \operatorname{div}\bar\sigma - \operatorname{div}\sigma)_{\Omega_c} + \frac{1}{\alpha}(f + \nabla\nabla m, \nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m)_{\Omega_c}$$
$$+ (C\sigma, \bar\sigma - \sigma)_{\Omega_c} + (Dm, \overline{m} - m)_{\Omega_c} \ge 0 \quad \forall(\bar\sigma, \overline{m}) \in K(\Omega_c). \tag{31}$$

Очевидно, решение неравенства (31) эквивалентно минимизации слабо полунепрерывного снизу и коэрцитивного на $H(\Omega_c)$ функционала

$$G(\sigma, m) = \frac{1}{2\alpha}\big(\|\operatorname{div}\sigma\|^2_{L^2(\Omega_c)} + \|\nabla\nabla m\|^2_{L^2(\Omega_c)}\big) + \frac{1}{2}(C\sigma, \sigma)_{\Omega_c}$$
$$+ \frac{1}{2}(Dm, m)_{\Omega_c} + \frac{1}{\alpha}(F, \operatorname{div}\sigma)_{\Omega_c} + \frac{1}{\alpha}(f, \nabla\nabla m)_{\Omega_c}$$

на выпуклом слабо замкнутом множестве $K(\Omega_c)$. Это означает, что решение вариационного неравенства (31) существует при фиксированных $\alpha > 0$. Следовательно, существует решение задачи (25)–(28) при фиксированных α.

Теперь осуществим предельный переход при $\alpha \to 0$. Решение задачи (25)–(28) при данном фиксированном α обозначим через u^α, w^α, σ^α, m^α. Это решение удовлетворяет соотношениям

$$\alpha u^\alpha - \operatorname{div}\sigma^\alpha = F \quad \text{в } \Omega_c, \tag{32}$$

$$\alpha w^\alpha - \nabla\nabla m^\alpha = f \quad \text{в } \Omega_c, \tag{33}$$

$$(C\sigma^\alpha, \bar\sigma - \sigma^\alpha)_{\Omega_c} + (Dm^\alpha, \overline{m} - m^\alpha)_{\Omega_c} + (u^\alpha, \operatorname{div}\bar\sigma - \operatorname{div}\sigma^\alpha)_{\Omega_c}$$
$$+ (w^\alpha, \nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m^\alpha)_{\Omega_c} \ge 0 \quad \forall(\bar\sigma, \overline{m}) \in K(\Omega_c). \tag{34}$$

Из (34) заключаем, что в смысле распределений выполнены уравнения

$$C\sigma^\alpha - \varepsilon(u^\alpha) = 0, \quad Dm^\alpha + \nabla\nabla w^\alpha = 0 \quad \text{в } \Omega_c, \tag{35}$$

следовательно, $\varepsilon(u^\alpha) \in L^2(\Omega_c)$. В области Ω_c выполнено второе неравенство Корна и $u^\alpha \in L^2(\Omega_c)$, поэтому $u^\alpha \in H^1(\Omega_c)$. Так как $\bar\sigma n$ принимают произвольные значения на внешней границе Γ при $(\bar\sigma, \overline{m}) \in K(\Omega_c)$, из (34) легко получаем

$$u^\alpha = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Итак, $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha) \in H^{1,0}(\Omega_c)$. Воспользуемся первым неравенством Корна

$$\|u_1^\alpha\|_{H^{1,0}(\Omega_c)} + \|u_2^\alpha\|_{H^{1,0}(\Omega_c)} \le c\|\varepsilon(u^\alpha)\|_{L^2(\Omega_c)},$$

где постоянная c зависит лишь от области Ω_c. Ввиду того, что $\varepsilon(u^\alpha)$ ограничены в $L^2(\Omega_c)$ равномерно по α, имеет место равномерная по α оценка

$$\|u_i^\alpha\|_{H^{1,0}(\Omega_c)} \le c, \quad i = 1, 2. \tag{36}$$

Далее, из второго уравнения (35) заключаем, что $\nabla\nabla w^\alpha \in L^2(\Omega_c)$, следовательно, $w^\alpha \in H^2(\Omega_c)$. Поскольку $\overline{m}_\nu$ и $t^\nu(\overline{m})$ принимают произвольные значения на Γ при $(\bar\sigma, \overline{m}) \in K(\Omega_c)$, то из (34) вытекает, что

$$w^\alpha = \frac{\partial w^\alpha}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Поэтому $w^\alpha \in H^{2,0}(\Omega_c)$. Можно воспользоваться неравенством

$$\|w^\alpha\|_{H^{2,0}(\Omega_c)} \le c\|\nabla\nabla w^\alpha\|_{L^2(\Omega_c)}$$

с постоянной c, зависящей лишь от области Ω_c, что приведет к равномерной по α оценке

$$\|w^\alpha\|_{H^{2,0}(\Omega_c)} \le c. \tag{37}$$

Из (29), (30) имеем также

$$\|(\sigma^\alpha, m^\alpha)\|_{H(\Omega_c)} \le c. \tag{38}$$

Оценки (36)–(38) дают возможность выбрать подпоследовательность u^α, w^α, σ^α, m^α, которую обозначаем прежним образом, такую, что при $\alpha \to 0$

$$u_i^\alpha \to u_i \quad \text{слабо в } H^{1,0}(\Omega_c), \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_c), \quad i = 1, 2,$$

$$w^\alpha \to w \quad \text{слабо в } H^{2,0}(\Omega_c), \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_c),$$

$$(\sigma^\alpha, m^\alpha) \to (\sigma, m) \quad \text{слабо в } H(\Omega_c).$$

Эта сходимость позволяет осуществить предельный переход в (32)–(34), что и приводит к (15)–(18). Итак, существование решения задачи (15)–(18) доказано.

Покажем, что решение будет единственным. Предполагая, что существуют два решения $(u^1, w^1, \sigma^1, m^1)$ и $(u^2, w^2, \sigma^2, m^2)$, из (18) получим, что $\sigma^1 = \sigma^2$, $m^1 = m^2$. Так как

$$C\sigma^i - \varepsilon(u^i) = 0, \quad Dm^i + \nabla\nabla w^i = 0 \quad \text{в } \Omega_c, \quad i = 1, 2,$$

имеем $\varepsilon(u^1 - u^2) = 0$, $\nabla\nabla(w^1 - w^2) = 0$, откуда и следует, что $u^1 = u^2$, $w^1 = w^2$. Теорема 1 полностью доказана.

3. Метод гладких областей

В этом разделе предлагается новая формулировка задачи (1)–(8) о равновесии упругой пластины с трещиной, при которой решение ищется в гладкой области. Фактически мы продолжаем искомые функции в более широкую область Ω из области Ω_c. Для продолженных функций будем сохранять те же обозначения. Именно, в области Ω требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, w, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = F \quad \text{в } \Omega, \tag{39}$$

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega, \tag{40}$$

$$C\sigma - \varepsilon(u) + p(u)\delta_{\Gamma_c} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{41}$$

$$Dm + \nabla\nabla w + P(w) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{42}$$

$$u = w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{43}$$

$$[u_\nu] \geq \left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right|, \ \sigma_\tau = 0, \quad t^\nu(m) = 0 \quad \text{на } \Gamma_c, \tag{44}$$

$$|m_\nu| \leq -\sigma_\nu, \quad \sigma_\nu[u_\nu] - m_\nu \left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{45}$$

Здесь

$$p(u)_{ij} = \frac{1}{2}([u_i]\nu_j + [u_j]\nu_i), \quad P(w)_{ij} = -([w]\nu_i\delta_{\Gamma_c})_{,j} - [w_{,i}]\nu_j\delta_{\Gamma_c},$$

а δ_{Γ_c} — обобщенная функция простого слоя на поверхности Γ_c.

Основное отличие формулировки (39)–(45) от (1)–(8) состоит в том, что условия (44), (45) являются внутренними в том смысле, что они заданы на подмножестве области определения решения, а не на его границе. В задаче (1)–(8) условия (6)–(8) являются граничными, так как заданы на границе области. Уравнения (41), (42) вытекают из (3), (4) после продолжения функций u, w, σ, m из области Ω_c в область Ω. Такое продолжение фактически сводится к (произвольному) доопределению указанных функций на кривой Γ_c. Очевидно, справедлив и обратный переход: из уравнений (39)–(42) следуют уравнения (1)–(4). Важно отметить, что решение задачи (1)–(8), найденное из вариационного неравенства (9), обладает свойством

$$[\sigma\nu] = 0, \quad [m_\nu] = 0, \quad [t^\nu(m)] = 0 \quad \text{на } \Gamma_c. \tag{46}$$

Это дает возможность записать уравнения равновесия (1), (2) в том же самом виде в области Ω, что и в области Ω_c (см. (39), (40)). Проверим это утверждение. Из (9) вытекает, что $\sigma, \operatorname{div}\sigma, m, \nabla\nabla m \in L^2(\Omega_c)$,

$$-\operatorname{div}\sigma = F \quad \text{в } \Omega, \tag{47}$$

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega. \tag{48}$$

Скобками $\langle \cdot, \varphi\rangle$ будем обозначать значение обобщенной функции на элементе $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Пусть σ, m — продолженные в область Ω функции. Тогда, учитывая граничные условия (46) и уравнения (47), (48), для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij,j} + F_i, \varphi\rangle &= -(\sigma_{ij}, \varphi_{,j})_{\Omega_1} - (\sigma_{ij}, \varphi_{,j})_{\Omega_2} + (F_i, \varphi)_\Omega \\ &= \langle [\sigma_{ij}\nu_j], \varphi\rangle_{\frac{1}{2}} + (\sigma_{ij,j} + F_i, \varphi)_{\Omega_1} + (\sigma_{ij,j} + F_i, \varphi)_{\Omega_2} = 0, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \nabla\nabla m + f, \varphi\rangle &= (m, \nabla\nabla\varphi)_{\Omega_1} + (m, \nabla\nabla\varphi)_{\Omega_2} + (f, \varphi)_\Omega \\ &= (\nabla\nabla m + f, \varphi)_{\Omega_1} + (\nabla\nabla m + f, \varphi)_{\Omega_2} \\ &\quad + \langle [t^\nu(m)], \varphi\rangle_{\frac{3}{2}} - \left\langle [m_\nu], \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\rangle_{\frac{1}{2}} = 0.\end{aligned}$$

Проведенные рассуждения и доказывают справедливость уравнений (39), (40) в смысле обобщенных функций.

Для того чтобы дать слабую формулировку задачи (39)–(45) с указанием классов функций, в которых ищется решение, введем пространство

$$\mathscr{H}(\Omega) = \{(\sigma, m) \mid \sigma = \{\sigma_{ij}\}, m = \{m_{ij}\};\ \sigma, \operatorname{div}\sigma \in L^2(\Omega),\ m, \nabla\nabla m \in L^2(\Omega)\}$$

с нормой

$$\|(\sigma, m)\|^2_{\mathscr{H}(\Omega)} = \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} + \|m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\nabla m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

и рассмотрим множество допустимых напряжений и моментов

$$\mathscr{K}(\Omega) = \{(\sigma, m) \in \mathscr{H}(\Omega) \mid \sigma_\tau = 0,\ t^\nu(m) = 0,\ |m_\nu| \le -\sigma_\nu \text{ на } \Gamma_c\}.$$

Интерпретация условий, налагаемых на σ, m в определении множества $\mathscr{K}(\Omega)$, в данном случае проще, чем в предыдущем разделе. Это связано с тем, что для любой кривой Σ, удовлетворяющей необходимым условиям, функционалы $\sigma_\nu, m_\nu, \sigma_\tau^i$ однозначно определены в пространстве $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, а функционал $t^\nu(m)$ однозначно определен в пространстве $H^{-\frac{3}{2}}(\Sigma)$. Таким образом, сформулированные для σ, m условия в определении множества $\mathscr{K}(\Omega)$ выполнены в следующем смысле:

$$\langle \sigma_\nu \pm m_\nu, \varphi\rangle_{\frac{1}{2}} \le 0 \ \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad \varphi \ge 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma_c,$$

$$\langle \sigma_\tau, \varphi\rangle_{\frac{1}{2}} = 0 \ \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \quad \varphi_i \nu_i = 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma_c,$$

$$\langle t^\nu(m), \varphi\rangle_{\frac{3}{2}} = 0 \ \forall \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Sigma), \quad \operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma_c.$$

Так же, как и ранее, доказывается, что множество $\mathscr{K}(\Omega)$ выпукло и замкнуто в $\mathscr{H}(\Omega)$.

Слабая формулировка задачи (39)–(45) состоит в следующем. Требуется найти функции u, w, σ, m такие, что

$$u = (u_1, u_2) \in L^2(\Omega), \quad w \in L^2(\Omega), \quad (\sigma, m) \in \mathscr{K}(\Omega), \tag{49}$$

$$-\operatorname{div}\sigma = F \quad \text{в } \Omega, \tag{50}$$

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}(u, \operatorname{div}\bar\sigma - \operatorname{div}\sigma)_\Omega &+ (w, \nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m)_\Omega \\ &+ (C\sigma, \bar\sigma - \sigma)_\Omega + (Dm, \overline{m} - m)_\Omega \ge 0 \quad \forall (\bar\sigma, \overline{m}) \in \mathscr{K}(\Omega).\end{aligned} \tag{52}$$

Неравенство (52) следует из (18) с учетом включений $\operatorname{div}\sigma \in L^2(\Omega)$, $\nabla\nabla m \in L^2(\Omega)$, дающих возможность интегрирование по Ω_c заменить интегрированием по Ω. Это же неравенство можно получить из (41), (42), если умножить (41), (42) на $\bar\sigma - \sigma, \overline{m} - m$ соответственно, $(\bar\sigma, \overline{m}) \in \mathscr{K}(\Omega)$, и осуществить необходимое интегрирование.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Существует единственное решение задачи* (49)–(52).

Доказательство. Общая схема рассуждений остается такой же, как и при доказательстве теоремы 1. Поэтому отметим лишь особенности данного случая. Сначала заметим, что использованные в теореме 1 функции σ^0, m^0 могут быть продолжены в область Ω, так что

$$-\operatorname{div}\sigma^0 = F, \quad -\nabla\nabla m^0 = f \quad \text{в } \Omega, \tag{53}$$

и при этом $(\sigma^0, m^0) \in \mathscr{K}(\Omega)$. Для положительного параметра α рассмотрим вспомогательную задачу

$$u = (u_1, u_2) \in L^2(\Omega), \quad w \in L^2(\Omega), \quad (\sigma, m) \in \mathscr{K}(\Omega), \tag{54}$$

$$\alpha u - \operatorname{div}\sigma = F \quad \text{в } \Omega, \tag{55}$$

$$\alpha w - \nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega, \tag{56}$$

$$(C\sigma, \bar\sigma - \sigma)_\Omega + (Dm, \overline{m} - m)_\Omega + (u, \operatorname{div}\bar\sigma - \operatorname{div}\sigma)_\Omega \\ + (w, \nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m)_\Omega \geq 0 \quad \forall(\bar\sigma, \overline{m}) \in \mathscr{K}(\Omega). \quad (57)$$

Из (54)–(57) следует равномерная по α оценка

$$\alpha\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\sigma, m)\|^2_{\mathscr{H}(\Omega)} \leq c. \quad (58)$$

Разрешимость задачи (54)–(57) при фиксированных значениях параметра α можно доказать так же, как и разрешимость задачи (25)–(28). Покажем, как можно перейти к пределу при $\alpha \to 0$. Пусть решение задачи (54)–(57) при фиксированном α обозначено через $u^\alpha, w^\alpha, \sigma^\alpha, m^\alpha$. Это решение удовлетворяет соотношениям

$$\alpha u^\alpha - \operatorname{div}\sigma^\alpha = F \quad \text{в } \Omega, \quad (59)$$

$$\alpha w^\alpha - \nabla\nabla m^\alpha = f \quad \text{в } \Omega, \quad (60)$$

$$(u^\alpha, \operatorname{div}\bar\sigma - \operatorname{div}\sigma^\alpha)_\Omega + (w^\alpha, \nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m^\alpha)_\Omega \\ + (C\sigma^\alpha, \bar\sigma - \sigma^\alpha)_\Omega + (Dm^\alpha, \bar m - m^\alpha)_\Omega \geq 0 \quad \forall(\bar\sigma, \overline{m}) \in \mathscr{K}(\Omega). \quad (61)$$

Так же, как и в теореме 1, получим

$$\|u_i^\alpha\|_{H^{1,0}(\Omega_c)} \leq c, \quad i = 1, 2, \quad (62)$$

$$\|w^\alpha\|_{H^{2,0}(\Omega_c)} \leq c. \quad (63)$$

В силу (58), (62), (63), можно предполагать, что при $\alpha \to 0$

$$u_i^\alpha \to u_i \quad \text{сильно в } L^2(\Omega),\ i = 1, 2, \quad w^\alpha \to w \quad \text{сильно в } L^2(\Omega),$$

$$(\sigma^\alpha, m^\alpha) \to (\sigma, m) \quad \text{слабо в } \mathscr{H}(\Omega).$$

Эта сходимость позволяет осуществить предельный переход при $\alpha \to 0$ в (59)–(61), что и приводит к (49)–(52).

Единственность решения доказывается по той же схеме, что в теореме 1. Теорема 2 полностью доказана.

Формулировка задачи о равновесии пластины с трещиной в виде (49)–(52) привлекательна тем, что область, в которой ищется решение, не содержит негладких компонент границы. Имеющиеся при этом ограничения на σ, m заданы во внутренних точках Ω. В этом смысле формулировка задачи весьма напоминает контактные задачи для пластин с ограничениями, заданными на поверхностях меньших размерностей. Обширный класс контактных задач для пластин с ограничениями на решение и их анализ можно найти в [9].

В заключение работы отметим, что если обратиться к классической постановке краевой задачи теории трещин для пластин, то вместо краевых условий (6)–(8) будем иметь

$$m_\nu = t^\nu(m) = \sigma_\nu = \sigma_\tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_c^\pm. \quad (64)$$

В этом случае предлагаемый в работе метод гладких областей, при котором решение ищется в области без разрезов, применим и к задаче (1)–(5), (64). При этом множество допустимых напряжений и моментов определяется так:

$$\mathscr{K}(\Omega) = \{(\sigma, m) \in \mathscr{H}(\Omega) \mid m_\nu = t^\nu(m) = \sigma_\nu = \sigma_\tau = 0 \text{ на } \Gamma_c\}. \quad (65)$$

Вместо неравенства (52) получим тождество

$$(u, \operatorname{div}\bar\sigma)_\Omega + (w, \nabla\nabla\overline{m})_\Omega + (C\sigma, \bar\sigma)_\Omega + (Dm, \overline{m})_\Omega = 0 \quad \forall(\bar\sigma, \overline{m}) \in \mathscr{K}(\Omega). \quad (66)$$

Таким образом, метод гладких областей в классической задаче теории трещин для пластин может быть сформулирован в виде (49)–(51), (66), где множество $\mathscr{K}(\Omega)$ определено в (65).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer-Verl., 1991.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
4. *Ohtsuka K.* Mathematics of brittle fracture // Theoretical studies on fracture mechanics in Japan. Hiroshima: Hiroshima-Denki Inst. Technology, 1995. P. 99–172.
5. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
6. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
7. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
8. *Соколовский Я., Хлуднев А. М.* О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.
9. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
10. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997.
11. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
12. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston; London; Melbourne: Pitman, 1985.

Статья поступила 8 февраля 2002 г.

Хлуднев Александр Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
khlud@hydro.nsc.ru