Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 519.21

ОБ УСЛОВИЯХ НЕВОЗВРАТНОСТИ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА И СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Д. Э. Денисов, С. Г. Фосс

Аннотация: Доказывается новый критерий невозвратности для цепей Маркова с произвольным фазовым пространством, приводится следствие для вещественнозначных цепей. На примере показывается, что в случае однородного случайного блуждания с бесконечным средним предложенные достаточные условия близки к необходимым. Дается новое доказательство известного характеризационного критерия для конечности супремума случайного блуждания.

Ключевые слова: цепь Маркова, мартингал, невозвратность, равномерная интегрируемость, пробная функция, случайное блуждание

1. Введение

Данная работа является продолжением [1]. Пусть $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$, $X_0 =$ const, вообще говоря, неоднородная (по времени) цепь Маркова (ЦМ), принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathscr{X}, B)$, и $L : \mathscr{X} \to [0,\infty)$ — измеримая неограниченная функция. Изучаются условия, при которых

$$L(X_n) \to \infty \quad \text{п. н. при } n \to \infty \tag{1.1}$$

при любом начальном значении X_0. При выполнении (1.1) будем говорить, что цепь *L-невозвратна*, или просто *невозвратна*.

Условия невозвратности в случае счетных ЦМ приводятся в [2] при дополнительном требовании ограниченности величин скачков. В работе [1] предлагаются условия невозвратности ЦМ в произвольном фазовом пространстве в случае, когда величины скачков могут быть и неограниченными.

Введем ряд соглашений и обозначений. Будем предполагать, что ЦМ $\{X_n\}$ представима в виде *стохастически рекурсивной последовательности* (СРП)

$$X_{n+1} = f_n(X_n, \alpha_n), \quad n \geq 0,$$

где $\{\alpha_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одно и то же равномерное на $[0,1]$ распределение, а $f_n : \mathscr{X} \times [0,1] \to \mathscr{X}$ — измеримые функции (предположение о представлении ЦМ в виде СРП не является слишком ограничительным — см., например, [3]). Тогда можно определить ЦМ $\big\{X_{m+n}^{(x,m)}\big\}_{n\geq 0}$ с помощью соотношений: $X_m^{(x,m)} = x$ и

$$X_{m+n+1}^{(x,m)} = f_{m+n}\big(X_{m+n}^{(x,m)}, \alpha_{m+n}\big) \quad \text{при} \quad n = 0, 1, \dots.$$

Работа первого автора частично поддержана INTAS (грант 00–265), работа второго автора частично поддержана INTAS (грант 00–265) и Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00902, 02–01–00358).

© 2003 Денисов Д. Э., Фосс С. Г.

Далее, пусть $\Delta_{x,m} = L\big(X^{(x,m)}_{m+1}\big) - L(x)$. Для числа $N > 0$ определим случайные величины

$$\tau_{x,m}(N) = \min\big\{n \geq 1 : L\big(X^{(x,m)}_{m+n}\big) \geq N\big\}.$$

Будем писать $a^+ = \max(a, 0)$ и $a^- = -\min(a, 0)$.

Обозначим через $\mathscr{H}$ класс измеримых функций $h : [1, \infty) \to [1, \infty)$ таких, что интеграл $\int\limits_1^\infty (h(t))^{-1}\,dt$ сходится и функция $g(t) = \frac{h(t)}{t}$ является неубывающей и выпуклой вверх.

Приведем основное утверждение работы [1].

Теорема 1.1. *Предположим, что существуют числа $N > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$ и функция $h \in \mathscr{H}$ такие, что*

(1) $\tau_{x,m}(N) < \infty$ *п. н. при всех $x \in \mathscr{X}$ и $m \geq 0$;*

(2) *при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ и всех $x \in \mathscr{X}$ таких, что $L(x) \geq N$, выполняется*

$$\mathbf{E}\{\Delta_{x,m} \cdot I(\Delta_{x,m} \leq M)\} \geq \varepsilon;$$

(3) *семейство случайных величин $\{h(\Delta^-_{x,m}); m \geq 0, L(x) \geq N\}$ равномерно интегрируемо.*

Тогда при всех $x \in \mathscr{X}$ и любом $m \geq 0$

$$\mathbf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} L\big(X^{(x,m)}_{m+n}\big) = \infty\Big) = 1. \tag{1.2}$$

Заметим, что для выполнения условия (2) теоремы 1.1 необходимо, чтобы $\mathbf{E}\Delta^-_{x,m} < \infty$ при всех x, m. В настоящей работе в разд. 2 доказывается аналогичное утверждение, применимое и в случае $\mathbf{E}\Delta^-_{x,m} = \infty$ (теорема 2.1). Затем в теореме 2.2 приводится более общий критерий невозвратности, содержащий утверждения теорем 1.1 и 2.1 как частные случаи. Далее, в замечании 3 показывается существенность условия (1) теоремы 2.1.

В разд. 3 формулируются следствия теоремы 2.1 для вещественнозначных цепей Маркова (теорема 3.1 и следствие 3.1). Затем приводятся известные характеризационные критерии для ухода на бесконечность однородного случайного блуждания (теоремы 3.3, 3.4) и пример, показывающие близость достаточных условий теоремы 2.1 к необходимым. В приложении приводятся доказательства теоремы 3.1 и следствия 3.1, а также новые доказательства теорем 3.3 и 3.4.

2. Формулировки и доказательства критериев невозвратности

Теорема 2.1. *Предположим, что существуют числа $N > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$ и измеримая функция $h \in \mathscr{H}$ такие, что*

(1) *при всех $x \in \mathscr{X}$ и $m \geq 0$ п.н.*

$$\limsup_{n\to\infty} L\big(X^{(x,m)}_{m+n}\big) = \infty;$$

(2) *при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ и всех $x \in \mathscr{X}$ таких, что $L(x) \geq N$, имеет место неравенство*

$$\mathbf{E}\min\big(\Delta^+_{x,m}, M\big) \geq (1+\varepsilon)\mathbf{E}\min\big(\Delta^-_{x,m}, M\big);$$

(3) *$g(M) \geq 1+\varepsilon$, и при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$, всех $x \in \mathscr{X}$ таких, что $L(x) \geq N$, и всех $t \geq M$ имеют место неравенства*

$$\mathbf{P}(\Delta_{x,m} > t) \geq \frac{g(t)}{t}\mathbf{P}(\Delta_{x,m} < -t).$$

Тогда при всех $x \in \mathscr{X}$ и любом $m \geq 0$

$$\mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} L\big(X_{m+n}^{(x,m)}\big) = \infty\big) = 1. \tag{2.1}$$

Замечание 1. Предположение о неубывании и выпуклости функции g (см. выше) выбрано для простоты формулировки. Оно является техническим и может быть естественным образом ослаблено. Например, предположение о выпуклости функции может быть заменено предположением о ее «медленном изменении».

Замечание 2. Для класса так называемых ψ-неразложимых ЦМ известен следующий общий критерий невозвратности (см., например, [4, с. 174]; определение ψ-неразложимости см. там же). *Пусть цепь Маркова X является ψ-неразложимой. Она невозвратна тогда и только тогда, когда существуют ограниченная неотрицательная функция V и множество C, $\psi(C) > 0$, такие, что для всех $x \notin C$*

$$\mathbf{E}(V(X_1) - V(x)) \geq 0$$

и $\psi(D) > 0$, где $D = \{V(x) > \sup\limits_{y\in C} V(y)\}$.

Можно считать, что как теорема 1.1, так и теорема 2.1 являются конструктивными аналогами этого критерия: в них функция V строится в явном виде (а именно $Y_n = V\big(X_n^x\big)$, где Y_n определяется в (2.4)).

Замечание 3. Следующий пример показывает, что условие (1) в теореме 2.1 не является избыточным, т. е. условия (2), (3) не влекут, вообще говоря, (1).

Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Зададим распределение ξ_1 следующим образом: при $t \geq e$

$$\mathbf{P}(\xi_1 > t) = \frac{1}{2\ln t}, \quad \mathbf{P}(\xi_1 < -t) = \frac{1}{2\ln^3 t}.$$

Определим цепь Маркова $\{X(n)\}_{n\geq 0}$ на вещественной прямой: $X(0) = x_0$ и если $X(n) = x \equiv l + y$, где l целое и $0 \leq y < 1$, то $X(n+1) = l + \frac{1+y}{2}$ с вероятностью $\frac{3}{4}p_y$, $X(n+1) = l + (1 - 2(1-y))^+$ с вероятностью $\frac{1}{4}p_y$ и $X(n+1) = x + \xi_n$ с вероятностью $q_y \equiv 1 - p_y$. Предположим, что $1 > q_y > 0$ монотонно убывает по $y \in [0, 1)$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_{1-2^{-k}} < \infty.$$

Нетрудно проверить, что эта цепь Маркова удовлетворяет условиям (2) и (3) теоремы 2.1 при $L(x) = x^+$, $M = 10$ и $N = 0$. Мы покажем, что $\sup X(n) < \infty$ п. н. Для этого достаточно показать, что событие $\{|X(n+1) - X(n)| > 1\}$ произойдет конечное число раз с вероятностью 1. В свою очередь, последнее имеет место, если найдется $\alpha > 0$ такое, что для любой начальной точки $X(0) = x_0 \in [0, 1)$ справедлива оценка $\mathbf{P}(X(n) \in [0, 1)$ при всех $n) \geq \alpha$. В силу монотонности q_x достаточно показать, что эта вероятность положительна при $x_0 = 0$.

Имеем

$$\mathbf{P}(X(n+1) \in [0, 1) \mid X(n) = x \in [0, 1)) = p_x.$$

Введем вспомогательную цепь Маркова: $\widetilde{X}(0) = 0$ и если $\widetilde{X}(n) = 1 - 2^{-m}$, то $\widetilde{X}(n+1) = 1 - 2^{-m-1}$ с вероятностью $\frac{3}{4}$ и $\widetilde{X}(n+1) = (1 - 2^{-m+1})^+$ с вероятностью

$\frac{1}{4}$. Тогда
$$\alpha = \mathbf{E}\Big(\prod_{n\geq 0} p_{\widetilde{X}(n)}\Big). \tag{2.2}$$
Введем функцию L такую, что $L(1-2^{-m}) = m$ для целых неотрицательных m. Тем самым $Y_n = L(\widetilde{X}(n))$, $n \geq 0$, — случайное блуждание с задержкой в нуле: $Y(n+1) = Y(n)+1$ с вероятностью $\frac{3}{4}$ и $Y(n+1) = (Y(n)-1)^+$ с вероятностью $\frac{1}{4}$. Поэтому
$$\frac{Y(n)}{n} \to \frac{1}{2} \quad \text{п. н.}$$
и $\mathbf{E}\eta(k) \to 2$, где
$$\eta(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}(Y(n) = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}(\widetilde{X}(n) = 1-2^{-k}).$$
Тогда
$$\alpha = \mathbf{E}\prod_{k=0}^{\infty} p_{1-2^{-k}}^{\eta(k)} = \mathbf{E}\Big(\exp\Big(\sum_k \eta(k)\ln p_{1-2^{-k}}\Big)\Big)$$
и α положительно, если
$$\sum_k \eta(k) q_{1-2^{-k}} < \infty \qquad \text{п. н.},$$
а последнее следует из сходимости ряда
$$\sum_k \mathbf{E}\eta(k) q_{1-2^{-k}}.$$

Замечание 4. Условие (1) теоремы 2.1 трудно проверяемо, поэтому полезно привести условия, являющиеся достаточными для его выполнения.

Лемма 2.1. *Предположим, что существуют числа $N > 0$, $\delta > 0$ и $d > 0$ такие, что*

(1) $\tau_{x,m}(N) < \infty$ п. н. при всех $x \in \mathscr{X}$ и $m \geq 0$;

(2) при всех $m = 0, 1, 2, \dots$ и всех $x \in \mathscr{X}$ таких, что $L(x) \geq N$, выполнена оценка
$$\mathbf{P}\left(\Delta_{x,m} \geq d\right) \geq \delta.$$
Тогда для любых неотрицательного целого числа m и $x \in \mathscr{X}$
$$\mathbf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} L\big(X_{m+n}^{(x,m)}\big) = \infty\Big) = 1. \tag{2.3}$$

Мы опустим доказательство этой леммы, так как оно практически дословно повторяет доказательство леммы 2.1 из [1].

Доказательство теоремы 2.1. Начальные рассуждения те же, что и в доказательстве теоремы 1.1 (см. [1]). Доказательство проводится единообразно при всех $m \geq 0$, поэтому ограничимся случаем $m = 0$.

Возьмем произвольно $x \in \mathscr{X}$ и $C > 0$. Положим
$$Y_n = \int\limits_{1+\frac{(L(X_n^{(x)})-N)^+}{C}}^{\infty} \frac{dt}{h(t)}. \tag{2.4}$$

Достаточно доказать, что при надлежащем выборе числа $C > 0$

$$\text{последовательность } \{Y_n\}_{n\geq 0} \text{ образует положительный супермартингал.} \tag{2.5}$$

Действительно, если это так, то по известной теореме последовательность $\{Y_n\}$ сходится п. н., что в силу условия (1) теоремы эквивалентно сходимости $L\big(X_n^{(x)}\big) \to \infty$ п. н.

Итак, докажем утверждение (2.5). Так как мы имеем дело с цепью Маркова, достаточно показать справедливость неравенства

$$\mathbf{E}\big\{Y_{n+1} - Y_n \mid X_n^{(x)}\big\} \leq 0 \tag{2.6}$$

п. н. при всех n.

Доказательство неравенства (2.6) проводится единообразно при всех n. Поэтому ради упрощения обозначений ограничимся лишь случаем $n = 0$.

Неравенство $\mathbf{E}\{Y_1 - Y_0\} \leq 0$ очевидно, если x таково, что $L(x) \leq N$. Поэтому далее будем рассматривать лишь случай $z \equiv L(x) - N = \mathrm{const} > 0$. Обозначим

$$A(x) = Y_1 - Y_0 = \int\limits_{1+(z+\Delta_x)^+/C}^{1+z/C} \frac{dt}{h(t)},$$

где $\Delta_x \equiv \Delta_{x,0}$. Тогда

$$\mathbf{E}(A(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{1+(z+u)^+/C}^{1+z/C} \frac{dt}{h(t)} \mathbf{P}(\Delta_x \in du).$$

Проинтегрировав по частям это выражение, получим

$$E \equiv C\mathbf{E}(A(x)) = -\int\limits_0^\infty \frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{h(1+\frac{z+u}{C})}\,du + \int\limits_0^z \frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -u)}{h(1+\frac{z-u}{C})}\,du.$$

Введем соглашение $0/0 = 1/0 = \infty$ и перепишем условие (2) в более удобном виде:

$$\frac{\mathbf{E}\min(\Delta_x^+, M)}{\mathbf{E}\min(\Delta_x^-, M)} = \frac{\int_0^M \mathbf{P}(\Delta_x > u)\,du}{\int_0^M \mathbf{P}(\Delta_x < -u)\,du} \geq 1 + \varepsilon. \tag{2.7}$$

При доказательстве нам понадобятся некоторые положительные постоянные r, R, C, удовлетворяющие ряду ограничений.

Выберем сначала R и r. Пусть

$$T(\alpha) = \sup_{t\geq 0} \frac{g(1+\alpha t)}{g(1+t)}, \quad \alpha > 1$$

(из выпуклости g следуют конечность числа $T(\alpha)$ при каждом $\alpha > 1$ и сходимость $T(\alpha) \to 1$ при $\alpha \to 1$).

Предположим, что число $R \in (0,1)$ выбрано настолько малым, что имеет место неравенство

$$\frac{h(1+2R)}{h(1)} \leq 1 + \varepsilon, \tag{2.8}$$

а число $r \in (0,1)$ — настолько малым, что при $\alpha = \frac{1+r}{1-r}$ выполняется неравенство

$$(\alpha T(\alpha) - 1) \le \varepsilon. \tag{2.9}$$

Отметим, что в силу определения 1.1 при любом $\alpha > 1$ и любом $t > 0$

$$1 \le \frac{h(1+\alpha t)}{h(1+t)} = \frac{1+\alpha t}{1+t} \frac{g(1+\alpha t)}{g(1+t)} \le \alpha T(\alpha),$$

поэтому (2.9) влечет неравенство

$$\frac{h(1+(1+r)u)}{h(1+(1-r)u)} \le 1+\varepsilon \tag{2.10}$$

при любом $u > 0$ (достаточно положить $t = (1-r)u$).

Теперь выберем C настолько большим, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$g(rRC/2) \ge 2(1+\varepsilon) \tag{2.11}$$

и

$$C > \frac{\max(M, 1+R(1+r), 16K)}{Rr}, \tag{2.12}$$

где $K = \int\limits_1^\infty (h(t))^{-1}\,dt$.

Перейдем собственно к доказательству. Возможны два случая: а) $0 < z \le RC$ и б) $z > RC$.

Рассмотрим первый случай. Оценим E сверху:

$$E \le -\int\limits_0^{RC} \frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{h(1+\frac{z+u}{C})}\,du + \int\limits_0^{RC} \frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -u)}{h(1+\frac{z-u}{C})}\,du \equiv E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

где

$$E_1 = -\int\limits_{M+0}^{RC} \frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{h(1+\frac{z+u}{C})}\,du, \quad E_2 = -\int\limits_0^{M} \frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{h(1+\frac{z+u}{C})}\,du,$$

$$E_3 = \int\limits_0^{M} \frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -u)}{h(1+\frac{z-u}{C})}\,du, \quad E_4 = \int\limits_{M+0}^{RC} \frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -u)}{h(1+\frac{z-u}{C})}\,du.$$

Отметим, что эти величины допускают (в силу монотонности h) следующие оценки сверху:

$$E_1 \le -\frac{1}{h(1+2R)} \int\limits_{M+0}^{RC} \mathbf{P}(\Delta_x > u)\,du, \quad E_2 \le -\frac{1}{h(1+2R)} \int\limits_0^{M} \mathbf{P}(\Delta_x > u)\,du,$$

$$E_3 \le \frac{1}{h(1)} \int\limits_0^{M} \mathbf{P}(\Delta_x < -u)\,du, \quad E_4 \le \frac{1}{h(1)} \int\limits_{M+0}^{RC} \mathbf{P}(\Delta_x < -u)\,du.$$

Воспользуемся неравенством (2.8) и условием (3):

$$E_1 + E_4 \le \int\limits_{M+0}^{RC} \left(-\frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{(1+\varepsilon)h(1)} + \frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{g(u)h(1)} \right) du \le 0.$$

Применим неравенства (2.8) и (2.7):

$$E_2 + E_3 \le \int\limits_0^M \left(-\frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{(1+\varepsilon)h(1)} + \frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -u)}{h(1)} \right) du \le 0.$$

В итоге получаем $E \le 0$.

Рассмотрим второй случай:

$$E \le \left(\int\limits_0^{rz} + \int\limits_{rz+0}^{z} \right) \left(-\frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{h(1+\frac{z+u}{C})} + \frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -u)}{h(1+\frac{z-u}{C})} \right) du \equiv J_1 + J_2.$$

Первое слагаемое, пользуясь монотонностью функции h, оценим следующим образом:

$$J_1 \le \int\limits_0^{rz} \left(-\frac{\mathbf{P}(\Delta_x > u)}{h(1+\frac{z+rz}{C})} + \frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -u)}{h(1+\frac{z-rz}{C})} \right) du.$$

Из неравенства (2.10) следует, что

$$J_1 \le \frac{1}{h(1+\frac{z+rz}{C})} \int\limits_0^{rz} \left(-\mathbf{P}(\Delta_x > u) + (1+\varepsilon)\mathbf{P}(\Delta_x < -u)\right) du.$$

Представим последнее выражение в виде суммы трех интегралов и оценим их. Ввиду неравенства (2.7)

$$\int\limits_0^M \left(-\mathbf{P}(\Delta_x > u) + (1+\varepsilon)\mathbf{P}(\Delta_x < -u)\right) du \le 0.$$

Воспользовавшись условием (3) теоремы, получим

$$\int\limits_{M+0}^{rz/2} \left(-\mathbf{P}(\Delta_x > u) + (1+\varepsilon)\mathbf{P}(\Delta_x < -u)\right) du \le 0.$$

Так как $z > RC$, в силу монотонности g и неравенства (2.11)

$$g(rz/2) \ge g(rRC/2) \ge 2(1+\varepsilon),$$

а значит,

$$\int\limits_{rz/2+0}^{rz} \left(-\mathbf{P}(\Delta_x > u)/2 + (1+\varepsilon)\mathbf{P}(\Delta_x < -u)\right) du \le 0.$$

В итоге получаем следующую оценку:

$$J_1 \le -\frac{1}{2h(1+\frac{z+rz}{C})} \int\limits_{rz/2}^{rz} \mathbf{P}(\Delta_x < -u)\, du \le -\frac{rz\mathbf{P}(\Delta_x < -rz)}{4h(1+\frac{z+rz}{C})}. \tag{2.13}$$

Для J_2 справедливо неравенство

$$J_2 \le K\mathbf{P}(\Delta_x > rz). \tag{2.14}$$

Из (2.12) следует, что $g(rz) \geq g(1 + z(1+r)/C)$. Действительно, функция g не убывает, и так как $z > RC$, то

$$rz - (1 + z(1+r)/C) = z\frac{rC - (1+r)}{C} - 1 > RrC - R(1+r) - 1 > 0.$$

Из (2.13) и (2.14) вытекает, что

$$E \leq -\frac{rz\mathbf{P}(\Delta_x < -rz)}{4(1 + \frac{z+rz}{C})g(rz)} + K\mathbf{P}(\Delta_x > rz).$$

Далее, поскольку $R < 1$, $r < 1$ и $z > RC$, имеет место неравенство $rz/4(1 + (z + rz)/C) > K$. Действительно,

$$rz - 4K(1 + z(1+r)/C) > (r - 8K/C)z - 4K > rRC/2 - 4K > 0$$

ввиду (2.12). Следовательно,

$$E \leq -K\frac{\mathbf{P}(\Delta_x < -rz)}{g(rz)} + K\mathbf{P}(\Delta_x > rz) \leq 0$$

по условию (3). Теорема 2.1 доказана.

Объединим теперь утверждения теорем 1.1 и 2.1. Обозначим через $\mu_{x,m}(\cdot) = \mathbf{P}(\Delta_{x,m} \in \cdot)$ распределение с. в. $\Delta_{x,m}$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняется условие* (1) *теоремы* 2.1. *Кроме того, предположим, что для любого $x \in \mathscr{X}$ при всех $m = 0, 1, 2, \dots$ существует разложение*

$$\mu_{x,m} = c^{(1)}_{x,m}\mu^{(1)}_{x,m} + c^{(2)}_{x,m}\mu^{(2)}_{x,m},$$

где $\mu^{(1)}_{x,m}$ и $\mu^{(2)}_{x,m}$ — вероятностные меры, $c^{(1)}_{x,m}, c^{(2)}_{x,m} \geq 0$, $c^{(1)}_{x,m} + c^{(2)}_{x,m} = 1$, причем существуют числа $N > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$ и функция $h \in \mathscr{H}$ такие, что

(a) *случайные величины $\Delta^{(1)}_{x,m}$ с распределением $\mu^{(1)}_{x,m}$ удовлетворяют условиям* (2), (3) *теоремы* 1.1;

(b) *случайные величины $\Delta^{(2)}_{x,m}$ с распределением $\mu^{(2)}_{x,m}$ удовлетворяют условиям* (2), (3) *теоремы* 2.1.

Тогда при всех $x \in \mathscr{X}$ и любом $m \geq 0$

$$\mathbf{P}\big(\lim_{n\to\infty} L\big(X^{(x,m)}_{m+n}\big) = \infty\big) = 1. \tag{2.15}$$

Доказательство. Повторим начальные рассуждения из доказательства теоремы 2.1. Достаточно показать справедливость неравенства $\mathbf{E}\,(Y_1 - Y_0) \leq 0$, где

$$Y_0 = \int\limits_{1+\frac{(L(x)-N)^+}{C}}^{\infty} \frac{dt}{h(t)}, \quad Y_1 = \int\limits_{1+\frac{(L(X_1^{(x)})-N)^+}{C}}^{\infty} \frac{dt}{h(t)}.$$

Обозначим

$$A(x,u) = \int\limits_{1+\frac{(L(u)-N)^+}{C}}^{1+\frac{(L(x)-N)^+}{C}} \frac{dt}{h(t)}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\{Y_1 - Y_0\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(x,u)\mu(du) = c^{(1)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(x,u)\mu^{(1)}(du) + c^{(1)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(x,u)\mu^{(2)}(du),$$

где первый интеграл неположителен в силу теоремы 1.1, а второй — в силу теоремы 2.1. Теорема 2.2 доказана.

3. Цепи Маркова на вещественной прямой (случайные блуждания)

Следствия из теоремы 2.1. Предположим, что цепь Маркова X однородна по времени и принимает значения на вещественной прямой (т. е. является случайным блужданием). Следуя традиционным обозначениям, будем писать S_n вместо X_n. Случайное блуждание $S_n^{(x)}$ задается с помощью рекурсии:

$$S_0^{(x)} = x, \quad S_{n+1}^{(x)} = S_n^{(x)} + \xi_{n,S_n},$$

где $\{\xi_{n,y}\}$ — семейство независимых в совокупности случайных величин и распределение $\xi_{n,y}$ не зависит от n. Случайное блуждание называется *однородным*, если $\{\xi_{n,y}\}$ — семейство независимых одинаково распределенных случайных величин. При этом индекс y может быть опущен. При использовании пробной функции $L(x) = x^+$ из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 3.1. *Предположим, что существуют числа $N > 0$, $M > 0$ и измеримая функция $h \in \mathscr{H}$ такие, что*

(1) *при всех x с единичной вероятностью*

$$\limsup_{n\to\infty} S_n^{(x)} = \infty; \tag{3.1}$$

(2) *при $y \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\inf_{x\geq N} \mathbf{E}\min\bigl(\xi_x^+, y\bigr) \to \infty; \tag{3.2}$$

(3) *при всех $x \geq N$, $t \geq M$ выполнены неравенства*

$$\mathbf{P}(\xi_x > t) \geq \frac{h(t)}{t}\mathbf{P}(\xi_x < -t).$$

Тогда при всех x

$$\mathbf{P}\bigl(\lim_{n\to\infty} S_n^{(x)} = \infty\bigr) = 1. \tag{3.3}$$

В случае однородного случайного блуждания теорема 3.1 влечет

Следствие 3.1. *Пусть $\mathbf{E}\xi_1^+ = \mathbf{E}\xi_1^- = \infty$, и пусть существуют число $N > 1$ и $h \in \mathscr{H}$ такие, что для любого $t > N$ имеет место неравенство*

$$\frac{\mathbf{P}(\xi_1 > t)}{\mathbf{P}(\xi_1 < -t)} \geq \frac{h(t)}{t}. \tag{3.4}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1. \tag{3.5}$$

Доказательства даны в приложении.

Классификация однородных случайных блужданий с бесконечным средним. В первом издании учебника В. Феллера (см. [5, т. II, гл. XII.2, теорема 2]) содержалось такое утверждение: если $\mathbf{E}\xi_1^+ = \mathbf{E}\xi_1^- = \infty$, то $\limsup S_n = \infty$ и $\liminf S_n = -\infty$ п. н. Однако Б. А. Рогозин (см. [6]) показал (на примере устойчивых распределений), что это утверждение ошибочно.

Напомним хорошо известную классификацию случайных блужданий (см. [7, гл. XII.2, теорема 1]). Обозначим $\tau_+ = \inf\{n > 0 : S_n \geq 0\}$ и $\tau_- = \inf\{n \geq 0 : S_n < 0\}$.

Теорема 3.2. *Существуют лишь три возможности:*
(a) $\lim S_n = \infty$ *п. н., при этом*

$$\mathbf{E}\tau_+ < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\tau_- = \infty) > 0;$$

(b) $\lim S_n = -\infty$ *п. н., при этом*

$$\mathbf{E}\tau_- < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\tau_+ = \infty) > 0;$$

(c) $\limsup S_n = \infty$ *и* $\liminf S_n = -\infty$ *п. н., при этом*

$$\mathbf{E}\tau_+ = \mathbf{E}\tau^- = \infty, \quad \mathbf{P}(\tau_+ < \infty) = \mathbf{P}(\tau_- < \infty) = 1.$$

В частном случае, когда среднее не существует, Х. Кестен (см. [8, следствие 3, с. 1195]) получил следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Если* $\mathbf{E}|\xi_1| = \infty$, *то имеет место одна из возможностей:*
(a) $\mathbf{P}(\lim S_n/n = +\infty) = 1$;
(b) $\mathbf{P}(\lim S_n/n = -\infty) = 1$;
(c) $\mathbf{P}(\limsup S_n/n = +\infty) = \mathbf{P}(\liminf S_n/n = -\infty) = 1$.

Далее, К. Эриксон (см. [9]) привел простые условия, равносильные каждой из возможностей. Обозначим

$$J_+ = \int_0^\infty \frac{x}{\mathbf{E}\min(\xi_1^-, x)}\mathbf{P}(\xi_1 \in dx), \quad J_- = \int_0^\infty \frac{x}{\mathbf{E}\min(\xi_1^+, x)}\mathbf{P}(\xi_1 \in -dx).$$

Справедлива

Теорема 3.4 [9]. *Если* $\mathbf{E}|\xi_1| = \infty$, *то*
(a) $\mathbf{P}(\lim S_n/n = +\infty) = 1 \iff J_- < \infty$;
(b) $\mathbf{P}(\lim S_n/n = -\infty) = 1 \iff J_+ < \infty$;
(c) $\mathbf{P}(\limsup S_n/n = +\infty) = \mathbf{P}(\liminf S_n/n = -\infty) = 1 \iff J_+ = J_- = \infty$.

В приложении мы приведем новые (на наш взгляд, более краткие и прямые по сравнению с оригинальными) доказательства теорем 3.3 и 3.4.

Для распределений с регулярно меняющимися хвостами в [10, теорема 2.3, п. 1] (в качестве следствия другого результата) получено такое утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\mathbf{P}(\xi_1 > t) \ge W(t) \equiv t^{-\alpha} L_W(t), \quad \mathbf{P}(\xi_1 < -t) \le V(t) \equiv t^{-\beta} L_V(t), \tag{3.6}$$

где $L_V(t)$ *и* $L_W(t)$ *— медленно меняющиеся функции,* $\alpha < 1$ *и* $V(t) = o(W(t))$. *Тогда сходимость ряда*

$$\sum_n V(W^{(-1)}(1/n)) < \infty \tag{3.7}$$

влечет конечность $\inf_{k\ge 0} S_k$ *и, стало быть, сходимость* $S_n \to \infty$ *п. н.*

Нетрудно проверить, что утверждение предложения 3.1 вытекает из теоремы 3.4.

Покажем на примере, что предлагаемые в теореме 2.1 и следствии 3.1 достаточные условия близки к необходимым.

Пример 1. Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, где при $t \ge e$

$$\mathbf{P}(\xi_1 > t) = \frac{C}{t^\alpha \ln^\beta t}, \quad \mathbf{P}(\xi_1 < -t) = \frac{C}{t^\alpha \ln^\gamma t},$$

когда $0 \le \alpha < 1$. Известно (см. [7, гл. VIII.9, теорема 1]) следующее свойство регулярно меняющихся функций:

$$\frac{t\mathbf{P}(\xi_1 > t)}{\mathbf{E}\min(\xi_1^+, t)} \to 1 - \alpha \quad \text{при} \ \ t \to \infty.$$

Тогда, так как $\alpha < 1$, условие $J_- < \infty$ можно переписать так:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\mathbf{P}(\xi_1 > t)} \mathbf{P}(\xi_1 \in -dt) < \infty.$$

Это равносильно сходимости интеграла

$$\int\limits_e^\infty \left(\frac{\alpha}{t \ln^{\gamma-\beta} t} + \frac{\gamma}{t \ln^{1+\gamma-\beta} t} \right) dt. \tag{3.8}$$

Значит, если $0 < \alpha < 1$, то блуждание невозвратно тогда и только тогда, когда $\beta + 1 < \gamma$. Следствие 3.1 дает то же условие $\beta + 1 < \gamma$ в качестве достаточного. В случае $\alpha = 0$, как следует из (3.8), случайное блуждание невозвратно тогда и только тогда, когда $\beta < \gamma$. В этом случае следствие 3.1 дает завышенные достаточные условия. Однако мы можем применить непосредственно теорему 2.1, взяв в качестве пробной функции $L(t) = \ln(1 + t^+)$, и получить, что условия $\beta < \gamma$ являются достаточными.

4. Приложение

Доказательство теоремы 3.1. Проверим условия теоремы 2.1. Условие (1) выполняется автоматически. Определим пробную функцию равенством $L(t) = t^+$. Тогда $\Delta_{x,m} \equiv \Delta_x = l(S_1^x r)^+ - x^+$ при $x \in \mathbb{R}$.

Без ограничения общности будем предполагать, что $g(M) \ge 2$, так как, заменив M большим числом, мы всегда можем этого добиться.

Напомним соглашение $(0/0) = (1/0) = \infty$. Для любого $t > M$ и $x \ge N$ получаем

$$\frac{\mathbf{P}(\Delta_x > t)}{\mathbf{P}(\Delta_x < -t)} = \frac{\mathbf{P}(\xi_x > t)}{\mathbf{P}(\xi_x < -t)\mathbf{I}(x > t)} \ge g(t) \ge 2.$$

Это неравенство гарантирует выполнение условия (3).

Если $x \ge N$ и $y > M$, то

$$\mathbf{E}\min\bigl(\Delta_x^+, y\bigr) \ge g(M) \int\limits_M^y \mathbf{P}(\Delta_x^- > u)\, du$$

$$\ge g(M)(\mathbf{E}\min(\Delta_x^-, y) - M) \equiv g(M) f(x,y).$$

Тогда

$$\frac{\mathbf{E}\min(\Delta_x^+, y)}{\mathbf{E}\min(\Delta_x^-, y)} \ge g(M) \frac{f(x,y)}{f(x,y) + M} \ge 2 \frac{\inf\limits_{x>N} f(x,y)}{\inf\limits_{x>N} f(x,y) + M} \to 2 \quad \text{при } y \to \infty.$$

Поэтому при достаточно большом M условие (2) будет выполнено. Теорема 3.1 доказана.

Утверждение следствия 3.1 вытекает из теоремы 3.1, если заметить, что в однородном случае условие (3.2) следует из $\mathbf{E}\xi_1^+ = \infty$, а выполнение условия (3.1) гарантируется следующей леммой.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathbf{E}|\xi_1| = \infty$. *Предположим, что существует число* $M > 0$ *такое, что для любого* $t \geq M$ *имеет место соотношение*

$$\frac{\mathbf{P}(\xi_1 > t)}{\mathbf{P}(\xi_1 < -t)} \geq 1.$$

Тогда

$$\overline{\lim} \frac{S_n}{n} = \infty \quad \text{п. н.} \tag{4.1}$$

Доказательство. В силу монотонности достаточно рассмотреть случай $\mathbf{P}(\xi_1 > t) = \mathbf{P}(\xi_1 < -t)$ при $t \geq M$. Обозначим $\xi_i^{(1)} = \xi_i \mathbf{I}(|\xi_i| \leq M)$ и $\xi_i^{(2)} = \xi_i \mathbf{I}(|\xi_i| > M)$, а также $S_n^{(1)} = \xi_1^{(1)} + \dots + \xi_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)} = \xi_1^{(2)} + \dots + \xi_n^{(2)}$. Отметим, что $\liminf \frac{S_n^{(1)}}{n} = \lim \frac{S_n^{(1)}}{n} \geq -M$ п. н. Известно, что для симметричных случайных блужданий с бесконечным средним $\limsup \frac{S_n^{(2)}}{n} = -\liminf \frac{S_n^{(2)}}{n} = \infty$ п. н., а значит, и $\limsup \frac{S_n}{n} = \infty$. Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2 [9]. *Пусть* $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что* $\mathbf{P}(\zeta_1 \geq 0) = 1$ *и* $\mathbf{P}(\zeta_1 > 0) > 0$. *Положим*

$$m(t) = \mathbf{E}\min(\zeta_1, t), \quad U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta_1 + \dots + \zeta_n < t).$$

Тогда

$$\frac{t}{m(t)} \leq U(t) \leq \frac{2t}{m(t)}.$$

Ради полноты изложения приведем

Доказательство леммы 4.2. Зафиксируем $t > 0$ и положим

$$\tilde{\zeta}_i(t) = \min(\zeta_i, t), \quad \tilde{\eta}(t) = \min\left(n : \sum_{i=1}^{n} \tilde{\zeta}_i \geq t\right)$$

и $\widetilde{U}(t) = \sum \mathbf{P}(\tilde{\zeta}_1 + \dots + \tilde{\zeta}_n < t)$. Тогда $\widetilde{U}(t) = \mathbf{E}\tilde{\eta}(t)$ и $\widetilde{U}(t) = U(t)$. Отметим, что $t \leq \sum\limits_{i=1}^{\tilde{\eta}(t)} \tilde{\zeta}_i(t) \leq 2t$ п. н. и по тождеству Вальда

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tilde{\eta}(t)} \tilde{\zeta}_i\right) = \mathbf{E}\tilde{\eta}(t) m(t).$$

Следствие 4.1. *Обозначим через* $U^1(x)$ *функцию восстановления в случае, когда* ζ_n *распределены как* ξ_1^+, *и через* $U^2(x)$ — *в случае, когда* ζ_n *имеют распределение* $\mathbf{P}(\zeta_n \in \cdot) = \mathbf{P}(\xi_1 \in \cdot \mid \xi_1 \geq 0)$. *Положим при* $r = 1, 2$

$$J_-^r = \int_0^{\infty} U^r(x) \mathbf{P}(\xi_1 \in -dx).$$

Тогда все три интеграла J_-, J_-^1, J_-^2 одновременно либо конечны, либо бесконечны.

Перейдем собственно к доказательству теорем 3.3 и 3.4. Естественно, достаточно рассмотреть только случай разнозначных случайных величин, т. е. $\mathbf{P}(\xi_1 > 0) > 0$ и $\mathbf{P}(\xi_1 < 0) > 0$. Мы докажем утверждения (a) и (b) теоремы 3.4, из них будут следовать все остальные утверждения теорем 3.3 и 3.4. Разобьем доказательство на 4 шага.

Шаг 1. Если $\lim S_n = \infty$ п. н., то $J_- < \infty$.

Шаг 2. Если $J_- < \infty$, то $\lim S_n = \infty$ п. н.

Шаг 3. Если $\lim S_n = \infty$, то $\lim \frac{S_n}{n} = \infty$ п. н.

Шаг 4. Если $\limsup S_n = \infty = -\liminf S_n$, то $\limsup \frac{S_n}{n} = \infty = -\liminf \frac{S_n}{n}$ (при этом с необходимостью $J_+ = J_- = \infty$).

Шаг 1. Если $\lim S_n = \infty$, то

$$\mathbf{E}(\tau_+ \mathbf{I}\{\xi_1 < 0\}) \le \mathbf{E}\tau_+ < \infty.$$

При этом

$$\mathbf{E}(\tau_+ \mathbf{I}\{\xi_1 < 0\}) = \int_0^\infty (1 + U_\xi(x)) \mathbf{P}(\xi_1 \in -dx),$$

где $U_\xi(x) = \mathbf{E}\eta_\xi(x)$ и

$$\eta_\xi(x) = \min\{n : S_n \ge x\} \ge \min\left\{n : \sum_1^n \xi_i^+ \ge x\right\}.$$

Поэтому $U_\xi(x) \ge U^{(1)}(x)$ и $J_-^1 < \infty$. Следовательно, конечен и интеграл J_-.

Шаг 2. Обозначим $j_0 = 0$ и при $n \ge 0$

$$j_{n+1} = \min\{i > j_n : \xi_i < 0\}.$$

Положим $\nu_0 = 0$, $\nu_{n+1} = j_{n+1} - j_n$, $\psi_{n+1} = -\xi_{j_{n+1}}$,

$$\varphi_{n+1} = S_{j_{n+1}-1} - S_{j_n} = \sum_{i=j_n+1}^{j_{n+1}-1} \xi_i$$

и $\varphi_{n+1} = 0$, если $j_{n+1} = j_n + 1$.

Отметим, что

(1) с. в. $\{\psi_n\}$ независимы в совокупности и имеют распределение

$$\mathbf{P}(\psi_n \in \cdot) = \mathbf{P}(-\xi_1 \in \cdot | \xi_1 < 0);$$

(2) с. в. $\{\nu_n\}$ независимы в совокупности, одинаково распределены, не зависят от $\{\psi_n\}$ и имеют геометрическое распределение с параметром $p = \mathbf{P}(\xi_1 < 0) \in (0, 1)$. В частности, $\mathbf{E}\nu_1 = 1/p > 1$;

(3) с. в. $\{\varphi_n\}$ независимы в совокупности и могут быть представлены как

$$\varphi_1 = \sum_{i=\nu_{n-1}-n+1}^{\nu_n - n} \zeta_i, \tag{4.2}$$

где $\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$ независимы в совокупности, не зависят от ν_n и $\{\psi_n\}$ и имеют распределение $\mathbf{P}(\zeta_n \in \cdot) = \mathbf{P}(\xi_1 \in \cdot \mid \xi_1 \ge 0)$.

Требуется показать, что $\mathbf{P}(\inf_{n\ge1} S_n = -\infty) = 0$. Так как $S_{j_n} = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_i - \psi_i)$, то $\{\inf S_n = -\infty\} \subseteq A$, где

$$A = \{S_{j_n} \le 0 \text{ бесконечно часто}\} = \left\{\sum_{1}^{n}\psi_i \ge \sum_{1}^{n}\varphi_i \text{ бесконечно часто}\right\}.$$

В свою очередь, $\mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(B)$, где $B = \left\{\eta\left(\sum_1^n \psi_i\right) \ge \eta\left(\sum_1^n \varphi_i\right) \text{ бесконечно часто}\right\}$ и $\eta(t) = \min\{n \ge 1 : \zeta_1 + \dots + \zeta_n > t\}$. В силу (4.2)

$$\eta\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{n}(\nu_i - 1) + 1$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}(B) \le \mathbf{P}\left\{\eta\left(\sum_{1}^{n}\psi_i\right) \ge \sum_{1}^{n}(\nu_i - 1) \quad \text{бесконечно часто}\right\}.$$

Поскольку по усиленному закону больших чисел $\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i}{n} \to \frac{1}{p} > 1$ п. н., показав, что

$$\frac{\eta(\sum_{i=1}^{n}\psi_i)}{n} \to 0 \quad \text{п. н.,} \tag{4.3}$$

получим $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 0$.

Определим

$$X_{[1,n]} = \eta\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_i\right)$$

и, далее, при $j \ge i > 1$

$$X_{[i,j]} = \min\left\{n : \sum_{l=1}^{n}\zeta_{X_{[1,i-1]}+l} > \sum_{k=i}^{j}\psi_k\right\}.$$

Нетрудно видеть, что семейство случайных величин $X_{[i,j]}$ является стационарным и субаддитивным, т. е.

(a) семейства $\{X_{[i,j]}\}_{1\le i\le j<\infty}$ и $\{X_{[i+1,j+1]}\}_{1\le i\le j<\infty}$ одинаково распределены

(b) при $i < j < k$

$$X_{[i,k]} \le X_{[i,j]} + X_{[j+1,k]} \quad \text{п. н.}$$

Кроме того, остаточная σ-алгебра вырожденная и $\mathbf{E}X_{[1,1]} = J_-^2 < \infty$. Из субаддитивной теоремы Кингмана следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_{[1,n]}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{E}X_{[1,n]}}{n} = \liminf_{n\to\infty}\frac{\mathbf{E}X_{[1,n]}}{n} \quad \text{п. н.} \tag{4.4}$$

Далее,

$$\mathbf{E}X_{[1,n+1]} = \mathbf{E}X_{[1,n]} + \int_0^\infty \mathbf{P}(\zeta_1 \in dt)\int_0^t dV_n(u)U^2(t-u) \equiv \mathbf{E}X_{[1,n]} + I_{n+1},$$

где $U^2(t) = \mathbf{E}\eta(t)$ и

$$V_n(t) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\eta(\psi_1+\dots+\psi_n)} \zeta_i - (\psi_1 + \dots \psi_n) < t\right)$$

— функция распределения первого перескока через случайный уровень $\psi_1 + \dots + \psi_n$ для последовательных сумм $\sum\limits_1^n \zeta_i$. Оценим

$$I_{n+1} \le \int_0^\infty \mathbf{P}(\zeta_1 \in dt) \int_0^t dV_n(u) U^2(t) = \int_0^\infty U^2(t) V_n(t) \mathbf{P}(\zeta_1 \in dt).$$

Так как $J_- < \infty$, в силу следствия 4.1 имеем

$$J_-^2 = \int_0^\infty U^2(t)\mathbf{P}(\zeta_1 \in dt) < \infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем T такое, что

$$\int_T^\infty U^2(t)\mathbf{P}(\zeta_1 \in dt) \le \varepsilon.$$

Далее, так как $\psi_1 + \dots + \psi_n \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$ и $\mathbf{E}\zeta_1 = \infty$, то $V_n(T) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} I_{n+1} \le \lim_{n\to\infty} U^2(T) V_n(T) \mathbf{P}(\zeta_1 \le T) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\lim \frac{\mathbf{E}X_{[1,n]}}{n} = 0,$$

что в силу (4.4) влечет (4.3).

Шаг 3. Зафиксируем любое число c, введем случайные величины $\tilde{\xi}_n = \xi_n - c$ и определим интеграл

$$\widetilde{J}_- = \int_0^\infty \frac{x}{\mathbf{E}\min(\tilde{\xi}_1, x)} \mathbf{P}(\tilde{\xi}_1 \in -dx).$$

Ясно, что интегралы J_- и $\widetilde{J}_-$ сходятся либо расходятся одновременно.

Значит, если $\lim S_n = \infty$, то $\widetilde{J}_- < \infty$. Но тогда $\lim \widetilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim S_n - nc) = \infty$ п. н. при любом c. Следовательно, $\liminf \frac{S_n}{n} \ge c$. Устремляя c к $+\infty$, получаем требуемое утверждение.

Шаг 4. Предположим, что один из пределов $\limsup \frac{S_n}{n}$ или $\liminf \frac{S_n}{n}$ конечен. Пусть, скажем, $\liminf \frac{S_n}{n} = d > -\infty$ (отметим, что с необходимостью $d = \mathrm{const}$). Введем случайные величины $\tilde{\xi}_n = \xi_n + |d| + 1, \widetilde{S}_n = \sum\limits_1^n \tilde{\xi}_i$. Тогда $\liminf \frac{\widetilde{S}_n}{n} \ge 1$, поэтому $\widetilde{S}_n \to \infty$ п. н. Воспользовавшись последовательно рассуждениями из шагов 1 и 3 (при $c = -|d| - 1$), получаем, что $J_- < \infty$ и, следовательно, $\lim S_n = \lim \frac{S_n}{n} = \infty$ п. н., что противоречит предположению.

Авторы выражают благодарность Б. А. Рогозину за стимулирующие обсуждения и идею леммы 4.1, а также рецензенту за многочисленные полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фосс С. Г., Денисов Д. Э.* Об условиях невозвратности для цепей Маркова // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 425–433.
2. *Fayolle G., Malyshev V. A., Menshikov M. V.* Topics on the constructive theory of countable Markov Chains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
3. *Kifer Yu.* Ergodic Theory of Random Transformations. Boston: Birkhauser, 1986.
4. *Meyn S. P., Tweedie R. L.* Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1993.
5. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. New York: Wiley, 1966.
6. *Рогозин Б. А.* Замечание к одной теореме В. Феллера // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, № 3. С. 555–556.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
8. *Kesten H.* The limit points of a normalized random walk // Ann. Math. Statist. 1970. V. 41. P. 1173–1205.
9. *Erickson K. B.* The strong law of large numbers when the mean is undefined // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 185. P. 371–381.
10. *Borovkov A. A.* Large deviation probabilities and finiteness test for the maximum of sums of independent random variables without mean. Новосибирск, 2001. (Препринт / ИМ СО РАН, № 85) (Принято к печати в Probab. Th. Rel. F.).

Статья поступила 15 августа 2001 г.

Денисов Денис Эдуардович
Department of AMS, Heriot-Watt University, Edinburgh, EH14 4AS, UK.
denis79@imail.ru

Фосс Сергей Георгиевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090,
Department of AMS, Heriot-Watt University, Edinburgh, EH14 4AS, UK
foss@math.nsc.ru