Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 510.67

СТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОЛНОЙ ТЕОРИЕЙ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОДСИСТЕМ

Д. Ю. Власов

Аннотация: Описывается строение алгебраических систем с полной теорией бесконечных подсистем, т. е. систем, у которых все бесконечные подсистемы элементарно эквивалентны. Доказывается теорема, характеризующая свойство системы иметь ровно одну полную теорию бесконечных подсистем.

Ключевые слова: алгебраическая система, полная теория, мономорфность

1. Введение

В 50-х гг. 20-го века было введено понятие мономорфной алгебраической системы — системы, у которой все равномощные конечные подсистемы попарно изоморфны. Было доказано, что мономорфность алгебраической системы конечной сигнатуры эквивалентна тому, что все предикаты из сигнатуры выражаются через некоторый линейный порядок бескванторными формулами.

В данной работе развиваются идеи и понятия, похожие на понятие мономорфности. В частности, определяются полностью мономорфные системы, в которых все равномощные подсистемы (не только конечные) изоморфны. Доказывается, что полная мономорфность счетной системы конечной сигнатуры эквивалентна выразимости всех предикатов из сигнатуры бескванторными формулами через некоторый линейный порядок по типу ω, а полная мономорфность алгебраической системы несчетной мощности эквивалентна выразимости всех предикатов из сигнатуры бескванторными формулами через равенство. Кроме того, для полной мономорфности некоторой системы конечной сигнатуры требуется значительно меньше, чем в исходном определении. А именно, для полной мономорфности произвольной алгебраической системы конечной сигнатуры достаточно того, чтобы все ее счетные подсистемы были элементарно эквивалентны.

2. Строение систем с одной полной теорией бесконечных подсистем

Везде далее в тексте будут рассматриваться только бесконечные алгебраические системы с сигнатурой из предикатов без функциональных символов.

Определение. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *n-мономорфной*, если для любых двух подсистем $x, y \subseteq A$ мощности $|x| = |y| = n$ эти подсистемы изоморфны: $x \cong y$. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *мономорфной*, если для любых двух подсистем $x, y \subseteq A$ мощности $|x| = |y| < \omega$, эти подсистемы изоморфны: $x \cong y$, иначе говоря, если $\mathfrak{A}$ n-мономорфна для любого n. Наконец, $\mathfrak{A}$ называется *полностью мономорфной*, если для любых двух подсистем $x, y \subseteq A$ одной мощности $|x| = |y|$ эти подсистемы изоморфны: $x \cong y$.

Лемма 1. *Если у некоторой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры все счетные подсистемы элементарно эквивалентны, то система $\mathfrak{A}$ мономорфна.*

Доказательство. Заметим, что свойство мономорфности элементарно, так как легко записывается на языке первого порядка (просто для каждого n фиксируем предложением тип изоморфизма всех n-подсистем). Кроме того, по теореме Левенгейма — Сколема в $\mathfrak{A}$ существует счетная элементарная подсистема $\mathfrak{A}_0$. Таким образом, утверждение свелось к случаю счетной алгебраической системы. Остается показать, что для любого числа n в $\mathfrak{A}$ существует n-мономорфная бесконечная подсистема. Для этого рассмотрим разбиение множества n-подмножеств в $\mathfrak{A}$ на классы попарно изоморфных подмножеств $A^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{m_n} X_i$ — число классов конечно в силу конечности сигнатуры. По теореме Рамсея существует такое бесконечное подмножество $A_0 \subseteq A$, что $A_0^{(n)} \subseteq X_i$ для некоторого i. Но это подмножество как подсистема и будет искомой n-мономорфной бесконечной подсистемой.

Лемма 2. *Если A — некоторое множество и Σ_1, Σ_2 — два произвольных конечных множества отношений на A, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *для любых $x, y \subset A$ если $|x| = |y| < \omega$ и $f : x \to y$ — изоморфизм конечных подсистем в системе $\mathfrak{A}_1 = \langle A, \Sigma_1 \rangle$, то f также является изоморфизмом подсистем в системе $\mathfrak{A}_2 = \langle A, \Sigma_2 \rangle$;*

(2) *любой предикат из Σ_2 выражается через предикаты Σ_1 некоторой бесkванторной формулой.*

Доказательство. То, что из (2) следует (1), очень просто доказывается индукцией по длине бескванторной формулы. Докажем теперь, что если выполнено 1 и $p \in \Sigma_2$, то p выражается некоторой бескванторной формулой через предикаты из Σ_1. Пусть число m — арность предиката p. Обозначим через I_m^n множество отображений индексов: $I_m^n \rightleftharpoons \{f \mid f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}\}$. Определим множество

$$E \rightleftharpoons \Big\{\varepsilon \mid \varepsilon : \Big(\bigcup_{n<\omega} I_m^n\Big) \times \Sigma_1 \to \{-1, 1\}\Big\}.$$

Выделим в множестве E подмножество

$$E_0 \rightleftharpoons \Big\{\varepsilon \in E \mid \exists a_1^\varepsilon, \dots, a_m^\varepsilon \in A,\ A \models \bigwedge_{q \in \Sigma_1} \bigwedge_{f \in I_m^{\sharp q}} q^{\varepsilon(f,q)}\big(a_{f(1)}^\varepsilon, \dots, a_{f(\sharp q)}^\varepsilon\big)\Big\}.$$

Здесь через $\sharp q$ обозначена арность предиката q, через q^{+1} — предикат q, а через q^{-1} — формула $\neg q$. Теперь определим отображение $f_p : E_0 \to \{\text{true}, \text{false}\}$ следующим образом:

$$f_p(\varepsilon) = \text{true} \Leftrightarrow A \models p\big(a_1^\varepsilon, \dots a_m^\varepsilon\big).$$

Определим формулы

$$\phi_\varepsilon(x_1, \dots, x_m) \rightleftharpoons \bigwedge_{q \in \Sigma_1} \bigwedge_{f \in I_m^{\sharp q}} q^{\varepsilon(f,q)}(x_{f(1)}, \dots, x_{f(\sharp q)})$$

и окончательно построим формулу

$$\phi_p(x_1,\dots,x_m) \rightleftharpoons \bigvee_{\varepsilon\in E_0, f_p(\varepsilon)=\mathrm{true}} \phi_\varepsilon(x_1,\dots,x_m).$$

Остается показать, что

$$A \models p(x_1,\dots,x_m) \leftrightarrow \phi_p(x_1,\dots,x_m).$$

Пусть $A \models p(a_1,\dots,a_m)$. По определению множества E_0 существует такое $\varepsilon \in E_0$, что отображение $f : a_i \mapsto a_i^\varepsilon$, $i \le m$, является изоморфизмом подсистем в системе $\mathfrak{A}_1$, поскольку в множестве E_0 закодированы все возможные типы изоморфизмов m-элементных множеств в системе $\mathfrak{A}_1$. В этом случае $A \models \phi_\varepsilon\bigl(a_1^\varepsilon,\dots,a^\varepsilon\bigr)$ по определению формулы ϕ_ε. С другой стороны, в силу определения отображения f_p будет $f_p(\varepsilon)=1$, а значит, $A \models \phi_p(a_1^\varepsilon,\dots,a^\varepsilon)$. Но поскольку f — изоморфизм подсистем системы $\mathfrak{A}_1$, то $A \models \phi_p(a_1,\dots,a_m)$. Обратно, пусть $A \models \phi_p(a_1,\dots a_m)$. Поскольку все члены дизъюнкции, образующей формулу ϕ_p, попарно несовместны, существует единственный ее член, который истин на кортеже $a_1,\dots,a_m$. Пусть $A \models \phi^\varepsilon(a_1,\dots,a_m) \wedge f_p(\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon \in E_0$. По определению отображения f_p тогда $A \models p\bigl(a_1^\varepsilon,\dots,a_m^\varepsilon\bigr)$. В силу того, что формула ϕ^ε полностью описывает тип изоморфизма кортежа $a_1^\varepsilon,\dots,a_m^\varepsilon$ в системе $\mathfrak{A}_1$ и $A \models \phi^\varepsilon(a_1,\dots,a_m)$, отображение $f : a_i^\varepsilon \mapsto a_i$, $i \le m$, является изоморфизмом подсистем в системе $\mathfrak{A}_1$. Тогда по условию отображение f является изоморфизмом подсистем в системе $\mathfrak{A}_2$ и поскольку $A \models p\bigl(a_1^\varepsilon,\dots,a_m^\varepsilon\bigr)$, то $A \models p(a_1,\dots,a_m)$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1. По [1, гл. 9, теорема 6.2] мономорфность алгебраической системы конечной сигнатуры эквивалентна тому, что все предикаты из сигнатуры системы выражаются бескванторными формулами через некоторый линейный порядок на носителе системы.

Таким образом, если у некоторой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры все счетные подсистемы элементарно эквивалентны, то все предикаты системы $\mathfrak{A}$ выражаются через некоторый линейный порядок $<$ на множестве A бескванторными формулами. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Sigma\rangle$ — некоторая алгебраическая система. Тогда для любого подмножества $\acute{A} \subseteq A$ и любого подмножества $\acute{\Sigma} \subseteq \Sigma$ введем обозначения для группы автоморфизмов системы $\acute{\mathfrak{A}} = \langle \acute{A}, \acute{\Sigma} \mid_{\acute{A}}\rangle$ $\mathrm{Aut}_{\acute{\Sigma}}(\acute{A}) \rightleftharpoons \mathrm{Aut}(\acute{\mathfrak{A}})$.

Определение. Пусть m-местный предикат P определен на множестве M. Тогда будем называть P *строго m-местным предикатом*, если для всех $i \ne j$, $1 \le i, j \le m$, и любых $a_1,\dots,a_m \in M$ из $M \models P(a_1,\dots,a_m)$ следует $a_i \ne a_j$.

Пусть строго m-местный предикат P выражается через линейный порядок $<$ некоторой бескванторной формулой $\psi(x_1,\dots,x_m)$. Тогда очевидно, что P можно представить в виде

$$P(x_1,\dots,x_m) \equiv \bigvee_{\sigma\in\mathscr{P}} x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(m)},$$

где $\mathscr{P}$ — некоторое подмножество группы перестановок S_m на множестве $\{1,\dots,m\}$. Обратно, каждому подмножеству $\mathscr{P} \subseteq S_m$ группы всех подстановок на m символах можно сопоставить единственный предикат, построенный по приведенной формуле.

Таким образом, есть биекция между множеством строго m-местных предикатов, выражающихся через линейный порядок $<$, и множеством всех подмножеств группы S_m. Соответствующие друг другу предикат и подмножество в группе будем обозначать одной буквой, но в разных шрифтах. Для любого n-элементного подмножества $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq M$, упорядоченного по возрастанию: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, можно считать, что группа автоморфизмов подсистемы $x = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq M$ — это группа подстановок на n элементах при отождествлении перестановок элементов и соответствующих им перестановок индексов элементов.

Таким образом, далее будем считать, что $\mathrm{Aut}_P(\{a_1, \ldots, a_n\}) \subseteq S_n$. Более того, поскольку в линейном порядке все одинаково упорядоченные кортежи одной длины изоморфны, то $\mathrm{Aut}_P(\{a_1, \ldots, a_n\})$ зависит только от n и поэтому можно ввести обозначение $\mathrm{Aut}_P(n) \rightleftharpoons \mathrm{Aut}_P(\{a_1, \ldots, a_n\})$.

Определение. Пусть $\phi : \{a_1, \ldots, a_n\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$ — некоторый частичный изоморфизм систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры Σ. Тогда ϕ условимся называть *n-изоморфизмом относительно* Σ. Вообще изоморфизмы систем сигнатуры Σ будем называть *изоморфизмами относительно* Σ, а символьно изоморфизмы относительно сигнатуры Σ будем индексировать символом Σ над знаком изоморфизма.

Такие обозначения связаны с тем, что далее постоянно надо будет различать изоморфизмы систем с одним носителем, но с разными предикатами.

Лемма 3. *Если $\mathscr{H} \subseteq S_m$ — группа, то $\mathrm{Aut}_H(m) = \mathscr{H}$.*

Доказательство. Докажем сначала включение $\mathrm{Aut}_H(m) \subseteq \mathscr{H}$. Предположим, что $\sigma \notin \mathscr{H}$. Но тогда σ не может быть автоморфизмом m-элементного множества относительно предиката H. Действительно, в группе $\mathscr{H}$ всегда есть тождественная подстановка, и если $\sigma \notin \mathscr{H}$, то по определению соответствия между строго m-местными предикатами, выражающимися через $<$, и подмножествами группы S_m для любых элементов $a_1, \ldots, a_m$, упорядоченных по возрастанию в порядке $<$: $a_1 < \cdots < a_m$, имеет место

$$\models H(a_1, \ldots, a_m) \& \neg H(a_{\sigma(1)}, \ldots a_{\sigma(m)}).$$

Покажем обратное включение. Пусть $\sigma \in \mathscr{H}$. Предположим что $\sigma \notin \mathrm{Aut}_H(m)$. По определению соответствия между строго m-местными предикатами, выражающимися через $<$, и подмножествами группы S_m это означает, что либо для некоторого элемента $\delta \in \mathscr{H}$ имеем $\delta \cdot \sigma \notin \mathscr{H}$, либо, обратно, для некоторого элемента $\delta \notin \mathscr{H}$ будет $\delta \cdot \sigma \in \mathscr{H}$. В обоих случаях получаем противоречие, так как произведение двух элементов группы оказывается вне группы.

Лемма 4. *Пусть даны два строго m-местных предиката P и Q, выражающихся через некоторый линейный порядок $<$ бескванторными формулами. Тогда предикат P выражается через Q бескванторной формулой тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_Q(m) \leq \mathrm{Aut}_P(m)$.*

Доказательство. Если предикат P выражается через Q бескванторной формулой, то очевидно, что $\mathrm{Aut}_Q(m) \leq \mathrm{Aut}_P(m)$. Обратно, в силу леммы 2 достаточно показать, что если два кортежа $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots b_n)$ изоморфны относительно предиката Q (т. е. отображение $a_i \mapsto b_i$ — частичный изоморфизм алгебраической системы с сигнатурой, состоящей из одного предиката Q), то они изоморфны также и относительно P. Заметим, что поскольку изоморфизм не зависит от порядка перечисления пар соответствующих друг другу элементов, перенумеруем элементы кортежа $\bar{b}$ так, чтобы они были занумерованы по возрастанию в порядке $<$. Ввиду того, что оба предиката выражаются через $<$, существует изоморфизм $\bar{a}$ и $\bar{b}$ относительно порядка $<$. Запишем это: $\bar{a} \overset{<}{\cong} \bar{b}^\sigma \rightleftharpoons (b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)})$. Так как P и Q выражаются через $<$ бескванторными формулами, то $\bar{a} \overset{P}{\cong} \bar{b}^\sigma$, $\bar{a} \overset{Q}{\cong} \bar{b}^\sigma$. Но по условию $\bar{a} \overset{Q}{\cong} \bar{b}$. Таким образом, $\bar{b} \overset{Q}{\cong} \bar{a} \overset{Q}{\cong} \bar{b}^\sigma$, т. е. $\bar{b} \overset{Q}{\cong} \bar{b}^\sigma$. Значит, $\sigma \in \mathrm{Aut}_Q(n)$. По условию если $n = m$, то $\mathrm{Aut}_Q(m) \leq \mathrm{Aut}_P(m)$, а следовательно, $\bar{a} \overset{P}{\cong} \bar{b}$. В общем случае надо показать, что $\sigma \in \mathrm{Aut}_P(n)$. Для этого рассмотрим отображение $\phi : b_i \mapsto b_{\sigma(i)}$ — изоморфизм относительно Q. Заметим что любое сужение этого отображения на m-элементное подмножество будет также изоморфизмом относительно P по уже доказанному. Поскольку арность предиката P равна m, отображение ϕ будет также изоморфизмом относительно P, т. е. $\bar{a} \overset{P}{\cong} \bar{b}$, что и требовалось доказать. $\square$

Определение. Пусть строго m-местный предикат P, определенный на множестве A, выражается через некоторый линейный порядок $<$ бескванторной формулой. Пусть $\phi : \{a_1, \dots a_n\} \to \{b_1, \dots, b_n\}$ — частичный изоморфизм относительно P. Тогда автоморфизм подсистемы $\{a_1, \dots a_n\}$, построенный как композиция изоморфизма ϕ и изоморфизма множеств $\psi : \{b_1, \dots, b_n\} \to \{a_1, \dots, a_n\}$ относительно порядка $<$ (который, очевидно, существует и единствен в силу того, что $<$ — линейный порядок), назовем характеристическим автоморфизмом для изоморфизма ϕ.

Следствие 1. *Пусть строго m-местный предикат P выражается через некоторый линейный порядок $<$ бескванторной формулой. Рассмотрим группу автоморфизмов предиката P как некоторый новый предикат Q в силу введенных ранее отождествлений: $\mathscr{Q} = \mathrm{Aut}_P(m)$. Тогда $\mathrm{Aut}_Q(m) = \mathscr{Q}$, следовательно предикаты P и Q взаимно выражаются друг через друга бескванторными формулами.*

Таким образом, отображение, сопоставляющее классу попарно взаимно определимых бескванторными формулами строго m-местных предикатов, каждый из которых, в свою очередь, выражается через некоторый (один для всех!) линейный порядок, группу автоморфизмов одного из предикатов этого класса, во-первых, корректно, во-вторых, осуществляет биекцию множества таких классов (т. е. фактически множества типов определимости бескванторными формулами) и множества всех подгрупп в группе S_m.

Определение. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, <_A \rangle, \mathfrak{B} = \langle B, <_B \rangle$ — два линейно упорядоченных множества и $\mathscr{G} \leq S_m$ — некоторая группа подстановок на m элементах. Линейные порядки $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *$\mathscr{G}$-сравнимыми* или *сравнимыми по модулю $\mathscr{G}$*, если для любых m элементов $a_1, \dots a_m \in A \cap B$ таких, что $a_1 <_A \dots <_A a_m$, перестановка σ, переупорядочивающая множество $a_1, \dots, a_m$ согласно порядку $<_B$, т. е. такая, что $a_{\sigma(1)} <_B \dots <_B a_{\sigma(m)}$, принадлежит группе $\mathscr{G}$.

Определение. Пусть $\mathscr{G} \leq S_m$ — некоторая группа перестановок и $\mathfrak{A} = \langle A, < \rangle$ — некоторое линейно упорядоченное множество конечной мощности n. Рассмотрим множество всех линейных порядков на множестве A, сравнимых с $\mathfrak{A}$ по модулю $\mathscr{G}$. Оно будет множеством образов порядка $<$ под действием некоторого множества перестановок $\widetilde{\mathscr{G}} \leq S_n$. Это множество называют *n-арной расширенной группой* для $\mathscr{G}$ и обозначают через $\mathscr{G}^n$.

Лемма 5. *Пусть $\mathscr{G} \leq S_m$ — некоторая группа подстановок и $<$ — некоторый линейный порядок на множестве A. Тогда n-арная расширенная группа для группы $\mathscr{G}$ совпадает с группой автоморфизмов n-элементного множества относительно G — строго m-местного предиката, соответствующего группе $\mathscr{G}$ и построенного из порядка $<$. Другими словами, $\mathscr{G}^n = \mathrm{Aut}_G(n)$.*

Доказательство. Запишем цепь эквивалентных условий: $\sigma \in \mathrm{Aut}_G(n) \Leftrightarrow \sigma \in \mathrm{Aut}_G(\{a_1, < \dots <, a_n\}) \Leftrightarrow$ для всех $i_1, < \dots <, i_m \in \{1, \dots, n\}$ отображение $a_{i_k} \mapsto a_{\sigma(i_k)}$ — изоморфизм относительно $G \Leftrightarrow$ для всех $i_1, < \dots <, i_m \in \{1, \dots, n\}$ если перестановка $\acute{\sigma}$ кортежа $(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$, которая упорядочивает этот кортеж так же, как упорядочен кортеж $(a_{\sigma(i_1)}, \dots, a_{\sigma(i_m)})$, — автоморфизм множества $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$ относительно $G \Leftrightarrow$ порядок, порожденный на множестве $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$ перестановкой σ, сравним с порядком $<$ по модулю $\mathscr{G} \Leftrightarrow \sigma \in \mathscr{G}^n$. $\square$

Определение [1]. Определим *индикативные m-арные группы* как группы, принадлежащие следующим сериям (некоторые серии зависят от целочисленных параметров p, q и r).

— S_m — это группа всех подстановок на m элементах.

— I_m — это единичная подгруппа в S_m.

— J_m — это группа порядка два, порожденная перестановкой

$$(1\ m)(2\ m-1)(3\ m-3)\dots,$$

меняющей исходный порядок элементов на противоположный (отражение).

— T_m — это группа трансляций, порожденная перестановкой $(1\ 2\ 3 \dots m)$.

— D_m — это диэдральная группа, порожденная объединением групп J_m и T_m. В дальнейшем нам понадобится знать, как выглядят элементы этой группы. На самом деле

$$D_m = T_m \cup \{\sigma \mid \sigma = (1\ k)(2\ k-1)\dots(k+1\ m)(k+2\ m-1)\dots\},$$

т. е. все элементы из $D_m \setminus T_m$ представимы как сочетание двух отражений, каждое из которых действует на интервале из разбиения множества $\{1, \dots, m\}$ на два интервала.

— $I_m^{p,q}$ — это группа перестановок, которые сохраняют начальный интервал $1, \dots, p$, конечный интервал $m-q+1, \dots, m$ и на интервале $p+1, \dots, m-q$ действуют тождественно. Иначе можно записать так:

$$I_m^{p,q} \cong S_m(1, \dots, p) \times S_m(m-q+1, \dots, m),$$

где введено обозначение

$$S_m(i_1, \dots i_k) = \{\sigma \in S_m(1, \dots, m) \mid \forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}\ \sigma(j) = j\}.$$

— J_m^r — это группа, порожденная объединением групп J_m и $I_m^{r,r}$. Все элементы $J_m^r \setminus I_m^{r,r}$ представимы как произведение двух независимых перестановок: одна произвольным образом переводит начальный интервал $\{1, \dots, r\}$ в конечный $\{m-r+1, \dots, m\}$ и, наоборот, конечный r-интервал — в начальный r-интервал, а в серединном интервале $\{r+1, \dots, m-r\}$ это отражение.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ — некоторая алгебраическая система конечной сигнатуры. Тогда эквивалентны условия:*

(1) *система $\mathfrak{A}$ полностью мономорфна;*

(2) *в системе $\mathfrak{A}$ все счетные подсистемы элементарно эквивалентны;*

(3) (a) *система $\mathfrak{A}$ счетна, и тогда все предикаты из Σ выражаются через некоторый линейный порядок типа ω на множестве A бескванторными формулами;*

(b) *система $\mathfrak{A}$ несчетна, и тогда все предикаты из Σ выражаются бескванторными формулами через равенство.*

Доказательство. Очевидно, что (1) $\Rightarrow$ (2) и (3) $\Rightarrow$ (1). Остается доказать (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть в системе $\mathfrak{A}$ все счетные подсистемы элементарно эквивалентны. Тогда по лемме 1 система $\mathfrak{A}$ мономорфна. Пусть все предикаты из сигнатуры Σ выражаются бескванторными формулами через линейный порядок $<$ на множестве A. Для определенности будем считать, что в порядке $<$ есть бесконечная возрастающая последовательность. Заметим, что достаточно доказать теорему только в случае, когда Σ состоит из одного строго m-местного предиката, поскольку любой m-местный предикат выражается бескванторной формулой через строго k-местные предикаты, где $k \leq m$, и отношение бескванторной выразимости предикатов транзитивно. Пусть $\Sigma = \{P\}$, где P — строго m-местный предикат на множестве A. Опять в силу транзитивности отношения бескванторной выразимости и следствия 1 можно считать, что $\mathscr{P}$ — группа подстановок на m символах (т. е. фактически P совпадает со своей группой автоморфизмов $\mathscr{P} = \mathrm{Aut}_P(m)$).

По теореме 4.6 из [1, гл. 11] и лемме 5 в группе $\mathscr{P}$ существуют максимальная индикативная подгруппа $I(P) \leq \mathscr{P}$ и такое натуральное число k, что $\mathrm{Aut}_P(k) = I(P)^k$ и для всех $\acute{k} \geq k$ имеет место $\mathrm{Aut}_P(\acute{k}) = I(P)^{\acute{k}} = \mathrm{Aut}_{I(P)}(\acute{k})$. Также для всех достаточно больших m (точнее, $m \geq 4$) и для всех $k \geq m$ k-арные расширенные группы для некоторой m-арной индикативной группы из серии $\mathscr{S}$ тоже лежат в той же серии (и с теми же параметрами, если серия зависит от параметров) [1, гл. 11, 4.4], а значит, определены. Таким образом, мы нашли все возможные группы автоморфизмов достаточно больших множеств для предиката P, и поскольку далее используется только группа автоморфизмов для достаточно больших конечных множеств, можно считать, что $\mathscr{P}$ — индикативная группа. По условию в A есть бесконечная возрастающая в порядке $<$ последовательность элементов. Это означает, что в A есть счетное подмножество, которое порядком $<$ упорядочено по типу ω.

Предположим что в линейно упорядоченном множестве $\langle A, < \rangle$ существует подмножество, упорядоченное по типу $\omega^* + \omega$. Для сокращения записей элементы множества $\omega^* + \omega$ будем обозначать целыми числами. По условию подсистемы ω и $\omega^* + \omega$ элементарно эквивалентны относительно предиката P: $\omega \overset{P}{\equiv} \omega^* + \omega$. Покажем, что $\mathscr{P} = S_m$, т. е. предикат P выражается бескванторной формулой через равенство. Для этого докажем, что все оставшиеся варианты невозможны согласно критерию Тайманова — Фраиссе для элементарной эквивалентности. Будем строить непродолжаемые частичные n-изоморфизмы для достаточно большого n (на самом деле достаточно брать $n = m + 1$).

• $\mathscr{P} = I_m$. Начнем построение частичного изоморфизма с элемента 1 подсистемы ω. Пусть $1 \to n$. Но тогда невозможно продолжить этот частичный изоморфизм на элемент $n - 1$ так, чтобы это продолжение, в свою очередь, продолжалось бы до m-изоморфизма относительно P. Значит, подсистемы ω и

$\omega^* + \omega$ не элементарно эквивалентны, что противоречит исходному предположению.

• $\mathscr{P} = J_m$. Опять начнем построение частичного изоморфизма с элемента 1 в системе ω.

1. $1 \to n$.
2. $l \leftarrow n-1$. Заметим, что тогда $l = 2$, поскольку иначе невозможно будет продолжить конструируемый изоморфизм на 2 так, чтобы он продолжался до m-изоморфизма относительно P.
3. $3 \to n-2$ в силу причин, аналогичных предыдущему шагу.
4. $\not\leftarrow n+1$, а значит, этот частичный изоморфизм не может быть продолжен на $n+1$.

• $\mathscr{P} = T_m$. Начнем построение частичного изоморфизма с элемента 1 в системе ω.

1. $1 \to n$.
2. $l \leftarrow n-1$.
3. $l+1 \not\to$.

• $\mathscr{P} = D_m$. Снова начинаем построение частичного изоморфизма с элемента 1 в системе ω.

1. $1 \to n$.
2. $l \leftarrow n-1$.
3. $l+1 \to t$. Заметим, что $t < n-1$ и что этот изоморфизм уже не может быть продолжен до m-изоморфизма, характеризуемого трансляцией. Значит, он может быть продолжен только до изоморфизма, характеризуемого произведением двух отражений разбиения интервала.
4. $x \leftarrow n+1$.
5. $x+1 \not\to$. Этот изоморфизм уже никак не может быть продолжен до изоморфизма, характеризуемого элементом из D_m.

• $\mathscr{P} = I_m^{p;q}$. Начинаем построение частичного m-изоморфизма, как и ранее, с элемента 1 в системе ω. Далее при построении изоморфизма всегда, когда надо выбирать произвольный элемент из системы $\omega^* + \omega$, будем выбирать элемент меньше всех других уже выбранных элементов из этой системы. Тогда в конце получим частичный m-изоморфизм только в том случае, когда $p = m$, т. е. когда $\mathscr{P} = S_m$.

• $\mathscr{P} = J_m^r$. Для этого случая нужно строить частичные $2r+1$ изоморфизмы. Начинаем построение, как и ранее, с 1, далее r шагов действуем в точности аналогично предыдущему случаю, а потом делаем еще r шагов таким же образом, только выбираем каждый раз элемент, который правее всех уже найденных, а не левее. На последнем шаге продолжить изоморфизм будет уже невозможно, поскольку первые $r+1$ шагов будут гарантировать, что изоморфизм не продолжается до изоморфизма, характеризуемого элементом из $I_m^{r;r}$, а последующие r шагов будут гарантировать непродолжение до изоморфизма, характеризуемого элементом из $J_m^r \setminus I_m^{r;r}$.

Во всех этих случаях ω не элементарно эквивалентно $\omega^* + \omega$.

Теперь предположим, что в линейно упорядоченном множестве $\langle A, < \rangle$ существует подмножество, упорядоченное по типу $\omega + \omega^*$. Элементы множества $\omega+\omega^*$ отождествим с целыми числами следующим образом: ω занумеруем стандартным образом натуральными числами, а элементы ω^* — отрицательными целыми числами. По условию подсистемы ω и $\omega + \omega^*$ элементарно эквивалентны относительно предиката P: $\omega+\omega^* \overset{P}{\equiv} \omega$. Покажем, что из этого опять следует равенство $\mathscr{P} = S_m$. Аналогично предыдущему рассуждению, строим частичные непродолжаемые n-изоморфизмы для достаточно большого n (например, $n = m$).

• $\mathscr{P} = I_m$. Начнем построение частичного изоморфизма с элемента -1 подсистемы $\omega + \omega^*$ — это наибольший элемент в данной подсистеме. Пусть $-1 \to n$. Но тогда невозможно продолжить этот частичный изоморфизм на элемент $n+1$ так, чтобы это продолжение, в свою очередь, продолжалось бы до m-изоморфизма относительно P.

• $\mathscr{P} = J_m$. Опять начнем построение частичного изоморфизма с элемента -1 в системе $\omega + \omega^*$.

1. $-1 \to n$.
2. $l \leftarrow n+1$. Заметим, что тогда $l = -2$, поскольку иначе невозможно будет продолжить конструируемый изоморфизм на -2 так, чтобы он продолжался до m-изоморфизма относительно P.
3. $-3 \to n+2$ в силу причин, аналогичных предыдущему шагу.
4. $\not\leftarrow n-1$.

Из этого следует, что у элемента n не может быть предшественника, т. е. $n = 1$.

1. $-1 \to 1$.
2. $2 \leftarrow -2$, так как никуда больше элемент -2 отобразиться не может.
3. $1 \to l$.
4. $\not\leftarrow l+1$.

• $\mathscr{P} = T_m$. Опять начнем построение частичного изоморфизма с элемента -1 в системе $\omega + \omega^*$. $-1 \to n$

1. $n = 1$.
   (a) $l \leftarrow 2$. Заметим сразу что в этом случае $l = 1$, так как иначе построенный изоморфизм нельзя будет продолжить на 1.
   (b) $-2 \to t$.
   (c) $\not\leftarrow t+1$.
2. $n = 2$.
   (a) $-2 \leftarrow 1$. Если 1 переводится в какой-либо другой элемент, то это на следующем шаге приводит к противоречию.
   (b) $-3 \to x$.
   (c) $\not\leftarrow x+1$.
3. $n > 2$.
   (a) $-2 \leftarrow n-1$.
   (b) $1 \to y$.
      i. $y < n-1$. В этом случае $y = 1$ (иначе на следующем шаге изоморфизм уже не продолжается на предшествующий y элемент). Но тогда элемент $n+1$ не может быть никуда отображен. Следовательно, этот случай невозможен.
      ii. $y > n+1$. Тогда невозможно продолжить изоморфизм на элемент $y-1$, т. е. этот случай также невозможен.
      iii. $y = n+1$. Остается только этот случай.
   (c) $z \leftarrow 1$.
      i. $z > 2$. В этом случае у z есть предшественник $z-1$, еще не связанный изоморфизмом. Пусть $z-1 \to u$. Но тогда на $u+1$ изоморфизм уже невозможно продолжить. Поэтому этот случай невозможен.

ii. $z = 2$. Пусть $3 \to w$, значение w может быть любым. Зато на элемент $n + 2$ изоморфизм не продолжается.

• $\mathscr{P} = D_m$. Опять начнем построение частичного изоморфизма с элемента -1 в системе $\omega + \omega^*$.

1. $-1 \to n$.
2. $l \leftarrow n + 1$. Есть два варианта.
   (a) $l > 0$. Тогда всегда есть элемент $l{+}1$ в системе $\omega{+}\omega^*$. Если продолжить изоморфизм с элемента $l{+}1$ на элемент, меньший n, то такое отображение никак не может быть продолжено до изоморфизма. Если же сопоставить элементу $l+1$ элемент, строго больший $n+2$, то элементу $n{+}2$ на очередном шаге построения изоморфизма уже будет невозможно сопоставить никакой элемент. Значит, элемент $l + 1$ может отобразиться только на элемент $n + 2$. Но тогда в дальнейшем этот изоморфизм можно будет продолжить только до изоморфизма, характеризуемого трансляцией, а выше уже показано, что это невозможно.
   (b) $l < 0$. В этом случае заведомо $l \neq 1$. При продолжении на 1 частичного изоморфизма элемент 1 не может быть сопоставлен элементу, меньшему чем n. Пусть $1 \to x$, где $x > n + 1$. Но тогда на $x + 1$ не может быть продолжен никакой m-изоморфизм относительно P.

• $\mathscr{P} = I_m^{p,q}$. Как и во всех предыдущих случаях, начинаем построение частичного m-изоморфизма с элемента -1 в системе $\omega{+}\omega^*$. Далее при построении изоморфизма всегда, когда надо выбирать произвольный элемент из системы ω, будем выбирать элемент больше всех других уже выбранных элементов из этой системы. Тогда в конце мы получим частичный m-изоморфизм только в том случае, когда $q = m$, т. е. когда $P = S_m$.

• $\mathscr{P} = J_m^r$. Традиционно начинаем построение с элемента -1.

1. $-1 \to n$.
2. $x \leftarrow n + 1$. В принципе не важно, куда перейдет этот элемент.
3. $1 \to k$. Далее есть два варианта.
   (a) $k < n$. В этом случае изоморфизм может продолжаться только до m-изоморфизма с характеристическим автоморфизмом из $I_m^{r,r}$. Но тогда, выбирая, как и в случае $\mathscr{P} = I_m^{p,q}$, каждый раз элемент, больший чем все остальные построенные, через r шагов получим непродолжаемый автоморфизм.
   (b) $k > n$. Повторяя конструкцию предыдущего случая, опять через r шагов получим непродолжаемый изоморфизм.

Выходит, что в любом из рассмотренных случаев ω не элементарно эквивалентно $\omega^* + \omega$, т. е. если P не выражается бескванторно через равенство, то в исходной системе нет бесконечно убывающей цепочки элементов, а значит, порядок $<$ имеет тип некоторого ординала. Покажем, что в таком случае этот ординал строго меньше чем $\omega + \omega$. Разберем два возможных случая.

Случай 1. $T_m \not\leq \mathscr{P} < S_m$. Покажем, что в этом случае порядок $<$ имеет тип ω. Пусть в линейно упорядоченном множестве $\langle A, < \rangle$ существует подмножество, упорядоченное по типу $\omega{+}1$. Элементы множества $\omega{+}1$ отождествим с соответствующими ординалами, меньшими ординала $\omega + 2$. Пусть подсистемы ω и $\omega + 1$ элементарно эквивалентны относительно предиката P: $\omega \overset{P}{\equiv} \omega + 1$.

Покажем, что из этого следует равенство $\mathscr{P} = S_m$. Предположим, что $\mathscr{P}$ — какая-то другая группа.

• $\mathscr{P} = I_m$. Начнем построение частичного изоморфизма с элемента $\omega + 1$ подсистемы $\omega + 1$.

1. $\omega + 1 \to n$.
2. $\not\leftarrow n + 1$. Это отображение уже никак не может быть продолжено до частичного m-изоморфизма — любое продолжение частичного отображения на элемент $n + 1$, так как меняет порядок у некоторой пары элементов.

• $\mathscr{P} = J_m$. Начнем построение частичного изоморфизма с элемента $\omega + 1$ в системе $\omega + 1$.

1. $\omega + 1 \to n$.
2. $k \leftarrow n + 1$.
3. $k + 1 \not\to$.

• $\mathscr{P} = I_m^{p;q}$. Начнем построение, как и во всех предыдущих случаях, с элемента $\omega + 1$: $\omega + 1 \to n$. Далее строим изоморфизм таким образом: каждый раз при выборе произвольного элемента из системы ω выбираем элемент больше всех уже построенных. Тогда после m шагов получится изоморфизм, только если $q = m$, т. е. если $\mathscr{P} = S_m$, чего не может быть по условию. Получили противоречие.

• $\mathscr{P} = J_m^r$. Начнем построение частичного изоморфизма опять с элемента $\omega + 1$.

1. $\omega + 1 \to n$.
2. $r \leftarrow n + 1$.
3. $1 \to s$. Далее есть два варианта.
   (a) $s < n$. В этом случае изоморфизм может быть продолжен только до изоморфизма с характеристическим автоморфизмом из группы $I_m^{r;r}$. Действуя аналогично случаю $\mathscr{P} = I_m^{p;q}$, получим, что через r шагов построения будет изоморфизм, который уже не может быть продолжен.
   (b) $s > n + 1$. В этом случае, как и в предыдущем, при построении m-изоморфизма каждый раз при выборе произвольного элемента из системы ω мы берем элемент больше всех уже построенных. Через r шагов приходим к противоречию.

Таким образом, при $T_m \not\leq \mathscr{P} < S_m$ утверждение теоремы доказано. При этом система обязана быть счетной.

Случай 2. $T_m \leq \mathscr{P} < S_m$. Покажем, что в этом случае порядковый тип $<$ меньше чем $\omega + \omega$. Доказательство проводим, как и ранее, от противного. Пусть в линейно упорядоченном множестве $\langle A, < \rangle$ существует подмножество, упорядоченное по типу $\omega + \omega$. Элементы множества $\omega + \omega$ отождествим с соответствующими ординалами, меньшими ординала $\omega + \omega$. Пусть подсистемы ω и $\omega + \omega$ элементарно эквивалентны относительно предиката P: $\omega \overset{P}{\equiv} \omega + \omega$. Покажем, что из этого следует равенство $\mathscr{P} = S_m$. Предположим, что $\mathscr{P}$ — какая-то другая группа.

• $\mathscr{P} = T_m$. Начнем построение частичного изоморфизма с элемента 1 в системе $\omega + \omega$. $1 \to n$.

1. $n = 1$. В этом случае изоморфизм может быть продолжен только до отображения, полностью сохраняющего порядок, поскольку ни до

какого изоморфизма, чей характеристический автоморфизм является трансляцией, этот изоморфизм не может быть продолжен. Тогда построить непродолжающийся изоморфизм, продолжающий данный, можно аналогично случаю $\mathscr{P} = I_m$.

2. $n > 1$. В этом случае продолжим изоморфизм на элемент $n - 1$ из ω.
   (a) $\alpha \leftarrow n - 1$.
   (b) $\alpha + 1 \not\rightarrow$. Это отображение не может быть продолжено ни до какого частичного m-изоморфизма относительно P.

• $\mathscr{P} = D_m$. Опять начнем построение частичного изоморфизма с элемента 1 в системе $\omega + \omega$.

1. $1 \rightarrow n$.
2. $\alpha \leftarrow n + 1$.
   (a) $\alpha = 2$. В этом случае изоморфизм может продолжаться только до изоморфизма, чей характеристический автоморфизм является трансляцией в силу строения группы D_m. Но тогда можно привести этот изоморфизм к непродолжаемому виду аналогично случаю $\mathscr{P} = T_m$.
   (b) $\alpha > 2$. Покажем, что и в этом случае изоморфизм не продолжается. Предположив, что изоморфизм продолжается до изоморфизма, характеризующегося трансляцией, мы не сможем продолжить этот изоморфизм на 2 из множества $\omega + \omega$. Предположив, что изоморфизм может быть продолжен до изоморфизма с характеристическим автоморфизмом вида $\sigma = (1\ k)(2\ k-1)\dots(k+1\ m)(k+2\ m-1)\dots$, мы не сможем продолжить наш изоморфизм на элемент $\alpha + 1$, благо он всегда существует. Других вариантов нет в силу строения группы D_m.

Если $T_m \leq \mathscr{P} < S_m$, то для всех n системы $\omega + n$ и ω изоморфны. Изоморфизм строится так:

$$1 \mapsto n+1;\ 2 \mapsto n+2; \dots ; i \mapsto n+i;\ \cdots \omega+1 \mapsto 1;\ \omega+2 \mapsto 2; \dots ; \omega+n \mapsto n.$$

Поэтому, перенося порядок по изоморфизму, можно считать, что P выражается через порядок по типу ω бескванторной формулой и опять исходная система должна быть счетной. А если система несчетна, то $\mathscr{P} = S_m$, поскольку иначе порядок $<$ должен иметь счетный тип. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fraisse R.* Theory of relations. Amsterdam a. o.: North-Holland, 1986.

Статья поступила 22 сентября 2000 г.

Власов Дмитрий Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vlasov@noolab.ru