Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.53

ОЦЕНКА РЯДА ДИРИХЛЕ С ЛАКУНАМИ ФЕЙЕРА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

А. М. Гайсин, И. Д. Латыпов

Аннотация: Изучается рост суммы целого ряда Дирихле с лакунами Фейера на вещественной оси. В самой общей ситуации установлены неулучшаемые оценки.

Ключевые слова: ряды Дирихле, лакуны Фейера.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, $D(\Lambda)$ — множество всех целых функций F, представимых абсолютно сходящимися во всей комплексной плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it). \tag{1}$$

Будем говорить, что ряд Дирихле (1) *имеет лакуны Фейера*, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \tag{2}$$

Для того чтобы любая функция $F \in D(\Lambda)$ была неограниченной на луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (2) [1].

Изучению связи между ростом $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} \{|F(\sigma + it)|\}$ и поведением F на $\mathbb{R}_+$ посвящены многочисленные работы. Так, в работе [2] доказана

Теорема A. *Пусть выполняется условие* (2),

$$\delta = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| < \infty, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{3}$$

Если $F \in D(\Lambda)$ и

$$|F(\sigma)| \le L(\sigma) \quad (\sigma \in \mathbb{R}_+),$$

где L — положительная неубывающая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ имеется постоянная A, не зависящая от F и L, такая, что во всей плоскости

$$|F(s)| < AL(\sigma + \delta + \varepsilon). \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что если F на луче $\mathbb{R}_+$ имеет конечный R-порядок, то она и во всей плоскости имеет конечный R-порядок. Для класса целых функций $F \in D(\Lambda)$, имеющих конечный R-порядок, это утверждение имеет место при более слабых условиях [3]. Окончательный для этого класса функций результат установлен в [4].

Как и в теореме A, здесь будут рассматриваться ряды Дирихле с лакунами Фейера, имеющие произвольный рост.

© 2004 Гайсин А. М., Латыпов И. Д.

Пусть $F \in D(\Lambda)$,

$$d(F;\mathbb{R}_+) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln\mu(\sigma)}, \quad \mu(\sigma) = \max_{n\ge1}\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}.$$

Через $B(\Lambda)$ будем обозначать класс целых функций F из $D(\Lambda)$, последовательность Λ показателей которых имеет конечный индекс конденсации δ (величина δ определена формулой (3)). Имеет место

Теорема B [5]. *Пусть выполняется условие* (2). *Для того чтобы для любой функции $F \in B(\Lambda)$ было справедливо равенство $d(F;\mathbb{R}_+) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_1^\infty \frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt < \infty, \tag{5}$$

где $\alpha(t) = \max_{\lambda_n\le t} q(\lambda_n)$, $q(\lambda_n) = -\ln|Q'(\lambda_n)|$.

Замечание. При условиях (2) и (5) справедливо также равенство $D(F;\mathbb{R}_+) = 1$, где

$$D(F;\mathbb{R}_+) = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln|M(\sigma)|}.$$

Это усматривается из доказательства теоремы B.

Следует отметить, что теорема B является окончательной и дает ответ на одну проблему, возникшую в связи с исследованиями Пойа [6]. Достаточная часть теоремы B установлена в [7].

Цель настоящей работы — изучить поведение суммы ряда Дирихле (1) при выполнении единственного условия (2) или более сильного требования — условия типа Левинсона. При этом интеграл (5), вообще говоря, может и расходиться.

В работе [5] установлено, что для любой последовательности Λ, удовлетворяющей условию (2) и такой, что интеграл (5) расходится, существует функция $F \in B(\Lambda)$ такая, что $d(F;\mathbb{R}_+) = 0$. До сих пор в этой ситуации не известна асимптотика суммы ряда (1) на луче $\mathbb{R}_+$. Однако если положить $L(\sigma) = \max_{0\le t\le\sigma}|F(t)|$, то оказывается, что при условии (2) рост функции L можно достаточно точно оценить снизу через некоторую правильную функцию, зависящую только от коэффициентов и показателей ряда (1).

§ 1. Оценка ряда Дирихле в общем случае

Пусть выполняется условие (2). Тогда вместо функции $Q(\lambda)$ можно рассматривать произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} \quad (z = x + iy).$$

Функция $B(z)$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z \ge 0$, причем $|B(z)| \le 1$ для $\operatorname{Re} z \ge 0$. Положим

$$g_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{B_n(z)}{(1+z)^2}e^{-tz}\,dz, \quad B_n(z) = \prod_{k\ne n}\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + z}.$$

Имеем
$$g_n(t)e^{tx} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_n(z)}{(1+z)^2}e^{-ity}\,dy \quad (x \ge 0). \tag{6}$$
Поскольку при $\operatorname{Re} z \ge 0$ имеет место оценка $|B_n(z)| \le 1$, из (6) получаем, что
$$|g_n(t)| \le Me^{-tx} \quad (x \ge 0),$$
где M — постоянная, не зависящая от переменных t и x. Устремляя x к $+\infty$, видим, что $g_n(t) = 0$ при $t > 0$. При $t < 0$, полагая $x = 0$ (при этом достигается минимум правой части), получаем, что
$$|g_n(t)| \le M \quad (n \ge 1). \tag{7}$$

Пусть $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (1), $\mu^*(\sigma)$ — максимальный член измененного ряда
$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n)e^{\lambda_n s}. \tag{8}$$
Ясно, что если $F \in B(\Lambda)$, то $F^* \in B(\Lambda)$.

Пусть $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $0 < |b_n|$ $(n \ge 1)$, $\ln|b_n| = O(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Рассмотрим ряд
$$F_b^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) b_n e^{\lambda_n s}. \tag{9}$$
Видно, что $F_b^* \in B(\Lambda)$. Обозначим через $\mu^*(\sigma; b)$ максимальный член ряда (9). Полагая $\mathbb{I} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$, видим, что $\mu^*(\sigma; \mathbb{I})$ совпадает с максимальным членом ряда (8). Пусть
$$d_b(F; \mathbb{R}_+) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln\mu^*(\sigma; b)}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (2),
$$\frac{1}{\varphi^2} = \left\{\frac{1}{\varphi^2(\lambda_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \varphi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}\right).$$
Тогда для любой функции $F \in D(\Lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ имеет место оценка
$$\ln\mu^*\left(\sigma; \frac{1}{\varphi^2}\right) \le (1 + o(1))\ln L(\sigma), \tag{11}$$
где $L(\sigma) = \max\limits_{0\le t\le\sigma} |F(t)|$.

Доказательство. Обозначая $G_n(\lambda) = \frac{B_n(\lambda)}{(1+\lambda)^2}$, имеем
$$\int\limits_{-\infty}^{0} F(t+\sigma)g_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} a_k g_n(t)e^{t\lambda_k + \sigma\lambda_k}\,dt$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_n(\lambda_k)e^{\sigma\lambda_k} = a_n G_n(\lambda_n)e^{\lambda_n\sigma} \quad (n \ge 1).$$

Таким образом,

$$a_n G_n(\lambda_n) e^{\lambda_n \sigma} = \int_{-\infty}^{0} F(t+\sigma) g_n(t)\, dt \quad (n \geq 1).$$

Следовательно, учитывая (7), приходим к неравенству

$$|a_n G_n(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq M \int_{-\infty}^{\sigma} |F(t)|\, dt. \tag{12}$$

Далее,

$$\int_{-\infty}^{\sigma} |F(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{0} |F(t)|\, dt + \int_{0}^{\sigma} |F(t)|\, dt \leq C_F + \sigma L(\sigma), \quad C_F = \int_{-\infty}^{0} |F(t)|\, dt.$$

Учитывая это, из (12) получаем, что

$$|a_n G_n(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma} \leq M[C_F + \sigma L(\sigma)] \quad (n \geq 1). \tag{13}$$

Поскольку

$$G_n(\lambda_n) = \frac{B_n(\lambda_n)}{(1+\lambda_n)^2} = -\frac{2\lambda_n B'(\lambda_n)}{(1+\lambda_n)^2} \quad (n \geq 1),$$

а при $\lambda_n \geq 1$

$$\frac{2\lambda_n}{(1+\lambda_n)^2} \geq \frac{1}{2\lambda_n},$$

то для $\lambda_n \geq 1$ имеем

$$|G_n(\lambda_n)| \geq \frac{|B'(\lambda_n)|}{2\lambda_n} = \frac{1}{2\lambda_n} \frac{\prod\limits_{k \neq n} \left|1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right|}{\prod\limits_{k \neq n} \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^2} \geq \frac{|Q'(\lambda_n)|}{\varphi^2(\lambda_n)}.$$

Следовательно, из (13) вытекает, что

$$\mu^*\left(\sigma; \frac{1}{\varphi^2}\right) \leq 2M\sigma L(\sigma) \quad (\sigma \geq \sigma_0). \tag{14}$$

Отметим, что функция $\ln \mu^*\big(\sigma; \frac{1}{\varphi^2}\big)$ выпуклая [8]. Она зависит только от коэффициентов и показателей ряда (1). Поскольку $\ln \sigma = o\big(\ln \mu^*\big(\sigma; \frac{1}{\varphi^2}\big)\big)$ при $\sigma \to \infty$, из (14) получаем требуемую оценку (11).

Теорема доказана.

Следствие. *При условии* (2) *справедливы оценки*

$$1 \leq \varliminf_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln L(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma; \varphi^{-2})} \leq d_{\varphi^{-2}}(F; \mathbb{R}_+) \quad \left(\varphi^{-2} = \frac{1}{\varphi^2}\right). \tag{15}$$

§ 2. Уточнение оценки ряда Дирихле на луче

Здесь рассматривается следующая задача: какой должна быть последовательность $b = \{b_n\}$, чтобы для любой функции F, представленной рядом Дирихле (1) с лакунами Фейера, была бы верна оценка

$$d_b(F;\mathbb{R}_+) \geq 1? \tag{16}$$

При выполнении единственного условия (2) согласно теореме 1 оценка (16) имеет место при $b = \frac{1}{\varphi^2}$, где

$$\frac{1}{\varphi^2} = \left\{\frac{1}{\varphi^2(\lambda_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Пусть $c = \{c_n\}$ — последовательность, обладающая свойством $|b_n| \leq |c_n|$ $(n \geq 1)$. В этом случае будем говорить, что b не превосходит c, и писать $b \prec c$. Ясно, что тогда $d_b(F;\mathbb{R}_+) \geq d_c(F;\mathbb{R}_+)$. Заметим, что чем «больше» последовательность $b = \{b_n\}$, тем точнее оценка (16). Будет показано, что если вместо (2) выполняется более сильное требование (условие Левинсона), то оценка (16) имеет место для любой последовательности $b = \{b_n\}$, $|b_n| = 1$ $(n \geq 1)$. Таким образом, в зависимости от того, какому требованию (условию (2) или условию Левинсона) удовлетворяет последовательность Λ, последовательность $b = \{b_n\}$ следует выбирать в пределах $\frac{1}{\varphi^2} \prec b \prec \mathbb{I}$.

1^0**. Условие Левинсона.** Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая нулевую плотность,

$$H(\delta) = \int_0^\infty M(r;Q)e^{-\delta r}\,dr, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{17}$$

Здесь $M(r;Q) = \max\limits_{|z|=r}|Q(z)|$. Ясно, что $M(r;Q) = Q(ir)$. Очевидно, $H(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$, $H(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow \infty$. Пусть $d > 0$ такое, что $H(d) = e$. Если

$$\int_0^d \ln\ln H(\delta)\,d\delta < \infty, \tag{18}$$

будем говорить, что последовательность Λ (функция Q) *удовлетворяет условию типа Левинсона.*

Отметим, что условие типа Левинсона часто возникает при изучении нормальных семейств аналитических функций (см., например, в [9–16]). Так, имеет место следующая теорема Левинсона (версия Домара) [10, 14].

Теорема. *Пусть $D = \{z = x + iy : a < x < a',\ -b < y < b\}$, а $L(y)$ — измеримая по Лебегу функция, $L(y) \geq e$ $(-b < y < b)$, и*

$$\int_{-b}^{b} \ln\ln L(y)\,dy < \infty. \tag{19}$$

Тогда имеется убывающая функция $m(\delta)$, зависящая только от $L(y)$ и конечная для $\delta > 0$, такая, что если $f(z)$ аналитична в D и

$$|f(z)| \leq L(\operatorname{Im} z), \tag{20}$$

то

$$|f(z)| \leq m(\operatorname{dist}(z,\partial D)), \quad z \in D.$$

Следствие. *Пусть $J = \{f\}$ — семейство аналитических в D функций, удовлетворяющих условию* (20). *При условии* (19) *семейство функций J является нормальным.*

2^0**. Преобразование Лежандра.** Пусть $M(x)$ — непрерывная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, $M(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Тогда функция

$$m(y) = \sup_{x>0}(M(x) - xy),$$

определенная при $y > 0$, называется *преобразованием Лежандра* функции M. Если $M(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то $m(y) \to \infty$ при $y \to 0$. Функция $m(y)$ как верхняя огибающая убывающих по $y > 0$ функций также убывающая функция. Положим

$$M^*(x) = \inf_{y>0}(m(y) + yx).$$

Ясно, что M^* — наименьшая вогнутая возрастающая мажоранта функции M: $M(x) \le M^*(x)$. Отметим, что если функция M вогнута, то $\frac{M(x)}{x} \downarrow$ при $x \ge a$. С другой стороны, если $0 < M(x) \uparrow$, $\frac{M(x)}{x} \downarrow$ при $x > 0$, то $M^*(x) < 2M(x)$, где M^* — наименьшая вогнутая мажоранта M [14, VII D, 2, с. 326].

Теорема C [14, VII D, 2, с. 333]. *Пусть $M(x)$ — возрастающая вогнутая на $[0, \infty)$ функция,*

$$m(y) = \sup_{x>0}(M(x) - xy) \quad (y > 0),$$

$a > 0$ такое, что $m(a) = 1$. Тогда интегралы

$$\int_0^a \ln m(y)\, dy, \quad \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2}\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

3^0**. Эквивалентное условие.** Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая нулевую плотность, а H и Q — функции, определенные формулами (17).

Пусть $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $Q(z)$. Она аналитична вне начала координат. Поскольку при $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) \ge \delta > 0$

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty e^{i\varphi_0}} Q(\lambda) e^{-\lambda t}\, d\lambda,$$

то для любого t, $|t| = \delta$,

$$|\gamma(t)| \le \int_0^\infty M(r; Q) e^{-\delta r}\, dr = H(\delta).$$

Но

$$Q(z) = \int_C \gamma(t) e^{tz}\, dt, \quad C = \{t:\ |t| = \delta\}.$$

Отсюда следует, что

$$|Q(z)| \le \delta H(\delta) e^{\delta|z|} \le \begin{cases} H(\delta) e^{\delta|z|}, & \text{если } 0 < \delta \le 1; \\ H(\delta) e^{\delta(|z|+1)}, & \text{если } 1 \le \delta < \infty. \end{cases}$$

Следовательно,

$$M(r;Q) \le H(\delta)e^{\delta(r+1)} \quad (0<\delta<\infty). \tag{21}$$

Положим $h(\delta)=\ln H(\delta)$. Функция $h(\delta)$ непрерывна, $h(\delta)\uparrow\infty$ при $\delta\downarrow 0$, $h(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\uparrow\infty$. Пусть

$$M(x)=\inf_{\delta>0}(h(\delta)+\delta x), \quad x>0.$$

Как нижняя огибающая линейных функций $M(x)$ вогнута, $M(x)\uparrow\infty$ при $x\uparrow\infty$. Пусть m — преобразование Лежандра функции M, т. е.

$$m(\delta)=\sup_{x>0}(M(x)-x\delta), \quad \delta>0.$$

Функция m — наибольшая выпуклая миноранта h, т. е. $m(\delta)\le h(\delta)$.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln M(x;Q)$. Тогда условие* (18) *эквивалентно условию*

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx<\infty. \tag{22}$$

Доказательство. Имеем

$$H(\delta)=\int_0^\infty M(x;Q)e^{-\delta x}\,dx \le \int_0^\infty e^{\varphi(x)-\delta x}\,dx \quad (0<\delta<\infty).$$

С учетом (22) приходим к (18) [16].

Пусть выполняется условие (18). Поскольку $m(\delta)\le h(\delta)=\ln H(\delta)$, то

$$\int_0^a \ln m(\delta)\,d\delta<\infty \quad (m(a)=1).$$

Из теоремы C вытекает, что

$$\int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2}\,dx<\infty. \tag{23}$$

Но из (21) имеем $\ln M(x;Q)\le M(x+1)$. Так как $M(x+1)$ — вогнутая мажоранта для $\ln M(x;Q)$, то $\ln M(x;Q)\le\varphi(x)\le M(x+1)$. Следовательно, из (23) получаем условие (22).

Следствие. *Если выполняется условие типа Левинсона* (18), *то*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n}<\infty. \tag{24}$$

Действительно, если $n(x)$ — число точек $\lambda_n\le x$, то из неравенства Иенсена имеем

$$n(x)\le \ln M(ex;Q)\le\varphi(ex). \tag{25}$$

Так как

$$\sum_{\lambda_n\le r}\frac{1}{\lambda_n}=\int_0^r\frac{dn(x)}{x}=\frac{n(r)}{r}+\int_{\lambda_1}^r\frac{n(x)}{x^2}\,dx,$$

то, применяя лемму 1, приходим к условию (24).

Замечание. Условие типа Левинсона (18) сильнее условия (24).

Действительно, как мы убедились, условие (24) есть следствие (18). Обратное утверждение неверно. Приведем пример.

Пусть $\Delta_n = [a_n, b_n]$, $\Delta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, где $a_n = 2^{n^2}$, $b_n = a_n + [2^{n^2} n^{-2}]$ ($[a]$ — целая часть a). Через $\Lambda = \{\lambda_n\}$ обозначим последовательность целых чисел из Δ, пронумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda_k \in \Delta_n} \frac{1}{\lambda_k} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Легко показать, что для любой неубывающей вогнутой функции φ, удовлетворяющей условию (22),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)\ln x}{x} = 0. \tag{26}$$

Если бы для данной последовательности Λ выполнялось условие (18), то в силу леммы 1 и оценок (25) функция $n(x)$ также удовлетворяла бы условию (26). Но это не так. Действительно,

$$n(b_n) \ge b_n - a_n = \left[\frac{2^{n^2}}{n^2}\right] \ge \frac{1}{2}\frac{b_n}{\ln b_n} \quad (n \ge n_0).$$

Следовательно, условие (18) не выполняется.

Теорема 2. *Если выполняется условие* (18), *то для любой функции* $F \in B(\Lambda)$ *справедлива оценка*

$$d^*(F; \mathbb{R}_+) \ge 1, \tag{27}$$

где $d^*(F;\mathbb{R}_+) = d_{\mathbb{I}}(F;\mathbb{R}_+)$, *т. е.*

$$d^*(F;\mathbb{R}_+) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln\mu^*(\sigma)}, \tag{28}$$

$$\mu^*(\sigma) = \max_{n\ge1}\{|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma}\}, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Доказательство. Воспользуемся формулами А. Ф. Леонтьева для коэффициентов ряда [8]

$$a_n = \frac{e^{-\alpha\lambda_n}}{Q'(\lambda_n)}\frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_n(t)F(t+\alpha)\,dt \quad (n\ge1), \tag{29}$$

где $\psi_n(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией экспоненциального типа

$$Q_n(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \quad (n\ge1),$$

α — произвольный комплексный параметр, C — контур, охватывающий сопряженную диаграмму $\overline{D}_n$ функции $Q_n(\lambda)$. В данном случае $\overline{D}_n = \{0\}$, поэтому в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = \delta,\ 0 < \delta \le 1\}$.

Пусть $\alpha = \sigma > 0$. Тогда из (29) имеем

$$|a_n|\,|Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \le \max_{|t|=\delta}|\psi_n(t)| \max_{|\xi-\sigma|\le\delta}|F(\xi)| \quad (0<\delta\le1). \tag{30}$$

Далее,

$$\max_{|t|=\delta}|\psi_n(t)| \le \int\limits_0^\infty \max_{|\lambda|=r}\left|\frac{Q(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right| e^{-\delta r}\,dr.$$

Но для любого $n \ge 1$

$$\left|\frac{Q(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right| = \frac{1}{\lambda_n}\left|1+\frac{\lambda}{\lambda_n}\right| \prod_{k\ne n}\left|1-\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right|. \tag{31}$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda_n} \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda_n^2}\right) \le \frac{1}{2}M(1;Q), \tag{32}$$

$$1+\frac{r}{\lambda_n} \le 2\left(1+\frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (r=|\lambda|), \tag{33}$$

из (31)–(33) получаем, что

$$\max_{|\lambda|=r}\left|\frac{Q(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right| \le M(1;Q)M(r;Q) \quad (r \ge 0).$$

Следовательно,

$$\max_{|t|=\delta}|\psi_n(t)| \le M(1;Q)\int\limits_0^\infty M(r;Q)e^{-\delta r}\,dr \quad (n \ge 1). \tag{34}$$

С учетом оценки (30), (34) окончательно имеем

$$\mu^*(\sigma) \le M(1;Q)\int\limits_0^\infty Q(ir)e^{-\delta r}\,dr \max_{|\xi-\sigma|\le\delta}|F(\xi)|,$$

где $\sigma > 0$, δ $(0 < \delta \le 1)$ — любое число. Значит,

$$\mu^*(\sigma) \le M(1;Q)H(\delta)\max_{|\xi-\sigma|\le\delta}|F(\xi)|. \tag{35}$$

Пусть $0 < \varepsilon_0 < \pi/4$,

$$\Psi(\sigma) = \max_{t\in\Delta(\sigma)}|F(t)|, \quad \Delta = \{z : |\arg[-(z-\sigma)]| \le \pi/4-\varepsilon_0\}.$$

Функция Ψ определена на всей оси, не убывает, непрерывна, $L(\sigma) \le \Phi(\sigma)$, $\Phi(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to \infty$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$, а $\delta = \delta(\sigma)$ — решение уравнения

$$H(\delta) = \Psi^\varepsilon(\sigma). \tag{36}$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ это решение существует и единственно, если $\sigma \ge a = a(\varepsilon) \ge 0$. Можно считать, что $\Psi^\varepsilon(a) \ge e$. Через $K = K(t)$ обозначим функцию, обратную к функции $t = \ln\ln H(\delta)$. Если $u(\sigma) = \ln\varepsilon + \ln\ln\Psi(\sigma)$, то $K(u(\sigma)) = \delta$. Ясно, что функция $K = K(t)$ непрерывна, $K(t) \downarrow 0$ при $t \uparrow \infty$. Функция $u = u(\sigma)$ непрерывна, не убывает, $u(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to \infty$. Более того, из условия (18) следует, что [16]

$$\int\limits_{u(a)}^\infty K(u)\,du < \infty.$$

Применяя утверждение типа Бореля — Неванлинны (см. лемму 3 из [18]), получаем, что для любых $L > 0$, $\nu > 0$, для всех $\sigma \geq a$, но вне некоторого множества $F \subset [a, \infty)$ конечной меры mF [18],

$$mF \leq L\nu^{-1} \int\limits_{u(a)}^{\infty} K(u)\,du + LK(u(a)),$$

выполняется оценка

$$u(\sigma + LK(u(\sigma))) < u(\sigma) + \nu,$$

т. е.

$$\ln\Psi(\sigma + L\delta) < e^{\nu}\ln\Psi(\sigma), \quad \delta = K(u(\sigma)). \tag{37}$$

Далее, с учетом (36) из (35) получаем, что

$$\mu^*(\sigma) \leq M(1;Q)\Psi^{\varepsilon}(\sigma)\Psi(\sigma + \sqrt{2}\delta), \quad \delta = K(u(\sigma)). \tag{38}$$

Возьмем $\nu = \varepsilon$, $L \geq \sqrt{2}$. Учитывая то, что $e^{\varepsilon} < 1 + 2\varepsilon$ при $0 < \varepsilon < \ln 2$, из (37), (38) при $\sigma \geq a$ вне некоторого множества $F \subset [a;\infty)$ конечной меры окончательно имеем

$$\mu^*(\sigma) \leq M(1;Q)\Psi^{1+3\varepsilon}(\sigma). \tag{39}$$

Оценим $\Psi(\sigma)$ через значение функции F на вещественной оси. Для этого введем в рассмотрение интерполирующую функцию А. Ф. Леонтьева [8]

$$w(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\gamma(t)\left(\int\limits_{0}^{t} F(t + \alpha - \nu)e^{\mu\nu}\,d\nu\right)dt, \tag{40}$$

где α — комплексный параметр, C — контур, охватывающий $\overline{D}$ — сопряженную диаграмму функции Q. Здесь Q — функция, определенная формулой из (17), а γ — функция, ассоциированная по Борелю с Q.

Пусть D' — замыкание области, ограниченной контуром C. Когда ν пробегает отрезок от 0 до t, точка $t - \nu$ также пробегает этот отрезок. Поскольку $0 \in \overline{D}$, то $(t + \alpha - \nu) \in D'_{\alpha}$, где D'_{α} — смещение D' на вектор α. Так как F — целая функция, параметр α — любое комплексное число.

Пусть Γ — граница угла $\{\mu : |\arg\mu| < \phi_0 < \pi/2\}$. Тогда для любого z из угла

$$\Delta(\alpha;\psi_0) = \{z : |\arg[-(z-\alpha)]| \leq \psi_0 < \pi/2 - \varphi_0\}$$

имеет место представление [17, гл. II, § 3]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{w(\mu,\alpha,F)}{Q(\mu)}e^{\mu z}\,d\mu. \tag{41}$$

Поскольку последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет нулевую плотность, то $\overline{D} = \{0\}$. Учитывая это, в формуле (41) в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = \delta\}$ $(0 < \delta < \infty)$. Пусть $\varphi_0 = \pi/4$, $\psi_0 = \pi/4 - \varepsilon_0$ $(0 < \varepsilon_0 < \pi/4)$. Параметры α и δ в представлении (41) выберем следующим образом. Пусть $\sigma > 0$, $\alpha = \sigma + d\delta$, а $\delta = \delta(\sigma)$ — решение уравнения (36). Тогда для всех z из множества

$$E(\sigma) = \{z : |\arg[-(z-\alpha)]| \leq \pi/4 - \varepsilon_0,\ |z - \alpha| \geq d\delta\}$$

для $\mu \in \Gamma$ имеем

$$|e^{(z-\alpha)\mu}| \leq e^{-rd\delta\sin\varepsilon_0} \quad (r = |\mu|). \tag{42}$$

Положим $d = \pi/\varepsilon_0$ $(0 < \varepsilon_0 < \pi/4)$. Тогда, очевидно, $d\sin\varepsilon_0 \ge 2$. Следовательно, из (42) получаем, что

$$|e^{(z-\alpha)\mu}| \le e^{-2\delta r}, \quad z \in E(\sigma),\ \mu \in \Gamma.$$

Тогда согласно тому, что $|Q(re^{\pm\frac{\pi}{4}i})| \ge 1$, из (40), (41) для $z \in E(\sigma)$ будет

$$|F(z)| \le H(\delta) \max_{|s-\alpha|\le\delta} |F(s)|\delta^2 \int\limits_0^\infty e^{-\delta r}\, dr.$$

Значит, при $\sigma \ge a$ (можно считать, что $0 < \delta \le 1$)

$$\Psi(\sigma) \le H(\delta) \max_{|s-\alpha|\le\delta} |F(s)|,$$

а если учесть (36), то

$$\Psi^{1-\varepsilon}(\sigma) \le \max_{|s-\alpha|\le\delta} |F(s)|. \tag{43}$$

Воспользуемся теперь леммой Карлемана — Мию (см., например, в [16, 18]). Имеем

$$\max_{|s-\alpha|\le\delta} |F(s)| \le \big(\max_{|s-\alpha|\le 6\delta} |F(s)|\big)^{\frac{3}{4}} \big(\max_{t\in I(\sigma)} |F(t)|\big)^{\frac{1}{4}}, \tag{44}$$

где $I(\sigma) = [\alpha - 6\delta, \alpha + 6\delta]$. Следовательно, из (43), (44) получаем, что

$$\Psi^{1-\varepsilon}(\sigma) \le |F(\chi)|^{\frac{1}{4}} \Psi^{\frac{3}{4}}(\sigma + L\delta), \tag{45}$$

где χ — некоторая точка отрезка $J(\sigma)$, $J(\sigma) = [\sigma + (d-6)\delta, \sigma + (d+6)\delta]$, $L = d + \frac{6}{\sin(\pi/4-\varepsilon_0)}$.

Пусть $\nu = \varepsilon$, $\sigma \notin F$. Тогда из (37)

$$\Psi(\sigma + L\delta) < \Psi^{1+2\varepsilon}(\sigma). \tag{46}$$

Тем самым из (45) вытекает, что

$$\Psi^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}(\sigma) \le |F(\chi)|^{\frac{1}{4}},$$

т. е.

$$\Psi^{1-2\varepsilon}(\sigma) \le |F(\chi)|, \quad \chi \in J(\sigma),\ \sigma \notin F.$$

Поскольку $\chi \le \sigma + L\delta$, то, учитывая (46), отсюда следует, что

$$\Psi(\chi) \le \Psi(\sigma + L\delta) < |F(\chi)|^{\frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}} \quad (0 < \varepsilon < 1/2). \tag{47}$$

Так как при $0 < \varepsilon < \frac{1}{20}$

$$\frac{(1+2\varepsilon)(1+3\varepsilon)}{1-2\varepsilon} < 1 + 10\varepsilon,$$

из (39), (47) окончательно получаем, что для некоторого $\chi \in [\sigma - L\delta, \sigma + L\delta]$ $(\sigma \in e)$ будет

$$\ln\mu^*(\chi) \le \ln M(1; Q) + (1 + 10\varepsilon)\ln|F(\chi)| \quad (0 < \varepsilon < 1/20).$$

Тем самым для любого $\mu > 0$ существует χ такое, что

$$\ln\mu^*(\chi) \le (1 + \mu)\ln|F(\chi)|. \tag{48}$$

Это и означает выполнение неравенства (27).

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Условие Левинсона (18) не влечет сходимости интеграла (5). Действительно, условие (18) связано с поведением функции $\ln M(r;Q)$, а не с поведением последовательности $\{Q'(\lambda_n)\}$ (лемма 1).

Приведем соответствующий пример. Пусть $\Delta_j = \left[2^j - \frac{2^j}{j\ln^2 j}, 2^j\right]$ ($[a]$ — целая часть a), $\Delta = \bigcup\limits_{j\geq 2} \Delta_j$. Через $\{\lambda_n\}$ обозначим возрастающую последовательность целых чисел из Δ. Для этой последовательности

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty,$$

причем [19]

$$n(t) \leq A\frac{t}{\ln t(\ln\ln t)^2} \quad (t \geq e^e).$$

Легко проверяется, что в этом случае (см., например, [16]) наименьшая вогнутая мажоранта $\varphi = \varphi(x)$ функции $\ln M(x;Q)$ удовлетворяет условию (22). Но тогда условие (18) вытекает из леммы 1. В то же время в [19] показано, что

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt = \infty, \quad \alpha(t) = \max_{\lambda\leq t}\{-\ln|Q'(\lambda_n)|\}.$$

§ 3. О неулучшаемости полученных оценок

Пусть выполняется условие (2) (или более сильное условие условие (18)). Естественно возникает вопрос: какова должна быть последовательность $b = \{b_n\}$ ($b_n \neq 0$, $n \geq 1$), чтобы для любой функции $F \in B(\Lambda)$ была бы справедлива оценка

$$d_b(F;\mathbb{R}_+) \geq 1? \tag{49}$$

Пусть W — класс непрерывных на R_+ функций $w = w(x)$ таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow \infty$ и

$$\int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}\,dx < \infty. \tag{50}$$

Последовательности $b = \{b_n\}$ ($b_n \neq 0$) и $c = \{c_n\}$ ($c_n \neq 0$) называются *эквивалентными* (записываем $b \sim c$), если для некоторой функции $w \in W$ выполняются оценки

$$|\ln|b_n| - \ln|c_n|| \leq w(\lambda_n) \quad (n \geq 1). \tag{51}$$

Лемма 2. *Если последовательности $b = \{b_n\}$ и $c = \{c_n\}$ эквивалентны, то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0,\infty)$ конечной меры*

$$\ln\mu^*(\sigma;b) = (1+o(1))\ln\mu^*(\sigma;c). \tag{52}$$

Доказательство. Имеем

$$\mu^*(\sigma;b) = \max_{n\geq 1}\{|a_nQ'(\lambda_n)|\,|b_n|e^{\lambda_n\sigma}\} = \max_{n\geq 1}\left\{|a_nQ'(\lambda_n)|\left|\frac{b_n}{c_n}\right||c_n|e^{\lambda_n\sigma}\right\}.$$

Условие (51) означает, что

$$|d_n| + \frac{1}{|d_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq 1), \tag{53}$$

где $d_n = \frac{b_n}{c_n}$, $w \in W$. Асимптотическое равенство (52) вытекает из оценок (53) [5, теорема 1].

Лемма 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть выполняется условие* (2). *Если* $b \sim \frac{1}{\varphi^2}$, *то при* $\sigma \to \infty$ *вне некоторого множества* $e_1 \subset [0, \infty)$ *конечной меры*

$$\ln \mu^*(\sigma; b) \geq (1 + o(1)) \ln L(\sigma).$$

Следствие 2. *Пусть выполняется условие* (18), $b \sim c$. *Тогда* $d_b(F; \mathbb{R}_+) \geq 1$ *в том и только в том случае, когда* $d_c(F; \mathbb{R}_+) \geq 1$

Следствие 1 легко вытекает из леммы 2 и теоремы 1. С учетом леммы 2 следствие 2 легко выводится из доказательства теоремы 2 (см. оценку (48)).

Выясним, насколько условие $b \prec \mathbb{I}$ существенно для справедливости оценки (49). Для этого через $b(t)$ обозначим наименьшую неубывающую мажоранту последовательности $\{\ln^+ |b_n|\}$, т. е. $b(t) = \max\limits_{\lambda_n \leq t} \{\ln^+ |b_n|\}$.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (2). *Для того чтобы для любой функции* $F \in B(\Lambda)$ *была справедлива оценка* (49), *необходимо, чтобы*

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{b(t)}{t^2}\, dt < \infty. \tag{54}$$

Доказательство. Пусть условие (54) не выполнено, т. е.

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{b(t)}{t^2}\, dt = \infty, \tag{55}$$

где $b(t) = \max\limits_{\lambda_n \leq t} \{\ln^+ |b_n|\}$. Функция $b(t)$ является наименьшей неубывающей мажорантой последовательности $\{\ln^+ |b_n|\}$. Ясно, что $b(t)$ — ступенчатая функция, непрерывная справа.

Пусть $t_0 = \lambda_1$, а $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность всех точек разрыва $b(t)$. Пусть $b(t) = \beta_n$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$ $(n \geq 1)$.

Из условия (2), в частности, следует [8], что

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln M(r; Q)}{r^2}\, dr < \infty.$$

Следовательно [20, лемма 5], существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$2 \ln(1 + r^2) + 20 \ln M(r; Q) \leq r^{\rho(r)} \quad (r \geq 1), \qquad \int\limits_{1}^{\infty} r^{\rho(r) - 2}\, dr < \infty. \tag{56}$$

Пусть $w = w(r)$ — функция из W такая, что $r^{\rho(r)} = o(w(r))$ при $r \to \infty$. Из (50), (55) следует, что множество индексов $J = \{n : n \geq 1,\ b(t_n) > w(t_n)\}$ не ограничено. Пусть $I_j = [\tau_j, \tau_j')$ $(\tau_j < \tau_j', j \geq 1)$ — максимальные интервалы, на которых $w(t) \geq b(t)$. Ясно, что $I_i \cap I_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Положим $I = \bigcup\limits_j I_j$,

$$b^*(t) = \begin{cases} b(t), & \text{если } t \notin I, \\ \min\limits_{x \in I_j} b(x), & \text{если } t \in I_j. \end{cases}$$

Подправленная таким образом функция $b^*(t)$ неубывающая, непрерывная справа, $0 \le b^*(t) \le b(t)$. Поскольку $w \in W$, имеем

$$\int_I \frac{b(t)}{t^2}\,dt \le \int_I \frac{w(t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

С учетом (55) заключаем, что

$$\int_1^{\infty} \frac{b^*(t)}{t^2}\,dt = \infty. \tag{57}$$

Пусть $\{x_j\}$ — последовательность всех точек разрыва функции $b^*(t)$. Поскольку функция $b(t)$ ступенчатая, а $w(t)$ непрерывная и возрастающая, то $\{x_j\}$ есть подпоследовательность $\{t_n\}$, т. е. $x_j = \lambda_{n_j}$ $(j \ge 1)$. Пусть $b^*(t) = \beta_j^*$ при $x_j \le t < x_{j+1}$. Из условия (57) следует существование неубывающей функции $g(t) = b^*(t)\beta^{-1}(t)$ ($\beta(t)$ — неограниченная неубывающая на $[\lambda_1, \infty)$ функция, $\beta(t) > 0$, $\beta(t) \equiv \mathrm{const} = \eta_j$ при $x_j \le t < x_{j+1}$ $(j \ge 1)$ такой, что

$$1)\quad \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{g(t)}{t^2}\,dt = \infty; \quad 2)\quad g(t) = \begin{cases} g_j, & \text{если } x_j \le t < x_{j+1}\ (j \ge 1), \\ g_1, & \text{если } \lambda_1 \le t < x_1\ (j \ge 1), \end{cases} \tag{58}$$

где $g_j = \frac{\beta_j^*}{\eta_j}$ $(j \ge 1)$, $0 < \eta_j \to \infty$, $j \to \infty$.

Далее, существуют окружности

$$K_n = \{z : |z| = r_n\}, \quad \lambda_1 < r_n \uparrow \infty, \quad r_{n-1} < r_n \le 4r_n$$

такие, что [20, лемма 2]

$$\frac{1}{|Q(z)|} \le M^{20}(r; Q), \quad |z| = r = r_n \quad (n \ge 1). \tag{59}$$

Пусть $X = \{x_j\}$, а $\Delta_j = (r_j', r_j'')$ $(r_j' = r_{n_j}, r_j'' = r_{n_j+1})$ — все интервалы, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из X. Здесь r_{n_j} — подпоследовательность последовательности r_n, фигурирующей в оценках (59). Пусть, далее, $G_j = d_j h_j$, где

$$d_j = \min_k \{x_k : x_k \in \Delta_j \cap \Lambda\}, \quad h_j = \int_{\lambda_1}^{d_j} \frac{g(t)}{t^2}\,dt. \tag{60}$$

Из условий (58) следует, что $h_j \uparrow \infty$ при $j \to \infty$. Легко проверяется, что в этом случае

$$R_j = \frac{G_{j+1} - G_j}{d_{j+1} - d_j} \uparrow \infty. \tag{61}$$

Соединяя попарно все точки P_j и P_{j+1} $(j \ge 1)$ отрезками прямых, получим некоторый выпуклый полигон (ломаную) L. Если $y = \varphi(t)$ — уравнение L, то ясно, что

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty. \tag{62}$$

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, введенный выше, а $\{\nu_n\}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\frac{n}{\nu^{\rho(\nu_n)}} = 1 \quad (n \ge 1).$$

Положим
$$P(z)=\prod n=1^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\nu_n^2}\right).$$
Если $z=re^{i\varphi}$, $|\varphi|\le\pi/4$, то существует равномерный по φ предел [8]
$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|P(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}=\pi\cos\varphi. \tag{63}$$

Рассмотрим теперь ряд Дирихле
$$F(s)=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke^{\lambda_k s}\quad(s=\sigma+it), \tag{64}$$
коэффициенты которого определим следующим образом:
$$a_k=\begin{cases}\exp(-\lambda_kh_j)\frac{1}{Q'(\lambda_k)P(\lambda_k)}, & \text{если } \lambda_k\in\Delta_j\quad(j\ge1);\\ \frac{1}{\lambda_k}\exp(-\varphi_j(\lambda_k)-1), & \text{если } \lambda_k\in\Delta'_j\quad(j\ge1);\\ 1, & \text{если } \lambda_1\le\lambda_k<r'_1,\end{cases}$$
где $\Delta_j=(r'_j,r''_j)$, $\Delta'_j=(r''_j,r'_{j+1})$, $y_j=\varphi_j(t)$ — уравнение прямой, проходящей через точки P_j и P_{j+1}.

По предположению последовательность Λ имеет конечный индекс конденсации, а $P(\lambda_k)\ge1$ $(k\ge1)$. Поскольку $h_i\uparrow\infty$ и выполняется условие (62), ряд Дирихле (64) абсолютно сходится во всей плоскости, т. е. $F\in B(\Lambda)$.

Оценим функцию F на вещественной оси сверху.

Пусть Γ_n — контур, составленный отрезками лучей $\{\mu:\arg\mu=\pm\pi/4\}$, соединяющими окружности K_n и K_{n+1}, и дугами этих окружностей. Если
$$F_j(\sigma)=\sum_{\lambda_k\in\Delta_j}a_ke^{\lambda_k\sigma}\quad(j\ge1),$$
то
$$F_j(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_j}\frac{e^{-\mu h_j+\mu\sigma}}{Q(\mu)P(\mu)}\,d\mu,$$
где $\Delta_j=(r'_j,r''_j)$ $(r'_j=r_{n_j},\ r''_j=r_{n_j+1})$, $C_j=\Gamma_{n_j}$, а величина h_j определена в (60).

Оценим теперь функцию F_j. Для этого сначала оценим функции $Q(\mu)$ и $P(\mu)$ на контуре C_j.

Поскольку $|Q(re^{\pm\frac{\pi}{4}i})|\ge1$, с учетом (59) и (63) на контуре C_j $(j\ge1)$ получаем, что для любого $\varepsilon>0$
$$|\mu|(1+|\mu|^2)\frac{1}{|Q(\mu)P(\mu)|}\le\exp[2\ln(1+r^2)+20\ln M(r;Q)-(\pi\sqrt{2}/2-\varepsilon)r^{\rho(r)}],$$
где $|\mu|=r$, $r'_j\le r\le r''_j$, $j\ge j_0$.

Воспользуемся оценкой из (56). Тогда
$$\max_{\mu\in C_j}\left(3|\mu|(1+|\mu|^2)\frac{1}{|Q(\mu)P(\mu)|}\right)\le A<\infty\quad(j\ge1), \tag{65}$$
где A — постоянная, не зависящая от $j\ge1$. Если
$$L_j(\mu)=\frac{e^{-\mu h_j+\mu\sigma}}{Q(\mu)P(\mu)},$$

то
$$|F_j(\sigma)| \le \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_j}|d\mu|\right)\max_{\mu\in C_j}|L_j(\mu)| = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_j}|d\mu|\right)|L_j(\mu_j)|,$$
где μ_j — некоторая точка, принадлежащая контуру C_j. Далее, поскольку $r'_j < r''_j < 4r'_j$, имеем
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_j}|d\mu| \le 3|\mu_j| \quad (j \ge 1).$$
Следовательно, учитывая оценку (65), получаем
$$|F_j(\sigma)| \le \frac{3|\mu_j|}{1+|\mu_j|^2}\frac{1+|\mu_j|^2}{|Q(\mu_j)P(\mu_j)|}e^{-(\operatorname{Re}\mu_j)(h_j-\sigma)} \le \frac{A}{1+|\mu_j|^2}\exp(-\gamma_j h_j+\gamma_j\sigma),$$
где $\gamma_j = \operatorname{Re}\mu_j$, $r'_j \le \gamma_j \le r''_j$, $j \ge 1$.

Таким образом,
$$|F(\sigma)| \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{A}{1+|\mu_j|^2}e^{-\gamma_j h_j+\gamma_j\sigma} + R(\sigma),$$
где
$$R(\sigma) = \sum_{\lambda_k\notin\Delta}|a_k|e^{\lambda_k\sigma}, \quad \Delta = \bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta_j.$$
Отсюда
$$|F(\sigma)| \le B\exp[\max_{j\ge1}(-\gamma_j h_j+\gamma_j\sigma)] + R(\sigma). \tag{66}$$
Поскольку $h_j \uparrow \infty$ при $j \to \infty$, то $\max\limits_{j\ge1}(-\gamma_j h_j+\gamma_j\sigma) = H(\sigma)$ существует при любом фиксированном $\sigma > 0$. Далее, при $\sigma \ge \sigma_0$ имеем
$$0 < H(\sigma) = -\gamma_\nu h_\nu + \gamma_\nu\sigma \le 4r'_\nu(-h_\nu+\sigma) < 4d_\nu(-h_\nu+\sigma),$$
где $r'_\nu \le \gamma_\nu \le r''_\nu$, d_ν — ближайшая к r'_ν точка скачка функции $g(t)$ из интервала Δ_ν. Тогда из (66) получаем, что
$$|F(\sigma)| \le B\exp[4\max_{j\ge1}(-d_j h_j+d_j\sigma)] + R(\sigma), \tag{67}$$
где d_j — ближайшая к r'_j точка скачка функции $g(t)$ из интервала $\Delta_j = (r'_j, r''_j)$.

Пусть $R_{n-1} \le \sigma < R_n$, где числа R_n определены формулой (61). Поскольку $R_n \uparrow \infty$, то для таких σ [8, гл. 2, § 6, п. 2]
$$\max_{j\ge1}(-d_j h_j+d_j\sigma) = -d_n h_n + d_n\sigma = m(\sigma). \tag{68}$$

Коэффициенты ряда $R(\sigma)$ выбраны нами специальным образом, а именно так, что построенная выше ломаная L является полигоном Ньютона для ряда [8, гл. 2, § 6, п. 2]
$$\sum_{m=1}^{\infty}b_m e^{\mu_m\sigma} = \sum_{j=1}^{\infty}e^{-d_j h_j}e^{d_j\sigma} + R(\sigma),$$
где $\{\mu_m\} = \{d_j\} \cup \{\lambda_k : \lambda_k \in \Lambda \setminus \Delta\}$.

Следовательно, при $R_{n-1} \le \sigma < R_n$ из (2), (67), (68) вытекает, что
$$|F(\sigma)| \le Be^{4m(\sigma)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}e^{m(\sigma)} \le Ce^{4m(\sigma)}. \tag{69}$$

Оценим $m(\sigma)$ сверху. Для $R_{n-1} \le \sigma < R_n$ имеем

$$m(\sigma) = -d_n h_n + d_n\sigma \le \frac{d_n d_{n+1}}{d_{n+1} - d_n} \int\limits_{d_n}^{d_{n+1}} \frac{g(t)}{t^2}\,dt \le g(t'_n),$$

где t'_n — наибольшая точка скачка функции $g(t)$ из интервала (r'_n, r''_n) (на участке $[t'_n, d_{n+1})$ функция $g(t)$ постоянна). Поскольку по построению

$$g(t) \equiv \frac{b^*(t'_n)}{\beta(t'_n)}, \quad t'_n \le t < d_{n+1},$$

то при $R_{n-1} \le \sigma < R_n$

$$m(\sigma) \le g(t'_n) = \frac{b^*(t'_n)}{\beta(t'_n)} \le \frac{b(t'_n)}{\beta(t'_n)}. \tag{70}$$

С другой стороны, для тех же σ имеем $\ln\mu(\sigma) \ge \ln|a'_n| + t'_n\sigma$, где a'_n — коэффициент ряда (64), соответствующий показателю t'_n, а $\mu(\sigma)$ — максимальный член этого ряда. Так как $r'_n < t'_n < r''_n$, с учетом (68), (63) для $R_{n-1} \le \sigma < R_n$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\ln\mu^*(\sigma; b) &\ge -t'_n h_n + t'_n\sigma + \ln|b_n| + + \ln\frac{1}{|P(t'_n)|}\\ &\ge \frac{r'_n}{r''_n} m(\sigma) + b(t'_n) + \ln\frac{1}{|P(t'_n)|} > b(t'_n) - 2\pi(t'_n)^{\rho(t'_n)}\\ &= b(t'_n) + o(1)w(t'_n) = (1 + o(1))b(t'_n), \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{71}$$

Здесь мы учли, что $t'_n \in X$, т. е. $w(t'_n) \le b(t'_n)$.

Таким образом, для $R_{n-1} \le \sigma < R_n$ из (69)–(71) окончательно получаем, что при $n \to \infty$

$$\frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln\mu^*(\sigma; b)} \le \frac{\ln C}{\ln\mu^*(\sigma; b)} + 4\frac{m(\sigma)}{\ln\mu^*(\sigma; b)} \le o(1) + (1 + o(1))\frac{1}{\beta(t'_n)}. \tag{72}$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty,$$

из результатов работы [1] следует, что $\sup\limits_{\sigma>0} |F(\sigma)| = \infty$. Значит, из (72) окончательно имеем

$$d_b^*(F; \mathbb{R}_+) = \varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\ln|F(\sigma)|}{\ln\mu^*(\sigma; b)} = 0.$$

Необходимость доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евграфов М. А.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 169–175.
2. *Каримов З. Ш.* Об оценке функции, представленной рядом Дирихле // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 4. С. 560–567.
3. *Шеремета М. Н.* О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 2. С. 235–245.
4. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 2. С. 73–92.

5. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 6. С. 735–737.
6. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenz-reihen // Math. Z. 1929. Bd 29. S. 549–640.
7. *Gaisin A. M.* Behavior of logarithm of modulus of sum of Dirichlet series on curves // J. Anal. (Madras). 1995. V. 3. P. 205–211.
8. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
9. *Levinson N.* Gap and density theorems. New York: Amer. Math. Soc., 1940.
10. *Domar Y.* On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function // Ark. Mat. 1958. Bd 3. S. 429–440.
11. *Дынькин Е. М.* Функции с заданной оценкой $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ и теорема Левинсона // Мат. сб. 1972. Т. 89, № 2. С. 182–190.
12. *Вольберг А. Л., Ёрикке Б.* Суммируемость логарифма почти аналитических функций и обобщение теоремы Левинсона — Картрайт // Мат. сб. 1986. Т. 30, № 3. С. 335–348.
13. *Koosis P.* The logarithmic integral. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988 (1998).
14. *Koosis P.* The logarithmic integral. II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
15. *Brennan J. E.* Weighted polynomial approximation and quasianalyticity for general sets // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 4. С. 69–89.
16. *Korevaar J., Dixon M.* Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Indag. Math. (N.S.) 1978. V. 40, N 2. P. 243–258.
17. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
18. *Гайсин А. М.* Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 7. С. 931–945.
19. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле с вещественными коэффициентами на луче // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 6. С. 810–823.
20. *Гайсин А. М.* Решение проблемы Пойа // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 39–60.

Статья поступила 3 апреля 2003 г.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН, ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077
gaisin@imat.rb.ru

Латыпов Ильяс Дамирович
Башкирский гос. университет, ул. Фрунзе, 32, Уфа 450074
Latypovid@yandex.ru