

ВОКРУГ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА
ЛЕММЫ ЛЕЖАНДРА — КОШИ
О ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

И. Х. Сабитов

Аннотация: Кратко описывается история доказательств известной леммы Коши о сравнении расстояний между концами двух выпуклых ломаных на плоскости или сфере и приводится ее аналитическое доказательство с объяснением, почему в традиционно применяемых построениях для ее доказательства в общем случае неизбежно появление нестрого выпуклых ломаных. Рассматриваются также изгибания наложения двух изометричных выпуклых многоугольников или ломаных.

Ключевые слова: выпуклые ломаные и многоугольники, изометрия многоугольников, расстояния между концами ломаных, изометрические деформации многоугольников и ломаных.

1. Одной из ключевых лемм, использованных Коши при доказательстве им в 1813 г. своей знаменитой теоремы об однозначной определенности выпуклых многогранников [1], является следующее утверждение о числе перемен знака приращений значений углов при изометрическом преобразовании выпуклого многоугольника.

Лемма 1. *Рассмотрим на плоскости или на сфере два неконгруэнтных выпуклых n -угольника P_1 и P_2 . Пусть на каждом из них введена некоторая циклическая нумерация вершин: $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} = A_1$ и $B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1} = B_1$, и пусть многоугольники таковы, что соответствующие их стороны $A_i A_{i+1}$ и $B_i B_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, имеют равные длины. Отметим на многоугольнике P_1 знаком $+$ ($-$) те внутренние углы, которые больше (меньше) соответствующих внутренних углов в P_2 ; если же соответствующие углы равны, то этому углу в P_1 не приписываем никакого знака. Тогда в ряду отмеченных вершин в P_1 при их циклическом обходе будет по меньшей мере 4 перемены знака¹.*

Здесь под циклическим обходом отмеченных вершин многоугольника P_1 понимается обход P_1 по ходу или против хода движения часовой стрелки, начинающийся в некоторой отмеченной его вершине и с *возвращением* в эту же вершину (так как многоугольники P_1 и P_2 неконгруэнтны, то хотя бы одна отмеченная вершина обязательно найдется). Например, пусть на многоугольнике

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00101) и Минобразования РФ (№ E02-1.0-43).

¹На самом деле эта лемма сформулирована и доказана (в несколько иных выражениях) Лежандром в 1794 г. в 1-м издании его известного учебника [2] и поэтому мы называем ее леммой Лежандра — Коши (и в этом же издании, кстати, сформулирована как гипотеза сама теорема об однозначной определенности выпуклых многогранников и даны ее доказательства для некоторых классов многогранников).

на рис. 1 отмечены вершины $A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, A_8$; тогда при обходе против часовой стрелки, начиная, например, с вершины A_3 , отмеченные знаки составят ряд $(+, +, -, +, -, -, +)$ с четырьмя переменами знака.

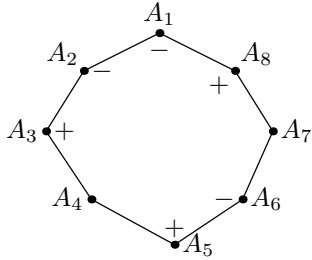


Рис. 1.

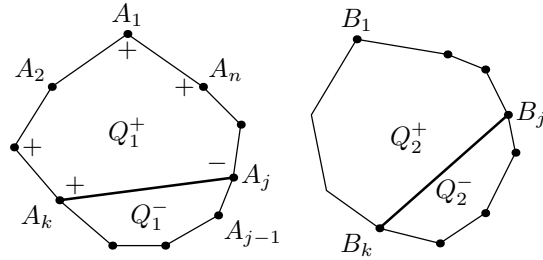


Рис. 2.

В свою очередь, лемма 1 является легким следствием следующего утверждения.

Лемма 2. Пусть на евклидовой плоскости или на сфере заданы два выпуклых n -угольника Q_1 и Q_2 с соответственно циклически пронумерованными вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} = A_1$ и $B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1} = B_1$. Пусть эти многоугольники таковы, что у них стороны $A_i A_{i+1}$ и $B_i B_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$, попарно имеют равные длины: $|A_i A_{i+1}| = |B_i B_{i+1}|$. Далее, пусть внутренние углы в Q_2 при вершинах B_i , $2 \leq i \leq n - 1$, не больше чем соответствующие внутренние углы в Q_1 : $\angle B_{i-1} B_i B_{i+1} \leq \angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$, $2 \leq i \leq n - 1$, причем хотя бы для одной пары углов есть строгое неравенство. Тогда длина стороны $A_1 A_n$ в Q_1 больше длины стороны $B_1 B_n$ в Q_2 : $|A_1 A_n| > |B_1 B_n|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемму 2 часто формулируют как лемму о сравнении расстояний между концами двух изометричных выпуклых ломаных с соответствующими условиями на их внутренние углы, и тогда ее образно называют леммой о луке [3], имея в виду, что чем шире открыта дуга лука, тем длиннее натянутая на нее тетива. Здесь и всюду далее в статье под выпуклой (нестрого выпуклой) ломаной понимается ломаная, которая после соединения отрезком ее концевых вершин становится замкнутым выпуклым (соответственно нестрого выпуклым) многоугольником.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обе леммы справедливы и для нестрого выпуклых многоугольников. Далее мы будем предполагать, что рассматриваемые многоугольники или соответственно ломаные являются, вообще говоря, нестрого выпуклыми, но будем требовать их невырожденности, т. е. допускаются внутренние углы, равные π , но не разрешается, чтобы были нулевые внутренние углы. Последнее условие сделано исключительно для того, чтобы не заниматься каждый раз рассмотрением возможных вырождений.

Доказательство леммы 1 в предположении справедливости леммы 2 (или после ее доказательства) дано во многих работах (см., например, [4–7]). Приведем для полноты изложения это доказательство.

Итак, пусть лемма 2 доказана. Тогда в условиях леммы 1 не может быть, чтобы все отмеченные вершины многоугольника Q_1 имели одинаковый знак (иначе у многоугольников Q_1 и Q_2 хотя бы в одной паре соответствующие стороны были бы разной длины). Значит, есть по крайней мере две вершины, отмеченные противоположными знаками. Так как при обходе отмеченных вершин мы возвращаемся в исходную вершину, число перемен знака должно быть четным. Пусть перемены знака всего две. Тогда весь многоугольник Q_1 можно раз-

бить на две ломаные следующим образом. Берем вершину со знаком, скажем, $+$; пусть это будет вершина A_1 . Идем от этой вершины против часовой стрелки, пока не встретим в первый раз вершину со знаком $-$; пусть это будет вершина $A_k, k \geq 2$. Если $k = n$, то Q_1 разбиваем на ломаные $A_2A_3 \dots A_n$ и $A_nA_1A_2$. Если же $k < n$, то идем от A_1 по часовой стрелке, пока опять не встретим в первый раз вершину со знаком $-$; пусть это будет вершина $A_j, k \leq j \leq n$. Если $k = j$, то многоугольник разбиваем на ломаные $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ и $A_{k+1} \dots A_1 \dots A_{k-1}$. Если же $j > k$, то Q_1 разбиваем на ломаные $A_kA_{k+1} \dots A_j$ и $A_j \dots A_1 \dots A_k$. Перенесем эти разбиения на ломаные с многоугольника Q_1 на многоугольник Q_2 по соответствию номеров вершин и во всех случаях в обоих многоугольниках Q_1 и Q_2 проведем диагонали, соединяющие общие концы ломаных, на которые разбились многоугольники (рис. 2). Тогда получатся две пары выпуклых многоугольников: Q_1^+, Q_2^+ и Q_1^-, Q_2^- (обозначения по знакам вершин многоугольника Q_1 , входящим в ломаные). Пусть проведенная в Q_1 диагональ имеет длину d_1 , а в Q_2 длина диагонали равна d_2 . По лемме 2, примененной к паре Q_1^+, Q_2^+ , имеем $d_1 > d_2$, а в паре Q_1^-, Q_2^- получаем $d_1 \leq d_2$, что и дает требуемое противоречие. Следовательно, число перемен знаков больше двух, т. е., будучи четным числом, оно не меньше четырех.

Остается доказать лемму 2. Как известно, на самом деле в доказательстве Коши этой леммы им была допущена ошибка²⁾, которая описана во многих работах. Ошибка заключается в следующем. Коши сначала рассматривает случай, когда в данном многоугольнике Q_1 изменился (скажем, увеличился) *только один* угол, и доказывает лемму, увеличивая вращением (как говорят, открывая или разворачивая) вокруг вершины этот угол в Q_1 до его значения в другом многоугольнике. Затем он последовательно увеличивает каждый следующий угол и делает вывод, что «одновременное увеличение углов должно дать такой же эффект, как и последовательное их увеличение», не замечая, что в получаемой по его подходу последовательности многоугольников, соединяющих исходный выпуклый многоугольник Q_1 с другим сравниваемым многоугольником Q_2 , не все многоугольники обязаны быть выпуклыми.

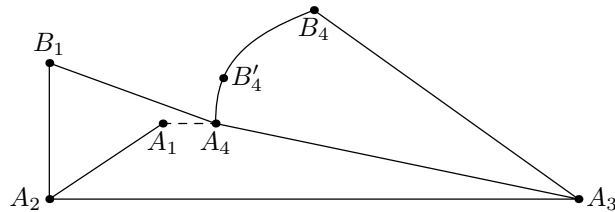


Рис. 3.

Например, пусть даны две изометричные выпуклые ломаные $Q_1 = A_1A_2A_3A_4$ и $Q_2 = B_1A_2A_3B_4$, изображенные на рис. 3. Углы при вершинах A_2 и A_3 в ломаной Q_2 больше, чем соответствующие углы в ломаной Q_1 , и расстояние $|B_1B_4|$, в полном соответствии с леммой 2 больше расстояния $|A_1A_4|$. Но если мы, следуя идее Коши, сначала изменим в Q_1 *только один* угол, скажем, $\angle A_1A_2A_3$, до угла $\angle B_1A_2A_3$ в Q_2 и применим его рассуждение, сравнивая Q_1 с полученной ломаной $Q_3 = B_1A_2A_3A_4$ (должно получиться $|B_1A_4| > |A_1A_4|$), а затем снова изменим *только один* угол $\angle A_2A_3A_4$ в Q_3 , раскрывая его до угла $\angle A_2A_3B_4$

²⁾Для доказательства леммы Коши использовал рассуждения Лежандра, и поэтому точно такая же ошибка есть и в доказательстве Лежандра.

в Q_2 , и попытаемся сравнить ломаные Q_3 и Q_2 , чтобы последовательно получить $|B_1B_4| > |B_1A_4| > |A_1A_4|$, то такое сравнение окажется недопустимым, так как замыкание ломаной Q_3 до многоугольника может оказаться невыпуклым! Так будет, если на рис. 3 вершина A_4 будет находиться ниже диагонали B_1A_3 , чего легко добиться соответствующим подбором длин и углов исходного многоугольника Q_1 . Более того, если сравнивать получающуюся в процессе исполнения идеи Коши ломаную Q_3 с изометричной ей и Q_1 выпуклой ломаной $Q'_4 : B_1A_2A_3B'_4$ (у которой сторона $A_3B'_4$ имеет ту же длину, что и A_3A_4 , но вершина B'_4 лежит *внутри* окружности с центром в B_1 и радиуса $|B_1A_4|$), то расстояние $|B_1B'_4|$ между концами ломаной Q_4 окажется меньше, чем расстояние $|B_1A_4|$. Получится цепочка неравенств $|A_1A_4| < |B_1A_4| > |B_1B'_4|$, из которой никакого вывода о сравнении расстояний между концами изометричных выпуклых ломаных Q_1 и Q_4 сделать нельзя, хотя внутренние углы в Q_4 больше соответствующих внутренних углов в Q_1 .

Заметим, что если разница в значениях углов в сравниваемых выпуклых многоугольниках достаточно мала, то в рассуждениях Коши ошибки не будет, поэтому для доказательства *неизгибаемости* выпуклых многогранников его лемма применима с доказательством самого Коши.

Ошибка в доказательстве Коши была замечена впервые Штейницем, по-видимому, между 1920 и 1928 гг. (по крайней мере, в работе [8] и в нескольких ее последующих переизданиях упоминания об этой ошибке нет), и исправленное им же доказательство этой леммы известно по публикации 1934 г. в [9]. Другие доказательства, оригинальные или модификации доказательства Штейница, см. в тех же упомянутых выше работах [4–6]. Несколько доказательств предложены в [10], одно из которых особенно кратко и изящно изложено в [11] (см. также [7]). По поводу различных обобщений леммы 2 и вообще по истории вопроса приведенная в [3] библиография является, по-видимому, наиболее подробной в известной нам литературе. Здесь же мы дополнительно отметим, что в работе [12] доказательство леммы 1 дано так называемым «методом шарнирного четырехугольника», не требующим использования леммы 2.

Наша цель — предложить другое доказательство леммы 2, которое, будучи аналитическим, в принципе позволяет оценить отличие длин сторон A_1A_n и B_1B_n в зависимости от значений изменений углов в многоугольниках Q_1 и Q_2 . Попутно выясняется, почему во всех известных доказательствах леммы Коши в процессе традиционно рассматриваемых преобразований выпуклой ломаной в другую в общем случае нельзя избежать появления нестрогой выпуклости. Затем мы даем другое доказательство известного утверждения о том, что если рассматриваются два строго выпуклых изометричных многоугольника, то переход от одного к другому всегда оказывается возможным изгибаниями (т. е. непрерывными деформациями с сохранением длин сторон) в классе строго выпуклых многоугольников, и используем этот факт для доказательства возможности перехода от одной строго выпуклой ломаной к другой, ей изометричной, изгибаниями в классе строго выпуклых ломаных с (нестрогой) монотонным возрастанием расстояния между концами ломаной. В завершение мы предлагаем аналитическое толкование метода доказательства леммы 2, предложенного в [4], прямым использованием индукции и без выхода к нестрогой выпуклым ломаным.

2. Справедливость леммы 2 для треугольников на евклидовой плоскости и на сфере легко усматривается из теоремы косинусов и ее сферического аналога.

Напомним, что на сфере радиуса R теорема косинусов имеет вид

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \alpha, \tag{1}$$

где a, b, c ($0 < a \leq \pi R$, $0 < b \leq \pi R$, $0 < c \leq \pi R$, с возможным достижением равенства πR только для одной стороны) — длины сторон треугольника, а α — угол треугольника, противолежащий стороне a . Отсюда видно, что производная a по α больше нуля и поэтому с увеличением угла α длина a противолежащей стороны возрастает. Лемма 2, таким образом, является обобщением соответствующего свойства треугольников, и ее доказательство естественно искать с использованием индукции по числу сторон. В случае, когда хотя бы для одной пары соответствующих углов в многоугольниках Q_1 и Q_2 имеем равенство, индукционный переход осуществляется легко. Действительно, пусть многоугольники Q_1 и Q_2 имеют равные углы при вершинах с некоторым номером k , $2 \leq k \leq n - 1$: $\angle b_{k-1}b_k b_{k+1} = \angle a_{k-1}a_k a_{k+1}$. Тогда Q_1 и Q_2 имеют равные диагонали³⁾ $a_{k-1}a_{k+1}$ и $b_{k-1}b_{k+1}$ и поэтому новые $(n - 1)$ -угольники $Q'_1 : a_1 \dots a_{k-1}a_{k+1} \dots a_n$ и $Q'_2 : b_1 \dots b_{k-1}b_{k+1} \dots b_n$ (изменения в обозначениях при $k = 2, 3, n - 2$ или $n - 1$ очевидны) удовлетворяют условиям леммы 2 и тем самым по индукционному предположению $|a_1 a_n| > |b_1 b_n|$.

Итак, остается обосновать индукционный переход лишь в случае, когда все углы в Q_1 строго больше соответствующих углов в Q_2 . Кроме того, можно предполагать, что в многоугольнике Q_2 (в котором внутренние углы меньше) в вершинах b_1 и b_n есть *строгая выпуклость*, т. е. ни одна из троек вершин b_{n-1}, b_n, b_1 и b_n, b_1, b_2 не лежит на одной прямой. Действительно, пусть, например, три вершины b_n, b_1 и b_2 лежат на одной прямой (рис. 4). Применим метод, предложенный в [10]. Рассмотрим $(n - 1)$ -угольники Q'_1 и Q'_2 соответственно с вершинами a_2, a_3, \dots, a_n и b_2, b_3, \dots, b_n . Для них по индукционному предположению имеем $|a_n a_2| > |b_n b_2|$. Далее, $|a_n a_1| > |a_n a_2| - |a_1 a_2| > |b_n b_2| - |a_1 a_2| = |b_n b_1| + |b_1 b_2| - |a_1 a_2| = |b_n b_1|$, что и требовалось показать.

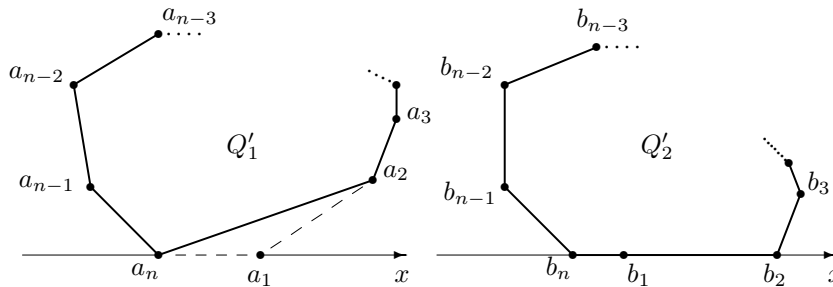


Рис. 4

3. Пусть на плоскости дан некоторый выпуклый n -угольник P с последовательно пронумерованными вершинами $c_1, \dots, c_n, c_{n+1} = c_1$ и с обходом против часовой стрелки. Выберем на плоскости систему координат следующим образом: совместим начало координат O с вершиной c_1 , оси Ox и Oy направим так, чтобы все вершины c_2, \dots, c_{n-1} имели неотрицательные ординаты, а вершина c_n располагалась на отрицательной полуоси Ox (рис. 5). Пусть l_i — длина стороны $c_i c_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$, а γ , $0 < \gamma < \pi$, — угол при вершине c_1 между осью

³⁾Если эти углы равны π , то просто удаляем вершину с номером k из списка вершин и заменяем две прилегающие к ней стороны одной стороной с длиной, равной сумме длин этих двух отрезков.

Сначала заметим, что если всюду в (3)–(6) имеем строгие неравенства, то ординаты всех вершин c_2, \dots, c_{n-1} положительны. Действительно, так как $y_n = y_{n-1} + l_{n-1} \sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2}) = 0$ и выполнены неравенства (5), (6), то $y_{n-1} > 0$. Допустим, что $y_{n-2} = y_{n-1} - l_{n-2} \sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-3}) \leq 0$. Тогда $0 < \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-3} < \pi$, поэтому

$$y_{n-3} = y_{n-2} - l_{n-3} \sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-4}) < 0, \dots, y_2 < 0,$$

но последнее неравенство неверно. Аналогичное противоречие получится, если мы предположим, что $y_{n-2} > 0$, но $y_{n-3} \leq 0$, и т. д. Итак, $y_i > 0$ при всех i , $2 \leq i \leq n-1$, и поэтому весь многоугольник P лежит выше оси Ox . Если же в (3)–(6) допустимы нулевые значения углов (случай нестрогой выпуклости), то все ординаты y_i неотрицательны, причем среди них есть хотя бы одна положительная.

Предположим снова, что все неравенства (3)–(6) строгие. Тогда, так как сторона $c_{n-1}c_n$ продолжается в полуплоскость $y < 0$ и $x_n < 0$, кратчайшее вращение от этого продолжения в сторону отрезка $c_n c_1$ идет против часовой стрелки, поэтому для внешнего угла θ_{n-1} при вершине c_n имеем такие же неравенства $0 < \theta_{n-1} < \pi$, как и для всех вершин. Кроме того, сумма $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}$, как сумма ориентированных внешних углов многоугольника, кратна 2π , а так как $0 < \theta_{n-1} < \pi$ и $\pi < \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} < 2\pi$, то

$$\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1} = 2\pi. \quad (7)$$

Следовательно, при отбрасывании в левой части равенства (7) одного любого слагаемого оставшаяся сумма будет иметь значение строго между π и 2π , как в суммах (5), (6). Воспользуемся этим фактом для доказательства того, что многоугольник P лежит по одну сторону от каждой прямой, определяемой любой его стороной. Действительно, перенесем первый раз начало координат в вершину c_2 , направив новую ось $O\tilde{x}$ по продолжению стороны $c_1 c_2$ со стандартным выбором оси $O\tilde{y}$. Учитывая связь между новыми и старыми координатами $\tilde{x} = x \cos \gamma + y \sin \gamma - l_1$, $\tilde{y} = -x \sin \gamma + y \cos \gamma$, получим, что в новых осях вершины многоугольника имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= 0, & \tilde{y}_2 &= 0, \\ \tilde{x}_3 &= l_2 \cos \theta_1, & \tilde{y}_3 &= l_2 \sin \theta_1, \\ x_4 &= \tilde{x}_3 + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2), & \tilde{y}_4 &= \tilde{y}_3 + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ & \dots & & \\ \tilde{x}_n &= \tilde{x}_{n-1} + l_{n-1} \cos(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}), \\ \tilde{y}_n &= \tilde{y}_{n-1} + l_{n-1} \sin(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}), \\ \tilde{x}_{n+1} &= \tilde{x}_1 = \tilde{x}_n + l_n \cos(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) = -l_1 < 0, \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_1 = \tilde{y}_n + l_n \sin(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

где через l_n обозначено значение $-x_n > 0$. Мы находимся в тех же условиях, что и при исследовании системы (2) с выполнением аналогов условий (3)–(6). Следовательно, можем утверждать, как и выше, что $\tilde{y}_i > 0$ при всех i , $3 \leq i \leq n$, т. е. многоугольник P лежит по одну сторону от прямой, проходящей через сторону $c_1 c_2$. Таким же образом показывается, что это верно для каждой стороны, значит, многоугольник P является выпуклым в целом, что и утверждалось. Для доказательства такого же утверждения в случае нестрогих неравенств (3)–(6)

достаточно убрать из списка вершин все те вершины, при которых соответствующий угол θ_i равен 0, и объединить в одну сторону две инцидентные этой вершине стороны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма допускает существенно более короткое доказательство, если считать известным следующее простое утверждение: *если индекс вращения локально выпуклого многоугольника равен 1, то этот многоугольник не имеет самопересечений и является выпуклым в целом.* Тогда мы из условий леммы с использованием приведенной в [13] формулы для суммы внутренних углов α_i многоугольника P :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n - 2 \text{Ind}_P),$$

где n — число сторон, а Ind_P — индекс вращения многоугольника, вывели бы, что вращение многоугольника равно 1, и этого было бы достаточно для получения его выпуклости в целом.

4. Исследуем теперь, каковы те условия на длины l_1, \dots, l_{n-1} и на углы $\gamma, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, которые, как сказано в условиях леммы 3, вместе с неравенствами (3)–(6) обеспечивают выполнение соотношений $y_n = 0$, $x_n < 0$. Совокупность значений $\gamma, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, заданных неравенствами

$$0 \leq \gamma \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad 1 \leq i \leq n - 2,$$

определяет в $(n - 1)$ -мерном пространстве \mathbb{R}^{n-1} переменных $\gamma, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ параллелепипед Π , «нижнее» и «верхнее» основания которого ω_0 и ω_π являются $(n - 2)$ -мерными кубами $0 \leq \theta_i \leq \pi_i$, $1 \leq i \leq n - 2$, на которых соответственно $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$. Условия

$$\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \geq \pi, \quad \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq 2\pi$$

задают в \mathbb{R}^{n-1} некоторый многогранник Ω , расположенный в параллелепипеде Π между параллельными плоскостями $\Pi_1 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$ и $\Pi_2 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, которые вырезают на основании ω_0 область $\theta_1 + \dots + \theta_{n-1} \geq \pi$, а на основании ω_π область $\theta_1 + \dots + \theta_{n-1} \leq \pi$ (см. далее рис. 9 для случая $n = 4$).

Значения переменной γ не свободны, а связаны с $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ уравнением

$$y_n = l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \theta_1) + \dots + l_{n-1} \sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2}) = 0,$$

а $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, в свою очередь, должны обеспечивать неравенство

$$x_n = l_1 \cos \gamma + l_2 \cos(\gamma + \theta_1) + \dots + l_{n-1} \cos(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2}) < 0.$$

Положив $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$, можем записать

$$y_n \equiv f(\gamma, \theta) = A(\theta) \sin \gamma + B(\theta) \cos \gamma = 0, \tag{8}$$

$$x_n \equiv F(\gamma, \theta) = A(\theta) \cos \gamma - B(\theta) \sin \gamma < 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} A(\theta) &= l_1 + l_2 \cos \theta_1 + \dots + l_{n-1} \cos(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}), \\ B(\theta) &= l_2 \sin \theta_1 + \dots + l_{n-1} \sin(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}). \end{aligned} \tag{10}$$

Из условия $x_n = F(\gamma, \theta) < 0$ следует, что одновременное выполнение равенств $A(\theta) = 0$, $B(\theta) = 0$ невозможно, поэтому уравнение (8) относительно γ разрешимо и его единственное в промежутке $(0, \pi)$ решение γ представимо в виде

$$\gamma = \pi - \text{arcctg} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} \tag{11}$$

с

$$\cos \gamma = -\frac{A(\theta)}{\sqrt{A^2(\theta) + B^2(\theta)}}, \quad \sin \gamma = \frac{B(\theta)}{\sqrt{A^2(\theta) + B^2(\theta)}}. \quad (12)$$

Эти значения $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$ дают

$$x_n = F(\gamma, \theta) = -\sqrt{A^2(\theta) + B^2(\theta)}. \quad (13)$$

Итак, в телесном многограннике Ω рассматриваемым нами выпуклым ломаным соответствуют точки, расположенные на поверхности $S : f(\gamma, \theta) = 0$ с явным уравнением (11). Эта поверхность не может пересекаться с теми открытыми гранями многогранника Ω , на которых $\gamma = \pi$ или $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$. Действительно, при $\gamma = \pi$ из условия (6) имеем $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq \pi$, поэтому на грани $\gamma = \pi$ равенство $B(\theta) = 0$ невозможно, что приводит к невыполнению равенства $y_n = 0$. Аналогично на грани $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$ имеем то же неравенство $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq \pi$ с таким же следствием $y_n \neq 0$. Из этого мы выводим, что на поверхности S внутри многогранника Ω будет $B(\theta) > 0$, а значения $B(\theta) = 0$, на которых $\sin \gamma = 0$, могут быть только на основании $\omega_0 : \gamma = 0$.

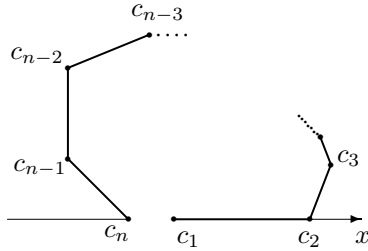


Рис. 7.

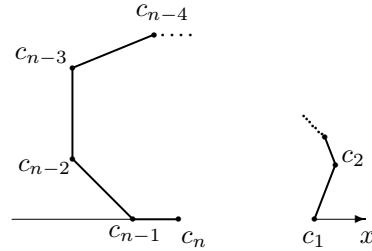


Рис. 8.

Поверхность S однозначно проектируется на нижнее основание ω_0 параллелепипеда Π , и условие $B(\theta) > 0$ определяет на нем некоторую область допустимых значений углов $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$. Найдем вид этой области. Уравнение $B(\theta) = 0$ можно записать в виде

$$A_1(\hat{\theta}_1) \sin \theta_1 + B_1(\hat{\theta}_1) \cos \theta_1 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_1(\hat{\theta}_1) &= A_1(\theta_2, \dots, \theta_{n-2}) = l_2 + l_3 \cos \theta_2 + \dots + l_{n-1} \cos(\theta_2 + \dots + \theta_{n-2}), \\ B_1(\hat{\theta}_1) &= B_1(\theta_2, \dots, \theta_{n-2}) = l_3 \sin \theta_2 + \dots + l_{n-1} \sin(\theta_2 + \dots + \theta_{n-2}). \end{aligned} \quad (14)$$

На поверхности $B(\theta) = 0$, как мы знаем, $\gamma = 0$, а при $\gamma = 0$ многоугольник имеет вид, как на рис. 7, т. е. вершины c_n, c_1 и c_2 находятся на оси Ox . Выберем начало координат в вершине c_2 , которую обозначим через \hat{c}_1 , остальные вершины c_i обозначим соответственно через \hat{c}_{i-1} , $3 \leq i \leq n$, а точку c_1 исключим из списка вершин. Тогда угол θ_1 будет играть для выпуклого $(n - 1)$ -угольника $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{n-1}$ роль γ , кроме того, $\hat{y}_{n-1} = 0$, $\hat{x}_{n-1} = x_n - l_1 < 0$, и мы можем получить из уравнения поверхности $B(\theta) = 0$, что

$$\cos \theta_1 = -\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad \sin \theta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

или

$$\theta_1 = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{A_1}{B_1}. \quad (15)$$

Так как $\frac{\partial B}{\partial \theta_1} = A - l_1 = \hat{x}_{n-1} < 0$, условию $B(\theta) \geq 0$ на основании ω_0 , где задаются углы $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, соответствует область, определяемая неравенством

$$\theta_1 \leq \pi - \operatorname{arccctg} \frac{A_1}{B_1}. \quad (16)$$

Заметим, что эта область содержит, в частности, все точки (θ) с условием $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq \pi$, так как в них $B(\theta) > 0$.

Рассмотрим теперь условие $\pi < \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq 2\pi$. Мы уже выяснили, что над областью $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} < \pi$ поверхность $S : f(\gamma, \theta) = 0$ располагается внутри тела Ω между плоскостями $\gamma = \pi - \theta_1 - \dots - \theta_{n-2}$ и $\gamma = \pi$, поэтому нужно изучить ограничения, накладываемые лишь неравенствами $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} > \pi$ и $c(\gamma, \theta) \equiv \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq 2\pi$. Учитывая равенство $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} = 2\pi$ (где θ_{n-1} — внешний угол при вершине c_n), уравнение (8) можно переписать в виде

$$y_n = g(\theta_{n-1}, \theta) \equiv C(\theta) \sin \theta_{n-1} + D(\theta) \cos \theta_{n-1} = 0$$

с $x_n = C(\theta) \cos \theta_{n-1} - D(\theta) \sin \theta_{n-1} < 0$, где

$$\begin{aligned} C(\theta) &= l_{n-1} + l_{n-2} \cos \theta_{n-2} + \dots + l_1 \cos(\theta_{n-2} + \dots + \theta_1), \\ D(\theta) &= l_{n-2} \sin \theta_{n-2} + \dots + l_1 \sin(\theta_{n-2} + \dots + \theta_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Вариант $D < 0$ приводит к противоречию с условием $x_n < 0$, поэтому уравнение $y_n = 0$ имеет решение

$$\theta_{n-1} = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{C(\theta)}{D(\theta)}$$

с

$$\cos \theta_{n-1} = -\frac{C}{\sqrt{C^2(\theta) + D^2(\theta)}}, \quad \sin \theta_{n-1} = \frac{D}{\sqrt{C^2(\theta) + D^2(\theta)}},$$

откуда следует, что выпуклым ломаным (для которых $0 < \theta_{n-1} < \pi$) в многограннике Ω соответствуют точки с условием $D(\theta) > 0$. Точкам, где $D(\theta) = 0$, соответствует значение $\sin \theta_{n-1} = 0$. Если $\theta_{n-1} = \pi$, то получаем $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$, что, как мы знаем, приводит к запрещенному неравенству $y_n \neq 0$. Следовательно, равенство $D(\theta) = 0$ бывает только в точках $\theta_{n-1} = 0$ или $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, которым соответствуют многоугольники, изображенные на рис. 8, у которых вершины c_{n-1}, c_n и c_1 лежат на одной прямой.

Найдем теперь область изменения значений $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, соответствующих области $D(\theta) > 0$. В уравнении $D(\theta) = 0$ выделяем переменную θ_{n-2} и, решая его аналогично уравнению $B(\theta) = 0$, получаем, что решением уравнения будет функция

$$\theta_{n-2} = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{C_1}{D_1},$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-3}) = l_{n-2} + l_{n-3} \cos \theta_{n-3} + \dots + l_1 \cos(\theta_{n-3} + \dots + \theta_1), \\ D_1 &= D_1(\theta_1, \dots, \theta_{n-3}) = l_{n-3} \sin \theta_{n-3} + \dots + l_1 \sin(\theta_{n-3} + \dots + \theta_1). \end{aligned}$$

Так как на поверхности $D(\theta) = 0$ имеем

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_{n-2}} = x_n - l_{n-1} < 0,$$

область $D(\theta) \geq 0$ на грани ω_0 дается неравенством

$$\theta_{n-2} \leq \pi - \operatorname{arccctg} \frac{C_1}{D_1}. \quad (18)$$

Итак, мы доказали следующее

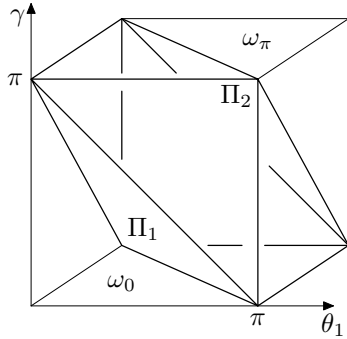


Рис. 9.

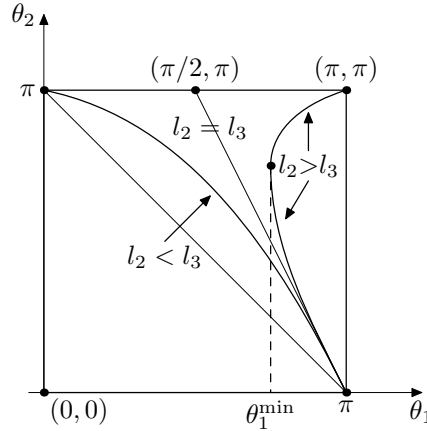


Рис. 10.

Утверждение 1. Выпуклые ломаные из леммы 3 при данных длинах сторон l_1, \dots, l_{n-1} имеют углы $\theta_i, 1 \leq i \leq n - 2$, соответствующие тем точкам куба ω_0

$$0 \leq \theta_1 < \pi, \dots, 0 \leq \theta_{n-2} < \pi,$$

которые расположены в области $T \subset \omega_0$, определяемой неравенствами (16) и (18).

Очевидно, точки для строго выпуклых многоугольников определяются соответствующими строгими неравенствами.

Таким образом, мы описали все выпуклые ломаные с данными длинами сторон. Отметим, в частности, что в область существования этих ломаных входят все точки, удовлетворяющие неравенству $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq \pi$.

5. Подытожим это исследование наглядными иллюстрациями для случая $n = 4$. В этом случае имеем два изменяющихся угла θ_1 и θ_2 . Многогранник Ω в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 изображен на рис. 9. На рис. 9 и 10 изображены области, определяемые на нижней грани ω_0 параллелепипеда P соответственно неравенствами $B(\theta) > 0$ и $D(\theta) > 0$. Кривая $B(\theta) = l_2 \sin \theta_1 + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$ или

$$\theta_1 = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{l_2 + l_3 \cos \theta_2}{l_3 \sin \theta_2}$$

имеет три разных формы в зависимости от соотношения между значениями l_2 и l_3 . При $l_2 > l_3$ это будет выпуклая кривая, идущая от точки $(\pi, 0)$ к точке (π, π) с минимальным значением $\theta_1^{\min} = \frac{3\pi}{2} - \theta_2^0 > \frac{\pi}{2}$, достигаемым при $\theta_2^0 = \pi - \arccos \frac{l_3}{l_2} > \frac{\pi}{2}$. При значениях $l_2 = l_3$ уравнению $B(\theta) = 0$ соответствует прямая $2\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$, а при $l_2 < l_3$ получается выпуклая (вверх) кривая, идущая от точки $(0, \pi)$ к точке $(\pi, 0)$. Во всех случаях эти линии располагаются выше прямой $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ (рис. 10).

Кривая $D(\theta) = l_2 \sin \theta_2 + l_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$ или

$$\theta_2 = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{l_2 + l_1 \cos \theta_1}{l_1 \sin \theta_1}$$

тоже имеет три разных формы в зависимости от соотношения между значениями l_2 и l_1 . При $l_2 > l_1$ это будет выпуклая кривая, идущая от точки $(0, \pi)$ к точке (π, π) с минимальным значением $\theta_2^{\min} = \frac{3\pi}{2} - \theta_1^0 > \frac{\pi}{2}$, достигаемым при

$\theta_1^0 = \pi - \arccos \frac{l_1}{l_2} > \frac{\pi}{2}$. При значениях $l_2 = l_3$ уравнению $D(\theta) = 0$ соответствует прямая $\theta_1 + 2\theta_2 = 2\pi$, а при $l_2 < l_1$ получается выпуклая (вверх) кривая, идущая от точки $(0, \pi)$ к точке $(\pi, 0)$. Во всех случаях эти линии располагаются выше прямой $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ (рис. 11). Заметим, что кривые $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$ при всех соотношениях между длинами l_1, l_2, l_3 или вовсе не пересекаются внутри квадрата или могут пересечься там только в одной точке.

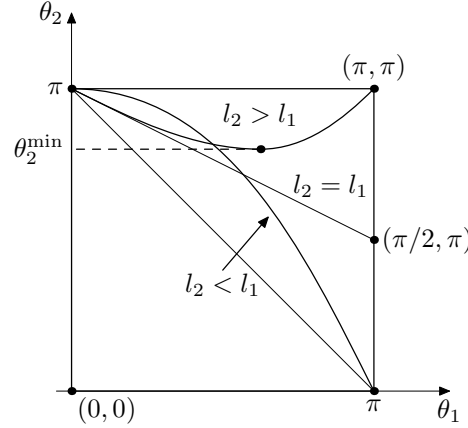


Рис. 11.

6. Мы, наконец, готовы приступить к доказательству леммы 2. Пусть данные многоугольники Q_1 и Q_2 расположены, как в условиях леммы 3, соответственно с углами $\alpha, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}$ и $\beta, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}$, для которых выполнены условия вида (3)–(6). Включим Q_1 и Q_2 в семейство выпуклых многоугольников $Q(\gamma, \theta)$ с координатами вершин, данными формулами (2). При этом будем предполагать, что выполнены неравенства

$$0 \leq \phi_i \leq \theta_i \leq \psi_i < \pi, \quad \phi_i < \psi_i, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \tag{19}$$

а γ определяется через $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ по формуле (11). Обозначим вершины многоугольников Q_1, Q_2 и $Q(\gamma, \theta)$ соответственно через $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ и c_1, c_2, \dots, c_n . Значения углов $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ при заданных длинах сторон l_1, \dots, l_{n-1} заполняют в кубе ω_0 пересечение описанной выше в утверждении 1 области T и прямоугольного параллелепипеда P , заданного неравенствами (19). Обозначим это пересечение через T_0 . Область в многограннике Ω , лежащую над T_0 , обозначим через Ω_0 .

Расстояние между вершинами c_1 и c_n многоугольников $Q(\gamma, \theta)$ равно взятому со знаком $(-)$ значению функции $F(\gamma, \theta)$, определенной формулами (9), (10) и (13). Нам надо показать, что⁴⁾

$$F(\alpha, \phi) < F(\beta, \psi) \tag{20}$$

(напомним, что увеличение внешних углов θ_i соответствует уменьшению внутренних углов многоугольника).

Сравниваемым многоугольникам Q_1 и Q_2 в области $\Omega_0 \subset \Omega \subset \Pi$ соответствуют точки $M_1 = (\alpha, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})$ и $M_2 = (\beta, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})$. В соответствии с

⁴⁾На самом деле с использованием формулы (13) мы можем написать точное значение разности $F(\alpha, \phi) - F(\beta, \psi)$, из которого, однако, трудно увидеть знак этой разности.

предположением, сформулированным в конце п. 2, считаем, что в точке M_2 выполнены неравенства $\beta > 0$ и $\beta + \psi_1 + \dots + \psi_{n-2} > \pi$. Для перехода от ломаной Q_2 к ломаной Q_1 , т. е. от точки $M_2 \in \Omega_0$ к точке $M_1 \in \Omega_0$, нам нужно знать поведение градиента функции $F(\gamma, \theta)$. Имеем

$$\text{grad } F(\gamma, \theta) = \{-f, -f + y_2, \dots, -f + y_{n-1}\}. \quad (21)$$

Так как для выпуклых ломаных все ординаты вершин y_i , $2 \leq i \leq n-1$, положительны, получаем, что в точках поверхности $S : f(\gamma, \theta) = 0$ градиент функции $F(\gamma, \theta)$ направлен в сторону возрастания углов $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$. С учетом этого рассмотрим в Ω_0 путь L , начинающийся в точке M_2 , лежащий на поверхности $S : f = 0$ и проектирующийся на основание ω_0 на отрезок Γ с уравнениями $\theta_i(t) = t\phi_i + (1-t)\psi_i$, $1 \leq i \leq n-2$. Вблизи своего начала, при достаточно малых t , этот путь идет строго внутри Ω_0 и вдоль него

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-2} y_{i+1}(\phi_i - \psi_i) < 0,$$

поэтому функция $F(\gamma, \theta)$ вдоль L убывает и остается отрицательной, а неравенство $F \neq 0$ обеспечивает возможность продолжения пути L вдоль поверхности $S : f = 0$ с сохранением представимости S уравнением $\gamma = \gamma(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$. Если путь L при изменении t от 0 до 1 нигде не выходит на границу области Ω_0 (так будет, если, например, прямоугольный параллелепипед (19) целиком лежит в области T), то он при $t = 1$ придет в точку M_1 с постоянным убыванием F вдоль L , и тогда получаем требуемое неравенство (20). При этом приращение $F(t)$ можно найти или хотя бы оценить по формуле

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-2} (\phi_i - \psi_i) y_{i+1}(t) dt, \quad (22)$$

в которой с учетом формул (2) и (12) подинтегральные функции могут быть выписаны явно как некоторые элементарные функции от t . В частности, если точка M_2 имеет «горизонтальные» координаты, удовлетворяющие неравенству $\psi_1 + \dots + \psi_{n-2} \leq \pi$, то обе точки M_1 и M_2 будут находиться в области, в которой путь L не сможет выйти к границе области Ω_0 , и для этого случая доказательство леммы закончено.

А в общем случае может быть, что путь L при некотором $t = t_0 < 1$ впервые попадет на границу области Ω_0 . Попасть в точки вертикальных боковых граней над границей параллелепипеда ω_0 он не может, так как его проекция на ω_0 проходит по диагонали этого параллелепипеда. Из п. 4 мы знаем, что этого не может быть также в точках «крышки» ω_π , где $\gamma = \pi$, и в точках плоскости $\Pi_1 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$. Остаются две возможности: 1) путь L впервые выходит к границе Ω_0 в некоторой точке нижнего основания ω_0 , где $\gamma = 0$, или 2) первый выход L к границе происходит в некоторой точке плоскости $\Pi_2 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, причем в обоих случаях соответствующее значение параметра t доступно прямому вычислению.

Случай $n = 4$ разберем отдельно, а сейчас считаем, что $n > 4$. Пусть путь L вышел к границе области Ω_0 в точке $M^{(1)}(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{n-2}^{(1)})$ на основании ω_0 , в которой $B(\theta) = 0$. Так как проекция Γ пути L на основание ω_0 идет по диагонали параллелепипеда ω_0 , имеем

$$\psi_1 > \theta_1^{(1)} > \phi_1, \psi_2 > \theta_2^{(1)} > \phi_2, \dots, \psi_2 > \theta_{n-2}^{(1)} > \phi_{n-2}.$$

Точкам $(n - 3)$ -мерной поверхности $B(\theta) = 0$ в параллелепипеде ω_0 соответствуют ломаные, у которых вершины c_n, c_1 и c_2 расположены на одной прямой (см. рис. 7). Рассмотрим новые выпуклые ломаные с $n - 1$ вершинами c_2, c_3, \dots, c_n , из которых c_2 и c_n лежат на оси Ox с началом координат в вершине c_2 . Теперь для них роль аналога $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда Π играет $(n - 2)$ -мерный параллелепипед ω_0 , роль поверхности $S : f(\gamma, \theta) = 0$ — поверхность $S_1 : B(\theta) = 0$, роль угла γ — угол θ_1 , роль основания ω_0 — $(n - 3)$ -мерный параллелепипед $\omega_1 : 0 \leq \theta_2 < \pi, \dots, 0 \leq \theta_{n-2} < \pi$, а вместо функции F теперь будет функция $F_1 = F(0, \theta) - l_1$, которая в точке $M^{(1)}$ меньше нуля. Продолжим путь L в ω_0 как путь L_1 , лежащий на поверхности $S_1 : B(\theta) = 0$ и проектирующийся на основание ω_1 на отрезок Γ_1 с уравнениями $\theta_i(t_1) = t_1\phi_i + (1 - t_1)\theta_i^{(1)}$, $2 \leq i \leq n - 2$, $0 \leq t_1 \leq 1$. Путь L_1 не может выйти к точке поверхности $D(\theta) = 0$, на которой $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, так как для $\gamma = 0$ это привело бы к равенству $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, что невозможно в силу неравенства $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} < \psi_1 + \dots + \psi_{n-2} < 2\pi$. Углы $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ удовлетворяют аналогам условий (5), (6), т. е. $\pi < \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \leq 2\pi$. В полной аналогии с выше-рассмотренным получаем, что вдоль пути L_1 функция F_1 , а вместе с ней и F убывают, оставаясь отрицательными. При движении вдоль пути L_1 может быть так, что наступит момент, когда $\theta_1 = \theta_1(\theta_2, \dots, \theta_{n-2})$ станет равным ϕ_1 , или же этого момента не будет до прихода Γ_1 — проекции L_1 на основание ω_1 — в точку $(\phi_2, \dots, \phi_{n-2})$. В первом случае мы получаем нестрого выпуклую ломаную $c_1c_2 \dots c_n$, имеющую с исходной изометричной ломаной Q_1 равный внутренний угол при вершине c_2 . Как показано в п. 2, в силу индукционного предположения этого достаточно, чтобы утверждать, что $|a_n a_1| > |c_n c_1| > |b_n b_1|$. Во втором случае получаем, что изменяющаяся ломаная Q и исходная ломаная Q_1 будут иметь по $n - 3$ общих угла и этого тоже достаточно для получения, как и выше, требуемого неравенства $|a_n a_1| > |b_n b_1|$.

Осталось разобрать случай, когда путь L выходит к границе области Ω_0 в какой-либо точке плоскости $\Pi_2 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, проектирующейся на основание ω_0 в некоторую точку $M^{(2)}(\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \dots, \theta_{n-2}^{(2)})$ с $D(\theta) = 0$. Тогда мы можем провести такие же рассуждения, как и в рассмотренном выше случае, и преобразовать ломаную Q в ломаную, имеющую с Q_1 либо один общий угол $\theta_2 = \phi_2$, либо $n - 3$ общих углов, причем в ходе преобразования расстояние между концами ломаной будет монотонно возрастать. Этого, как известно, достаточно для получения нужного неравенства.

Итак, мы получили доказательство леммы 2, показав, что один из сравниваемых многоугольников Q_2 можно непрерывно и изометрично продеформировать или в другой сравниваемый многоугольник Q_1 , сохраняя в ходе деформации существующие неравенства внутренних углов, или же преобразовать Q_2 в нестрого выпуклый многоугольник, имеющий с Q_1 один или $n - 3$ равных внутренних угла, с монотонно растущим в ходе деформации расстоянием между концевыми точками ломаной. Естественно задаться вопросом о возможности непрерывного перехода от Q_2 к Q_1 во всех случаях. В книге [5, гл. III, § 1] на с. 151 в скобках замечено, что две выпуклые изометричные ломаные всегда можно непрерывно перевести друг в друга с сохранением соотношения углов (т. е. в одной из ломаных внутренние углы не убывают, оставаясь меньше соответствующих углов в другой ломаной) и с монотонным возрастанием расстояния между концевыми точками ломаных. Мы сейчас рассмотрим подробно случай ломаных с четырьмя вершинами и покажем, что это утверждение из [5]

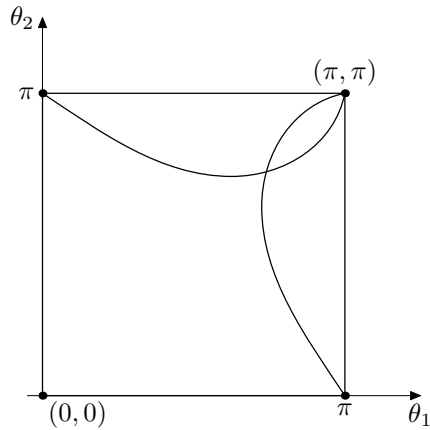


Рис. 12.

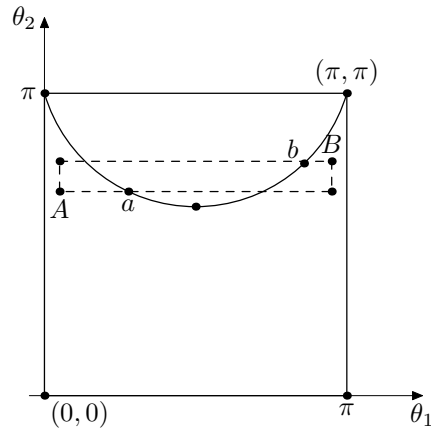


Рис. 13.

неверно.

В п. 5 установлено, что в квадрате $0 \leq \theta_1 < \pi$, $0 \leq \theta_2 < \pi$ выпуклым ломаным соответствует область T , определяемая неравенствами (16) и (18). Если имеем случай $l_1 = l_2 = l_3$, то T будет выпуклым четырехугольником и любые две его точки соединимы отрезком прямой, т. е. любые две выпуклые ломаные⁵⁾ такого вида соединимы непрерывным семейством с монотонным убыванием углов и монотонным изменением расстояния между концевыми вершинами ломаной. Так же будет и во всех остальных случаях, кроме случая, когда $l_2 > l_3$ и/или $l_2 > l_1$. В этом случае область T имеет вид, изображенный на рис. 12 (ограничивающие область T кривые могут иметь пересечение в одной или в двух точках — всегда в точке (π, π) и, возможно, еще в одной точке). Если рассмотреть две ломаные⁶⁾, одну с углами $\theta_1 = \theta'_1 < \theta_1^0$, $\theta_2 = \theta'_2 > \theta_2^{\min}$, другую с углами $\theta_1 = \theta''_1 > \theta_1^0$, $\theta_2 = \theta''_2 > \theta'_2$, то в пределах прямоугольника $P : \theta'_1 \leq \theta_1 \leq \theta''_1$, $\theta'_2 \leq \theta_2 \leq \theta''_2$ нельзя перейти непрерывно из точки $A(\theta'_1, \theta'_2)$ в точку $B(\theta''_1, \theta''_2)$ (рис. 13; для большей наглядности иллюстрации на рисунке масштаб не соблюден). Непрерывный переход можно будет сделать по следующей траектории: отрезок Bb : $\theta_2 = \text{const} = \theta''_2$, затем по дуге кривой $D(\theta) = 0$ до точки a , далее по отрезку aA : $\theta_2 = \text{const} = \theta'_2$. Знак производной функции $F(0, \theta)$ вдоль дуги кривой $D(\theta) = 0$ определяется из следующего выражения (см. формулы (10), (13), (17)):

$$\frac{d}{d\theta_1}(A^2 + B^2) = -2l_1B(\theta) < 0,$$

т. е. $\frac{d}{d\theta_1}F(0, \theta) > 0$ (потому что все происходит в области $B(\theta) > 0$). Так как вдоль дуги ba переменная θ_1 убывает и $F < 0$, то $|F(0, \theta)|$ вдоль этой дуги возрастает, что и нужно. Переход из точки B в точку A осуществился *только с выходом за пределы прямоугольника P* .

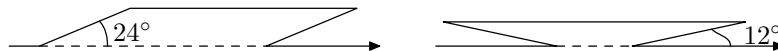


Рис. 14.

⁵⁾ О применяемых обозначениях θ_1^0 и θ_2^{\min} см. рис. 11 и соответствующий текст.

⁶⁾ Мы имеем в виду ломаные, соответствующие точкам внутри Ω_0 .

Конкретным примером двух ломаных, не переводимых друг в друга непрерывно в своем классе (т. е. с условием сохранения соответствующих неравенств внутренних углов), являются ломаные на рис. 14. Для них $l_2 = 2l_1 = 2l_3$. Для нижней ломаной $\theta_1 = 156^\circ$, $\theta_2 = 24^\circ$; для верхней $\theta_1 = 168^\circ$, $\theta_2 = 168^\circ$. Непосредственно можно проверить, что если мы захотим непрерывно перевести верхнюю ломаную в нижнюю, то конфигурации с $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ и со значением $\theta_1 \geq 156^\circ$ не будет.

Ниже в п. 9 покажем, что и в случае общего n любые две изометричные строго выпуклые ломаные можно соединить непрерывным семейством строго выпуклых ломаных с неубывающим расстоянием между концевыми вершинами (но без информации о поведении углов).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При доказательстве леммы 2 можно обойтись рассмотрением движения вдоль линии L до *первого* ее выхода к границе области Ω_0 , когда в изменяющемся многоугольнике появляются три вершины, лежащие на одной прямой (т. е. угол γ или θ_{n-1} становится равным нулю), а потом применить рассуждение, приведенное в конце п. 2. Но мы хотели показать, что если не в один, то хотя бы в два хода можно применить доказательство, основанное на возможности приведения ломаной в положение, когда она имеет угол, равный соответствующему углу в другом сравниваемом многоугольнике.

7. Доказательство леммы 2 можно также получить, рассматривая следующую задачу нахождения условного экстремума: найти в области Ω_0 минимум функции $F(\gamma, \theta)$ при условии связи $f(\gamma, \theta) = 0$. Для этого сначала покажем, что во внутренних точках области экстремума не может быть. Составим функцию Лагранжа $\Lambda = F(\gamma, \theta) + \lambda f(\gamma, \theta)$ и рассмотрим систему из необходимых условий экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta_1} = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_{n-2}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta_{n-2}} = 0, \quad f(\gamma, \theta) = 0. \quad (23)$$

Из (21) с учетом формулы $\text{grad } f(\gamma, \theta) = \{F, F - x_2, \dots, F - x_{n-1}\}$ и последнего уравнения системы (23) получаем, что в точке экстремума $\lambda F = 0$. Рассмотрим возможные случаи.

Пусть $F = 0$. Тогда

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_i} = y_{i+1} - \lambda x_{i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

откуда при $i = 1$ имеем $\sin \gamma - \lambda \cos \gamma = 0$, а для остальных i , $2 \leq i \leq n-2$, получаем

$$\begin{aligned} y_{i+1} - \lambda x_{i+1} &= y_i - \lambda x_i + l_i(\sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}) - \lambda \cos(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1})) \\ &= l_i(\sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}) - \lambda \cos(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1})) = 0, \end{aligned}$$

откуда приходим к невыполнимой системе

$$\sin \gamma - \lambda \cos \gamma = 0, \quad \cos \gamma + \lambda \sin \gamma = 0.$$

Следовательно, в ожидаемой внутренней точке экстремума $F \neq 0$, $\lambda = 0$. Но если $\lambda = 0$, то

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_i} = y_{i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

что внутри Ω_0 невозможно.

Итак, оба экстремальных значения функции $F(\gamma, \theta)$ в D должны достигаться на границе Ω_0 . С гранями $\gamma = \pi$ и $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$ поверхность $S : f = 0$ не пересекается. Значения F на пересечениях S с гранями $\gamma = 0$ или $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$ сравниваются с $F(\alpha, \phi)$, как выше, а на гранях $\theta_i = \text{const}$ ($= \phi_i$ или ψ_i) «работает» индукционное предположение.

8. Переходим к многоугольникам на сфере. Чтобы не усложнять изложение слишком частыми уточнениями, будем предполагать, что рассматриваемые многоугольники и ломаные являются строго выпуклыми, хотя все утверждения верны, когда рассматриваются нестрого выпуклые невырожденные фигуры. По аналогии с плоским случаем расположим данный выпуклый многоугольник некоторым специальным образом. Именно, считаем, что на единичной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ многоугольник P с вершинами c_1, \dots, c_n расположен на полусфере $x \geq 0$, вершина c_1 имеет координаты $(0, 0, 1)$. Для вычислений иногда полезно задавать положение точки на сфере в координатах долготы и широты:

$$x = \sin \phi \sin \psi, \quad y = -\cos \phi \sin \psi, \quad z = \cos \psi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi. \quad (24)$$

Пусть известны длина l_i ребра $c_i c_{i+1}$ и угол θ_i , $0 < \theta_i < \pi$, при вершине c_{i+1} , $1 \leq i \leq n-2$. Будем предполагать, что первая сторона $c_1 c_2$ идет по полуокружности $x = 0$, на которой $\phi = 0$; тогда вершина c_2 имеет координаты $(0, -\sin l_1, \cos l_1)$. Для получения координат остальных вершин поступим следующим образом. Введем новую систему координат $Ox^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$, направив ось $Oz^{(1)}$ по внешней нормали к сфере в точке c_2 , ось $Oy^{(1)}$ — по касательной к дуге $c_1 c_2$ в точке c_2 с ориентацией ее внутрь дуги. Тогда в новой системе координат вершина c_3 имеет координаты $(x_3^{(1)}, y_3^{(1)}, z_3^{(1)}) = (\sin \theta_1 \sin l_2, -\cos \theta_1 \sin l_2, \cos l_2)$, а связь между старыми и новыми координатами будет даваться следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(\theta_0, l_1) \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix} = M^{-1}(\theta_0, l_1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где ортогональная матрица M имеет вид

$$M(\theta_0, l_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \cos l_1 & \sin \theta_0 \sin l_1 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \cos l_1 & -\cos \theta_0 \sin l_1 \\ 0 & \sin l_1 & \cos l_1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

с $\theta_0 = 0$. Аналогично для получения координат вершины c_4 нужно ввести систему координат $Ox^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}$, направив ось $Oz^{(2)}$ по внешней нормали к сфере в точке c_3 , а ось $Oy^{(2)}$ — по внутренне ориентированной касательной к дуге $c_2 c_3$ в точке c_3 . Повторяя такую замену координат, получаем следующее общее правило нахождения координат вершин:

$$c_{m+1}^{(0)} = M(\theta_0, l_1) M(\theta_1, l_2) \dots M(\theta_{m-1}, l_m) c_{m+1}^{(m)}, \quad (26)$$

где $c_{m+1}^{(0)}$ — искомый вектор-столбец из координат вершины c_{m+1} в исходной системе координат $Oxyz$, матрицы $M(\theta_k, l_{k+1})$, $0 \leq k \leq m-1$, задаются формулой вида (25) с соответствующей заменой аргументов, а

$$c_{m+1}^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— координаты вершины c_{m+1} в системе координат $Ox^{(m)}y^{(m)}z^{(m)}$, вводимой аналогично описанным выше системам $Ox^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ и $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$. Формула (26) позволяет записать координаты вершин в любой из систем координат. В частности, для вершин c_1 и c_n в системе $Ox^{(m)}y^{(m)}z^{(m)}$ имеем координаты

$$c_1^{(m)} = M^{-1}(\theta_{m-1}, l_m) \dots M^{-1}(\theta_0, l_1)c_1^{(0)}, \quad (27)$$

$$c_n^{(m)} = M(\theta_m, l_{m+1}) \dots M(\theta_{n-2}, l_{n-1})c_n^{(n-1)}, \quad (28)$$

или

$$c_n^{(m)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & -\sin \theta_m \cos l_{m+1} & \sin \theta_m \sin l_{m+1} \\ \sin \theta_m & \cos \theta_m \cos l_{m+1} & -\cos \theta_m \sin l_{m+1} \\ 0 & \sin l_{m+1} & \cos l_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^{(m+1)} \\ y_n^{(m+1)} \\ z_n^{(m+1)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Из этих формул получаем, что $z_1^{(m)}$ и $z_n^{(m)}$ от θ_m не зависят.

В каждой системе координат $Ox^{(m)}y^{(m)}z^{(m)}$ координата по z любой произвольно взятой точки A сферы равна косинусу расстояния от вершины c_{m+1} до точки A , а это расстояние реализуется длиной дуги меридиана, идущего от c_{m+1} до A . Поэтому согласно вышесказанному расстояния от c_{m+1} до c_1 и c_n не зависят от θ_m и с использованием формул (27) и (28) они допускают явное вычисление через длины сторон и углы θ_i , $1 \leq i \leq m-1$, для $d_{1,m+1}$ и θ_i , $m+1 \leq i \leq n-2$, для $d_{n,m+1}$.

Исследуем зависимость расстояния $d_{1,n}$ между c_1 и c_n от изменения угла θ_m при фиксированных значениях остальных углов θ_i . Пусть $m \neq 1$ и $n-2$. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках c_1, c_{m+1} и c_n . По формуле (1) имеем

$$\cos d_{1,n} = \cos d_{1,m+1} \cos d_{m+1,n} + \sin d_{1,m+1} \sin d_{m+1,n} \cos \alpha_m, \quad (30)$$

где α_m — угол между диагоналями c_1c_{m+1} и $c_{m+1}c_n$, а $d_{i,j}$ здесь и далее везде обозначает расстояние между вершинами c_i и c_j . Расстояния $d_{1,m+1}$ и $d_{m+1,n}$ известны и постоянны, так как они не зависят от θ_m . Угол α_m равен $\pi - \theta_m - \beta_1 - \beta_2$, где β_1 — положительно ориентированный угол в точке c_{m+1} между дугами $c_{m+1}c_1$ и $c_{m+1}c_m$, а β_2 — положительно ориентированный угол между дугами $c_{m+1}c_{m+2}$ и $c_{m+1}c_n$. Дифференцируя (30) по θ_m , получаем

$$-\sin d_{1,n} d'_{1,n} = \sin d_{1,m+1} \sin d_{m+1,n} \sin \alpha_m > 0,$$

откуда после некоторых элементарных преобразований имеем

$$\frac{\partial d_{1,n}}{\partial \theta_m} = \frac{x_n y_{m+1} - x_{m+1} y_n}{\sqrt{1 - z_n^2}} < 0. \quad (31)$$

Если $m = 1$ или $n - 2$, то в предыдущих вычислениях изменится только формула для α_m (при $m = 1$ не будет угла β_1 , а при $m = n - 2$ не будет угла β_2), а окончательный ответ будет таким же, как в (31).

Теперь докажем лемму 2 для многоугольников на сфере, для чего применим индукцию по числу вершин n . При $n = 3$ лемма верна. Пусть она верна для выпуклых многоугольников с $n-1$ вершинами, и пусть нам даны два выпуклых n -угольника Q_1 и Q_2 , удовлетворяющих условиям леммы. Пусть внешние углы многоугольников Q_1 и Q_2 в вершинах с номером i равны соответственно α_i и β_i , $\alpha_i < \beta_i$, $1 \leq i \leq n-2$. Рассмотрим на сфере многоугольники $Q(\theta)$ с внутренними углами θ_i при вершинах c_{i+1} , $1 \leq i \leq n-2$, такими, что

$$0 < \alpha_i \leq \theta_i \leq \beta_i < \pi, \text{ причем } \alpha_i < \beta_i, \ 1 \leq i \leq n-2. \quad (32)$$

Считаем, что все многоугольники расположены так, как описано выше в начале этого пункта: вершины $a_1 \in Q_1$, $b_1 \in Q_2$ и $c_1(\theta) \in Q(\theta)$ совпадают с полюсом $(0, 0, 1)$, а $a_2 \in Q_1$, $b_2 \in Q_2$, $c_2(\theta) \in Q(\theta)$ совпадают с точкой $(0, -\sin l_1, \cos l_1)$. Долгота ϕ вершин выпуклых многоугольников Q_1 и Q_2 в представлении (24) является монотонно растущей функцией от длины ломаной, начинающейся в общей вершине $(0, 0, 1)$. В частности, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ и $\phi_i < \phi_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-1$, для обоих многоугольников. Расстояние $d_{1,n}$ между вершинами c_1 и $c_n(\theta)$ является функцией от $n-2$ переменных $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$, определенной на параллелепипеде Π , заданном неравенствами (32). Выберем в Π путь L с уравнением $\theta_i = t\alpha_i + (1-t)\beta_i$, $0 \leq t \leq 1$. Многоугольник Q_2 строго выпуклый, поэтому при достаточно малых значениях t многоугольники $Q(\theta(t))$ остаются строго выпуклыми. Так как все компоненты вектора $\text{grad } d_{1,n}(\theta)$ по доказанному выше отрицательны, при движении вдоль L от точки $M(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \in \Pi$ к точке $N(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}) \in \Pi$ значение $d_{1,n}$ возрастает, пока многоугольники $Q(\theta(t))$ остаются строго выпуклыми. Пусть это так для всего пути L . Тогда лемма доказана и

$$d_{1,n}(\alpha) - d_{1,n}(\beta) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial d_{1,n}(\theta(t))}{\partial \theta_i} (\alpha_i - \beta_i) dt > 0,$$

где производные $d_{1,n}$ вычисляются по формуле (31). Пусть при некотором $t = t_0$ многоугольник $Q(\theta(t))$ впервые перестал быть строго выпуклым. Так как $Q(\theta(t_0))$ является пределом строго выпуклых многоугольников, он тоже будет выпуклым, но в нестрогом смысле. Это значит, что по крайней мере при одной его вершине внешний угол будет равен нулю. Но путь L проходит внутри параллелепипеда Π , поэтому в вершинах c_2, \dots, c_{n-1} такое невозможно. Значит, внешний угол равен нулю или при вершине c_n , или при вершине c_1 (или при обоих). Пусть он равен нулю в вершине c_n . Тогда вершины c_{n-1}, c_n, c_1 будут располагаться на одной прямой и можно будет применить такое же рассуждение, как в плоском случае. Аналогично рассматривается и второй случай.

9. В п. 6 мы видели, что вопрос о возможности соединения двух изометричных строго выпуклых ломаных изгибанием в том же классе ломаных остался пока открытым ввиду сложности установления связности открытого множества T , на котором заданы все допустимые значения углов θ_i (см. утверждение 1). Мы решим этот вопрос положительно, предварительно доказав следующую теорему, имеющую и самостоятельный интерес.

Теорема 1. Пусть на евклидовой плоскости даны два строго выпуклых изометричных n -угольника с одинаковой ориентацией. Тогда их можно непрерывно продеформировать один в другой в том же классе многоугольников с сохранением длин сторон.

Доказательство⁷⁾. Обозначим через \mathbf{Q} множество всех строго выпуклых n -угольников со сторонами данной длины l_1, \dots, l_n (нумерация циклическая с употреблением индексов по модулю n), имеющих одинаковую ориентацию. Пусть γ_k — внутренний угол при вершине с номером k , являющейся общей вершиной сторон с длинами l_{k-1} и l_k . Тогда для $\sup_{\mathbf{Q}} \gamma_k = \gamma_k^0$ возможны следующие варианты:

⁷⁾ Другое доказательство этого утверждения дано, например, в [12].

1) $\gamma_k^0 = \pi$ с достижением верхней грани для непрерывного семейства нестро- го выпуклых многоугольников (при $l_{k-1} + l_k < l_1 + \dots + l_{k-2} + l_{k+1} + \dots + l_n$, рис. 15а);

2) $\gamma_k^0 = \pi$ с достижением верхней грани только для одного нестро- го выпуклого многоугольника (при $l_{k-1} + l_k = a \equiv l_1 + \dots + l_{k-2} + l_{k+1} + \dots + l_n$, рис. 15б);

3) $\gamma_k^0 < \pi$ с достижением верхней грани только для одного нестро- го выпуклого многоугольника (при $l_{k-1} + l_k > a \equiv l_1 + \dots + l_{k-2} + l_{k+1} + \dots + l_n$, рис. 15с) и со значением $\gamma_k^0 = \arccos \frac{l_{k-1}^2 + l_k^2 - a^2}{2l_{k-1}l_k}$.

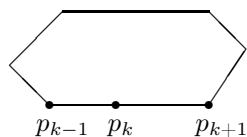


Рис. 15а.

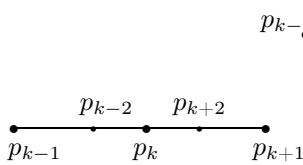


Рис. 15б.

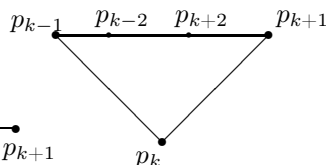


Рис. 15с.

Пусть P и Q — два многоугольника из множества \mathbf{Q} , и пусть их внутренние углы при вершине с номером k равны соответственно α_k и β_k . Допустим, что $\alpha_k < \beta_k$. Покажем, что многоугольник P можно изгибанием в множестве \mathbf{Q} перевести в многоугольник, в котором внутренний угол в вершине с номером k будет равен β_k . В дальнейшем вершины в многоугольнике Q обозначаем через q_i , а в P и его деформациях — через p_i .

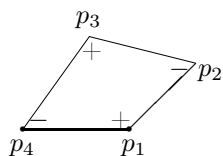


Рис. 16а.

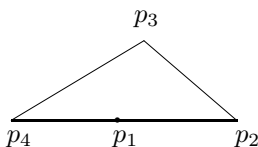


Рис. 16б.

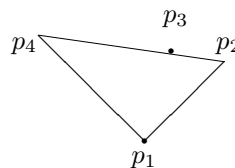


Рис. 16с.

Рассмотрим сначала многоугольники с числом сторон $n = 4$ и будем считать, что рассматриваемая вершина имеет номер $k = 1$. Расположим много- угольник P , как на рис. 16а, т. е. пусть сторона p_4p_1 идет по горизонтальной прямой, а вершины p_2 и p_3 находятся выше. По лемме 1 при возрастании угла в вершине p_1 распределение знаков будет, как на рис. 16а, т. е. углы в p_4 и p_2 убывают, а в p_3 угол возрастает. Пусть сторона p_4p_1 закреплена, а сторона p_1p_2 вращается по часовой стрелке, увеличивая угол в p_1 . Четырехугольник может перестать быть выпуклым только после того, как одна из вершин p_3 или p_1 окажется на диагонали p_2p_4 . Если p_1 окажется на этой диагонали раньше или одновременно с p_3 (рис. 16б), то $\sup_{\mathbf{Q}} \gamma_1 = \pi$; если же на диагонали раньше окажется p_3 (рис. 16с), то $\sup_{\mathbf{Q}} \gamma_1 < \pi$. В любом варианте угол α_1 в вершине p_1 можно сделать сколь угодно близким к $\sup_{\mathbf{Q}} \gamma_1$, поэтому он может сравняться с β_1 при любом данном $\beta_1 < \sup_{\mathbf{Q}} \gamma_1$.

Перейдем теперь к случаю общего n . Снова считаем, что рассматривается угол при вершине с номером $k = 1$. Пусть многоугольник P расположен, как на рис. 17, т. е. сторона $p_n p_1$ идет горизонтально, весь многоугольник находит-

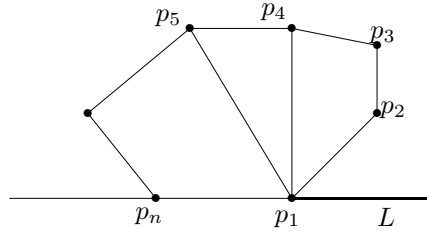


Рис. 17.

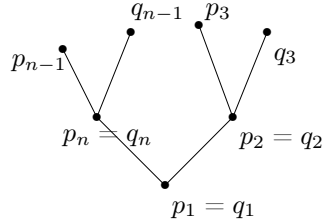


Рис. 18.

ся выше прямой L , определяемой стороной $p_n p_1$, с нумерацией вершин против хода часовой стрелки. Будем увеличивать внутренний угол α_1 при вершине p_1 в несколько приемов. На первом шаге проведем диагональ $p_1 p_4$ и увеличим внутренний угол в p_1 в четырехугольнике $P_4: p_1 p_2 p_3 p_4 p_1$ при фиксированном положении отрезка $p_1 p_4$. Тогда внутренний угол в p_3 будет увеличиваться (как в рассмотренном выше случае $n = 4$), не нарушая сначала выпуклости в целом всего многоугольника P . При вращении стороны $p_1 p_2$ по часовой стрелке или p_2 достигнет прямой L и тогда ясно, что угол α_1 в P при вершине p_1 может принять любое данное значение $\beta_1 < \pi$, или же внутренний угол в p_3 станет равным π с нарушением строгой выпуклости многоугольника P в ходе его изгибаний. В этом случае мы остановим вращение в момент, когда этот угол станет равным $\pi - \varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$ (значение которого можно оценить позже). Пусть диагональ $p_2 p_4$ составит при этом со стороной $p_3 p_4$ угол ε_1 . Легко вычислить, что $\varepsilon_1 \sim c_1 \varepsilon$, $c_1 = \frac{l_2}{l_2 + l_3}$, а $d_{24} = (l_2 + l_3) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Будем продолжать вращать сторону $p_1 p_2$, считая теперь неподвижной диагональ $p_1 p_5$, а длину диагонали $p_2 p_4$ постоянной, т. е. будет происходить изгибание четырехугольника $P_5: p_1 p_2 p_4 p_5 p_1$ с неподвижным отрезком $p_1 p_5$. При этой деформации треугольник $p_2 p_3 p_4$ перемещается как твердое тело, поэтому угол $\pi - \varepsilon$ в вершине p_3 не изменяется. Снова получим, что либо вершина p_2 попадет на прямую L и тогда в ходе вращения стороны $p_1 p_2$ угол α_1 можно сделать равным $\beta_1 < \pi$, либо угол при вершине p_4 в многоугольнике P_5 станет равным π . В последнем случае мы остановим вращение стороны $p_1 p_2$ в момент, когда этот угол стал равным $\pi - \varepsilon - \varepsilon_1$. В этот момент внутренний угол при вершине p_4 в самом многоугольнике P будет равен $\pi - \varepsilon$, т. е. строгая выпуклость многоугольника P сохранится, а угол между диагональю $p_2 p_5$ и стороной $p_5 p_4$ станет равным $\varepsilon_2 \sim c_2(1 + c_1)\varepsilon$, $c_2 = \frac{l_2 + l_3}{l_2 + l_3 + l_4}$, а $d_{25} = (l_2 + l_3 + l_4) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Продолжая такие вращения, получим, что или на каком-то шаге угол α_1 в вершине p_1 при достаточно малом ε станет как угодно близким к π (и тогда его можно сделать равным $\beta_1 < \pi$), или же при сколь угодно малом ε приходим к некоторому строго выпуклому многоугольнику с фиксированным положением стороны $p_1 p_n$ и с суммой внутренних углов $(n - 3)(\pi - \varepsilon) + \alpha_1 + \delta_2 + \delta_n = (n - 2)\pi$, где δ_2 и δ_n — внутренние углы соответственно при вершинах p_2 и p_n , а $d_{2n} = (l_2 + \dots + l_{n-1}) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\alpha_1 + \delta_2 + \delta_n = \pi + (n - 3)\varepsilon \rightarrow \pi$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как всегда $d_{2n} < l_1 + l_n$, имеем $l_1 + l_n \geq (l_2 + \dots + l_{n-1})$. Пусть p_2^0 — предельное положение вершины p_2 при $\varepsilon \rightarrow 0$ (тогда все внутренние углы при вершинах p_3, \dots, p_{n-1} равны π). Если $l_1 + l_n = l_2 + \dots + l_{n-1}$, то треугольник $p_n p_1 p_2^0$ будет вырожденным, ибо $|p_n p_2^0| = \lim d_{2n} = l_n + l_1 = |p_n p_1| + |p_1 p_2^0|$. Это значит, что предельное значение угла α_1 равно π , поэтому при достаточно малом ε этот угол можно сделать равным $\beta_1 < \pi$ в строго выпуклом многоугольнике. Если же $l_1 + l_n > l_2 + \dots + l_{n-1}$, то p_2^0 не может оказаться на прямой L и поэтому отрезки $p_n p_1, p_1 p_2^0, p_2^0 p_n$ образу-

ют невырожденный треугольник, в котором $\alpha_1^0 = \sup_{\mathbf{Q}} \alpha_1$, т. е. в этом случае угол α_1 в P при достаточно малом $\varepsilon > 0$ может принять значение, равное $\beta_1 < \sup_{\mathbf{Q}} \alpha_1$.

Итак, многоугольник P непрерывной деформацией можно перевести в некоторый многоугольник $P_1^{(0)} \in \mathbf{Q}$ с внутренним углом при заданной вершине, равным значению угла в многоугольнике Q в этой же вершине. Покажем, как использовать этот факт для доказательства самой теоремы.

Пусть в многоугольнике $Q \in \mathbf{Q}$, изометричном P , внутренний угол при вершине с номером 1 больше угла при той же вершине в P . По доказанному выше деформируем P в новый многоугольник $P_1^{(0)}$, в котором угол при указанной вершине имеет то же значение, что и в Q . Расположим теперь многоугольники Q и $P_1^{(0)}$ с совмещением их в вершине $p_1 = q_1$ и по сторонам $p_n p_1 = q_n p_1$ и $p_1 p_2 = p_1 q_2$ (рис. 18; по договоренности мы сохраняем за вершинами в многоугольнике $P_1^{(0)}$ те же обозначения, которые они имели в P). Проведем в них общую диагональ $p_n p_2$ и рассмотрим $(n-1)$ -угольники $P_1: p_2 p_3 \dots p_{n-1} p_n p_2$ и $Q_1: p_2 q_3 \dots q_{n-1} p_n p_2$. Пусть эти многоугольники имеют при общей вершине p_2 неравные внутренние углы α_2 и β_2 , и пусть для определенности $\alpha_2 < \beta_2$ (если $\alpha_2 > \beta_2$, мы делаем с Q_1 то же самое, что сейчас будем делать с P_1). Повторим для P_1 предыдущее построение и переведем его в новый многоугольник P'_1 , имеющий в p_2 внутренний угол, равный такому же углу в Q_1 , и те же вершины p_n, p_2 и q_3 . При этом добавление к деформируемому многоугольнику P_1 неподвижного треугольника $p_n p_1 p_2$ в ходе его деформации дает n -угольник, который изометричен P и который все время будет строго выпуклым в целом, так как в нем все внутренние углы остаются меньше π с суммой 2π (или же это можно усмотреть из того, что треугольник $p_n p_1 p_2$ все время остается внутри части плоскости, ограниченной отрезком $p_n p_1$ и лучами, являющимися продолжениями сторон $p_{n-1} p_n$ и $p_3 p_2$). В частности, добавление этого треугольника к P'_1 даст строго выпуклый многоугольник $P_1^{(1)}$. Таким образом, после прихода к равенству углов в вершине p_2 мы получим два изометричных многоугольника Q и $P_1^{(1)}$ с совпадением уже по четырем вершинам p_n, p_1, p_2, p_3 и по трем сторонам. Проведя диагональ $p_3 p_n$, продолжим дальше аналогичное рассмотрение с $(n-2)$ -угольниками $p_3 p_4 \dots p_{n-1} p_n p_3$ и $p_3 q_4 \dots q_{n-1} p_n p_3$, получим строго выпуклый многоугольник $P_1^{(2)}$, совпадающий с Q уже по пяти вершинам и четырем сторонам, и т. д. Таким образом, мы получим две последовательности многоугольников $P_1^{(i)}$ и $Q_1^{(j)}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n-m$ (где m равно числу вершин, в которых внутренние углы в P меньше внутренних углов в Q), такие, что $P_1^{(m)} = Q_1^{(n-m)}$. Прделав в последовательности, скажем, $Q_1^{(j)}$, обратные переходы, получим непрерывный переход от P к Q в классе строго выпуклых многогранников. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В выпуклых многоугольниках с данными длинами сторон для каждого внутреннего угла γ_k существует $\inf_{\mathbf{Q}} \gamma_k$ и аналогично достижимости $\sup_{\mathbf{Q}} \gamma_k$ изгибаниями можно достигнуть и $\inf_{\mathbf{Q}} \gamma_k$. Применяя этот факт, при доказательстве теоремы можно преобразовывать только многоугольники $P_1^{(i)}$ и построить цепочку перехода $P, P_1^{(1)}, \dots, P_1^{(n)} = Q$.

10. Воспользуемся теперь теоремой 1 для доказательства возможности непрерывного изометрического перехода (т. е. изгибания) от одной выпуклой

ломаной к другой в классе строго выпуклых ломаных с монотонным изменением расстояния между концевыми вершинами ломаных. Идея следующая. Пусть нам даны две строго выпуклые ломаные Q_1 и Q_2 с n вершинами, с равными длинами соответствующих сторон и с одинаковой ориентацией⁸⁾. Если ломаные имеют одинаковые расстояния между своими концевыми точками, то, дополняя каждую ломаную до замкнутого выпуклого многоугольника, получаем два изометричных строго выпуклых многоугольника, которые по теореме 1 можно перевести друг в друга изгибанием в классе строго выпуклых многоугольников; это же изгибание даст и изгибание ломаных друг в друга. Пусть расстояния между концевыми вершинами ломаных разные, скажем, расстояние в Q_2 больше расстояния в Q_1 . Мы покажем, что тогда ломаную Q_1 можно непрерывно и изометрично преобразовать в некоторую ломаную Q_3 в классе строго выпуклых ломаных так, чтобы расстояние между концевыми вершинами Q_1 увеличивалось и стало равным соответствующему расстоянию в Q_2 , а затем уже можно применить предыдущее рассуждение и получить совпадение продеформированной ломаной Q_3 с Q_2 .

Итак, пусть нам даны две изометричные строго выпуклые ломаные Q_1 и Q_2 с разными расстояниями между своими концевыми вершинами. Наибольшее возможное расстояние между концевыми точками не превосходит величины $s = l_1 + \dots + l_{n-1}$ и может быть сколь угодно близко к этой сумме. Пусть это расстояние в Q_1 меньше, чем в Q_2 . Расположим ломаную Q_1 , как в лемме 3, и покажем, что ее можно продеформировать так, чтобы расстояние между концевыми точками стало сколь угодно близко к s . Мы докажем это утверждение индукцией по числу сторон. Пусть $n = 4$. Имеем следующие возможности расположения вершин четырехугольника: 1) угол между стороной c_3c_4 (как вектором) и осью Ox не меньше чем $\pi/2$ (рис. 19а); 2) угол между стороной c_3c_4 и осью Ox меньше $\pi/2$, а угол γ не больше чем $\pi/2$ (рис. 19б); 3) угол между стороной c_3c_4 и осью Ox меньше $\pi/2$, а угол γ больше $\pi/2$ (рис. 19с).

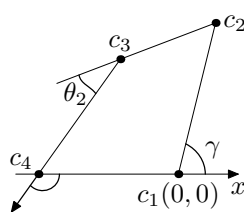


Рис. 19а.

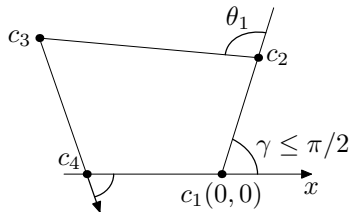


Рис. 19б.

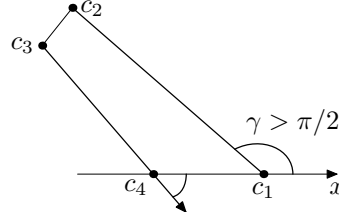


Рис. 19с.

Разберем первый случай (рис. 19а). Мы можем повернуть сторону c_3c_4 вокруг вершины c_3 по часовой стрелке, уменьшая угол θ_2 до некоторого значения ε , сколь угодно близкого к нулю, а затем повернуть всю ломаную вокруг вершины c_1 против часовой стрелки до момента, когда точка c'_4 — новое положение вершины c_4 — не окажется на оси Ox . Это можно делать, конечно, одновременно, уменьшая угол θ_2 и соответственно изменяя (увеличивая) угол γ , вычисляемый по формуле (11). При этих деформациях длина диагонали c_1c_3 не изменяется, поэтому расстояние $|c_1c_4|$, вычисляемое по теореме косинусов из треугольника $c_1c_3c_4$, увеличивается с достижением значения, сколь угодно

⁸⁾Это значит, что при обходе ломаных с вершины с номером 1 до вершины с номером n внешние углы, определяемые в каждой вершине кратчайшим поворотом с продолжения приходящей стороны к исходящей стороне, в обеих ломаных имеют одинаковые знаки.

близкого к $\sqrt{(l_2 + l_3)^2 + l_1^2 - 2l_1(l_2 + l_3) \cos \theta_1}$. Зафиксировав некоторое значение $\varepsilon > 0$ для угла θ_2 , мы затем можем сдвигать вершину c_4 по оси Ox налево, увеличивая расстояние $|c_1c_4|$ и одновременно поворачивая сторону c_1c_2 против часовой стрелки до положения, сколь угодно близкого к моменту превращения четырехугольника $c_1c_2c_3c_4$ в нестрогий выпуклый (рис. 20а). Соответствующее значение γ легко вычисляется и получается, что сторону c_1c_2 можно вращать до значений

$$\gamma < \gamma_0 = \pi - \varepsilon + \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{F^2 - (l_1 + l_2)^2 \sin^2 \varepsilon}}{(l_1 + l_2) \sin \varepsilon},$$

где

$$F^2 = |c_1c_4|^2 = (l_1 + l_2 + l_3)^2 - 4l_3(l_1 + l_2) \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Видно, что при достаточно малых значениях ε расстояние $|c_1c_4|$ становится как угодно близким к своей верхней грани $l_1 + l_2 + l_3$, поэтому мы можем добиться, чтобы в четырехугольнике Q_1 в ходе указанной деформации расстояние $|c_1c_4|$ стало равным соответствующему расстоянию в Q_2 .

Теперь рассмотрим случай 2, рис. 19b. В его условиях имеем

$$\frac{3\pi}{2} < \gamma + \theta_1 + \theta_2 < 2\pi. \quad (33)$$

Вершины c_3 и c_2 находятся по разные стороны от вертикальной прямой $x = x_4$. Повернем две стороны c_4c_3 и c_3c_2 вокруг вершины c_2 по часовой стрелке, оставляя сторону c_1c_2 неподвижной, а после этого опустим сторону c_4c_3 вниз вновь до оси Ox , поворачивая ее по часовой стрелке вокруг вершины c_3 . В ходе указанных вращений произойдет уменьшение углов θ_1 и θ_2 с сохранением, однако, соотношения (33), обеспечивающего выполнение условий леммы 3 и тем самым строгую выпуклость получаемых ломаных. При этом расстояние $|c_1c_4|$ будет монотонно увеличиваться: в первый раз в силу увеличения угла в вершине c_2 треугольника $c_1c_2c_4$ при неизменных длинах $|c_1c_2| = l_1$ и $|c_4c_2|$; во второй раз за счет увеличения угла в вершине c_3 треугольника $c_1c_3c_4$ при неизменных длинах $|c_1c_3|$ и $|c_3c_4| = l_3$ (а можно просто сослаться на лемму 2 при $n = 4$, так как у рассматриваемой ломаной в новом положении внутренние углы больше). Эту деформацию ломаной Q_1 можно делать не в два приема, а одновременно уменьшая углы θ_1 и θ_2 так, чтобы вершина c_4 оставалась на оси Ox . При продолжении деформации наступит момент, когда $\theta_1 + \theta_2 + \gamma = \frac{3\pi}{2}$. Действительно, описанную выше деформацию можно делать до тех пор, пока один из углов θ_1 или θ_2 не станет равным нулю или же y_3 не станет равным l_3 . Вариант, что первым настанет момент $\theta_1 = 0$, невозможен, так как, прежде чем сторона c_2c_3 станет продолжением неподвижной стороны c_1c_2 , имея для вершины c_3 абсциссу $x_3 > 0$, нужно, чтобы абсцисса вершины c_3 прошла со значения $x_3 < x_4 < 0$ через значение $x_3 = x_4 < 0$, а как раз в этот момент мы и имеем $y_3 = l_3$ или $\theta_1 + \theta_2 + \gamma = \frac{3\pi}{2}$. Вариант $\theta_2 = 0$ тоже исключается, так как, пока $x_3 < x_4$, будет $\gamma + \theta_1 + \theta_2 > \frac{3\pi}{2}$, а тогда при $\theta_2 = 0$ имели бы $\gamma + \theta_1 > \frac{3\pi}{2}$, что невозможно при $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$ и $\theta_1 < \pi$. Следовательно, первым наступит момент $y_3 = l_3$, и начиная с этого момента мы будем находиться в условиях рассмотренного ранее случая 1 и можем далее увеличивать значение длины $|c_1c_4|$, приближаясь к ее верхней грани (значение θ_1 , соответствующее критическому моменту $\theta_1 + \theta_2 + \gamma = \frac{3\pi}{2}$, можно вычислить из уравнения $l_1 \sin \gamma + l_2 \sin(\gamma + \theta_1) = l_3$, получаемого из условия $y_3 = l_3$).

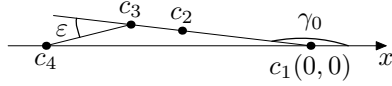


Рис. 20а.

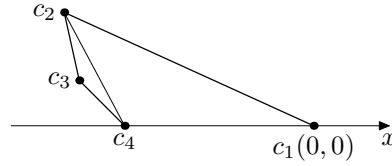


Рис. 20b.

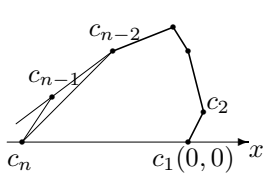


Рис. 21а.

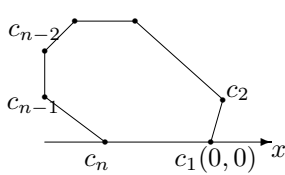


Рис. 21b.

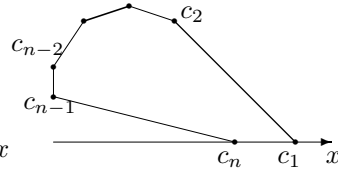


Рис. 21с.

Рассмотрим теперь случай 3, рис. 19с. В этом случае мы сначала повернем всю ломаную вокруг вершины c_1 по часовой стрелке, а затем опустим вниз до оси Ox вершину c_4 поворотом стороны c_4c_3 вокруг вершины c_3 по часовой стрелке. При этом будет происходить уменьшение углов γ и θ_2 с постоянством угла θ_1 и с сохранением неравенства (33), обеспечивающего при $\theta_2 > 0$ строгую выпуклость получаемых ломаных. Если до достижения равенства $y_3 = l_3$ (при котором $\theta_1 + \theta_2 + \gamma = \frac{3\pi}{2}$) или равенства $\theta_2 = 0$ угол γ примет значение, меньшее или равное $\pi/2$, мы тогда сможем применить рассуждения случая 2 и получить требуемый результат. Если же при $\gamma > \pi/2$ и $\theta_2 > 0$ мы достигаем равенство $y_3 = l_3$, то приходим к случаю 1; если же равенство $\theta_2 = 0$ достигается раньше или одновременно с равенством $y_3 = l_3$, то, дойдя до некоторого малого значения $\varepsilon > 0$ угла θ_2 , станем работать дальше с двухзвенной ломаной $c_1c_2c_4$ (рис. 20b), сдвигая вершину c_4 влево вдоль оси Ox . При этом угол γ сначала будет уменьшаться до значения

$$\gamma_0 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{l_1^2 - d_\varepsilon^2}},$$

где $d_\varepsilon = |c_4c_2| < l_1$, а затем γ будет приближаться к π сколь угодно близко в зависимости от малости выбранного значения ε (см. рис. 20b в аналогичном рассуждении). Случай ломаной с четырьмя вершинами полностью рассмотрен.

Для ломаной Q_1 с $n > 4$ вершинами тоже различаем три случая:

- 1) угол между стороной $c_{n-1}c_n$ (как вектором) и осью Ox не меньше чем $\pi/2$ (рис. 21а);
- 2) угол между стороной $c_{n-1}c_n$ и осью Ox меньше $\pi/2$, но $\gamma \leq \pi/2$ (рис. 21b);
- 3) угол между стороной $c_{n-1}c_n$ и осью Ox меньше $\pi/2$, а $\gamma > \pi/2$ (рис. 21с).

В первом случае мы повернем сторону $c_n c_{n-1}$ вокруг вершины c_{n-1} по часовой стрелке, уменьшая угол θ_{n-2} до произвольно малого значения $\varepsilon > 0$ и поворачивая затем всю ломаную вокруг вершины c_1 с тем, чтобы опустить вершину c_n вновь на ось Ox . После этой деформации расстояние $|c_1 c_n|$ увеличится, а дальнейшие рассуждения можно вести для ломаной с вершинами $c_1 \dots c_{n-2} c_n$, в которой сторона $c_{n-2} c_n$ имеет постоянную длину (как сторона треугольника $c_n c_{n-2} c_{n-1}$ с фиксированным внешним углом $\theta_{n-2} = \varepsilon$ при вершине c_{n-1}). По индукционному предположению эту ломаную можно «развернуть» так, чтобы

расстояние между ее концами было как угодно близко к максимально возможной его величине, причем ε можно выбрать столь малым, чтобы строгая выпуклость рассматриваемых $(n - 1)$ -угольников не нарушалась при добавлении к ним треугольника $c_n c_{n-2} c_{n-1}$.

Аналогично в остальных случаях мы проводим те же рассуждения, заменяя либо стороны $c_n c_{n-1}$, $c_{n-1} c_{n-2}$ достаточно близкой к ним диагональю $c_n c_{n-2}$, либо стороны $c_1 c_2$, $c_2 c_3$ достаточно близкой к ним диагональю $c_1 c_3$. Для полученных $(n - 1)$ -угольных ломаных применимо индукционное предположение, а при достаточной близости вышеупомянутых диагоналей к заменяемым ими сторонам добавление выброшенных треугольников не изменяет выпуклости рассматриваемых ломаных.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Любые две строго выпуклые изометричные ломаные можно продеформировать друг в друга изгибанием в классе строго выпуклых ломаных с монотонным (в нестрогом смысле) изменением расстояния между концевыми вершинами ломаных.

Следствие. Область T в кубе $0 < \theta_1 < \pi, \dots, 0 < \theta_{n-2} < \pi$, в которой полагаются точки, соответствующие выпуклым ломаным с данными длинами сторон и с внешними углами $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, является линейно связной.

11. Обратим внимание на то, что при доказательстве теоремы 2 мы во всех случаях использовали на первом шаге преобразование, изменяющее только углы θ_1 и θ_{n-2} или только θ_{n-2} , причем всегда происходило их уменьшение, которое могло быть сделано до сколь угодно малого значения θ_{n-2} .

Это наблюдение приводит нас к той же идее геометрического доказательства леммы 2, которое предложено в [4] и которое сводится к прямому применению индукции без всяких дополнительных вычислений. Начнем со следующего очевидного утверждения.

Утверждение 2. Пусть дана строго выпуклая ломаная с тремя сторонами $c_1 c_2$, $c_2 c_3$, $c_3 c_4$ (рис. 22). Тогда стороны $c_1 c_2$ и $c_3 c_4$ можно повернуть соответственно вокруг вершин c_2 и c_3 так, чтобы в конце поворота поворачиваемые стороны ломаной оказались сколь угодно близкими к прямой, проходящей через неподвижную сторону $c_2 c_3$, и чтобы при этом в ходе деформации ломаная оставалась строго выпуклой с монотонным увеличением внутренних углов при вершинах c_2 и c_3 (и соответственно с монотонным увеличением расстояния между концевыми вершинами c_1 и c_4).

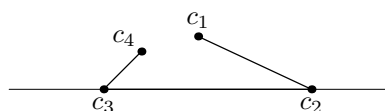


Рис. 22.

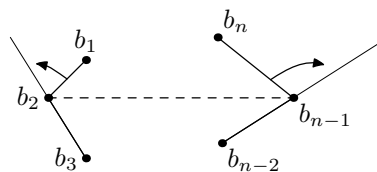


Рис. 23.

С использованием этого утверждения доказательство леммы 2 проводится следующим образом. Рассмотрим в ломаной Q_2 (в которой внутренние углы меньше, чем в Q_1) ломаную $L : b_1 b_2 b_{n-1} b_n$ (рис. 23). Зафиксируем вершины

b_2 и b_{n-1} и применим к ломаной L утверждение 2. Тогда при вращении стороны b_1b_2 вокруг b_2 и стороны $b_{n-1}b_n$ вокруг b_{n-1} с увеличением углов $\angle b_1b_2b_{n-1}$ и $\angle b_2b_{n-1}b_n$ наступит момент, когда один из углов $\angle b_1b_2b_3$ или $\angle b_{n-2}b_{n-1}b_n$ станет равным соответствующему углу в ломаной Q_1 , причем это произойдет до того, как сторона b_2b_1 или $b_{n-1}b_n$ пересечет соответственно луч b_3b_2 или $b_{n-2}b_{n-1}$, и тем самым до этого момента и в этот момент вся ломаная Q_2 будет оставаться строго выпуклой. В ходе такой деформации расстояние d_2 между концевыми вершинами b_1 и b_n ломаной Q_2 монотонно увеличивается, а в положении Q_{new} , когда один из внутренних углов ломаной станет равным соответствующему внутреннему углу в Q_1 , это расстояние d_{new} по индукционному предположению меньше расстояния d_1 в Q_1 и в итоге имеем $d_2 < d_{new} < d_1$, что и требовалось показать.

Аналитически возможность перехода от строго выпуклой ломаной Q_2 к строго выпуклой ломаной Q_{new} может быть получена так. Если $n = 4$, то с использованием результатов п. 5 получаем, что в пересечении любого прямоугольника $P(\phi, \psi)$: $\phi_1 \leq \theta_1 \leq \psi_1$, $\phi_2 \leq \theta_2 \leq \psi_2$ с областью $T \subset \omega_0$ существует путь (на самом деле его можно выбрать как прямолинейный отрезок), ведущий от точки (ψ_1, ψ_2) к одной из сторон $\theta_1 = \phi_1$ или $\theta_2 = \phi_2$ прямоугольника $P(\phi, \psi)$, минуя линии $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$. Проверяется это простым перебором всех возможных строений края области T , лежащего внутри квадрата $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$, с учетом вида кривых $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$ (см. рис. 10 и 11). При $n > 4$ в $(n-2)$ -мерном параллелепипеде ω_0 надо провести двумерную плоскость $\Pi(\psi)$: $\theta_2 = \psi_2, \dots, \theta_{n-3} = \psi_{n-3}$, проходящую через точку $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-3}, \psi_{n-2})$. Пересечения этой плоскости с поверхностями $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$ будут кривыми на плоскости изменения переменных θ_1 и θ_{n-2} , вид которых зависит от соотношений между длинами сторон ломаной и значениями углов $\psi_1, \dots, \psi_{n-2}$. Снова можно убедиться в том, что на плоскости $\Pi(\psi)$ в пределах области

$$B(\theta_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-3}, \theta_{n-2}) > 0, \quad D(\theta_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-3}, \theta_{n-2}) > 0$$

всегда есть путь, ведущий от точки $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-2})$ к прямой $\theta_1 = \phi_1$ или к прямой $\theta_2 = \phi_2$. Но, конечно, приводить здесь эти большие вычисления не имеет смысла.

Итог этого пункта следующий: лемму 2 можно доказать, как и Коши, индукцией по числу сторон, но при этом в общем случае нужно применять деформацию ломаной, изменяющую значения ее двух углов, а не одного, как это было у Коши.

В заключение выражаю благодарность рецензенту, замечания которого позволили, на мой взгляд, существенно улучшить изложение материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cauchy A. L. Sur les polygones et polyèdres, Second mémoire // J. de l'Ecole Polytechnique. 1813. V. 9. P. 87–98.
2. Legendre A.-M. Eléments de géométrie. Première édition. Paris, 1794. Note XII. P. 321–334.
3. Connelly R. Rigidity // Handbook of convex geometry. Amsterdam; London; New York; Tokyo: Elsevier Sci. Publ.; North-Holland, 1993. P. 223–271.
4. Адамар Ж. Элементарная геометрия. М.: Учпедгиз, 1958. Ч. II.
5. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.: ГИТТЛ, 1956.
7. Berger M. Géométrie. Paris: Cédic/Fernand Nathan, 1979. V. 2. (русский перевод: Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 2).

8. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen // Encyklopädie der math. Wiss. Leipzig, 1916. Bd 3. S. 1–139.
9. Steinitz E., Rademacher H. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin: Springer-Verl., 1934.
10. Schoenberg I. J., Zaremba S. K. On Cauchy's lemma concerning convex polygons // Canad. J. Math. 1967. V. 19. P. 1062–1071.
11. Aigner M., Ziegler G. Proofs from THE BOOK. Berlin etc.: Springer-Verl., 1998.
12. Милка А. Д. Что такое геометрия «в целом». М.: Знание, 1986.
13. Сабитов И. Х. Чему равна сумма углов многоугольника // Квант. 2001. № 3. С. 7–12.

Статья поступила 25 декабря 2003 г.

*Сабитов Идждад Хакович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 119992 ГСП-2 Москва
isabitov@mail.ru*