Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517.929

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ НА КОМПАКТЕ

С. М. Добровольский, А. В. Рогозин

Аннотация: Установлен достаточный признак асимптотической устойчивости для систем указанного выше класса, в котором условие на разностную производную функции Ляпунова в силу системы ослаблено по сравнению с условием Ляпунова $\dot{\nu} < 0$. Получены приложения к анализу устойчивости положений равновесия динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Ключевые слова: почти периодичность, устойчивость, компакт.

Введение

Для автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, известен результат Е. А. Барбашина [1], усиливающий теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости: для асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ достаточно существования положительно определенной функции $\nu(x)$ такой, что $\dot{\nu}(x) \leq 0$, при этом поверхности уровня $\nu(x) = \mathrm{const} > 0$ не содержат целых траекторий. В работах [2, 3] замечено, что этот результат распространяется, с естественными видоизменениями в формулировке, на неавтономные системы $\dot{x} = f(x,t)$ при условии, что правая часть системы и функция Ляпунова $\nu(x,t)$ почти периодичны по t (в случае линейных систем речь идет об экспоненциальной устойчивости). Позднее в [4, 5] эти результаты были распространены на системы разностных уравнений

$$x_{n+1} = f_n(x_n), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

(почти периодичность по дискретному времени означает выполнение критерия компактности Бохнера [6]). В выполненных в указанных работах построениях существенно использовалось, что существующая ввиду условия $\dot{\nu} \leq 0$ инвариантная окрестность положения равновесия $x = 0$ — предкомпакт. В работах [7–10], где результаты из [2, 3] распространены на функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего и нейтрального типов, некомпактность единичной сферы в фазовом пространстве компенсировалась компактностью траекторий.

Вопрос о переносе результатов работ [2–5] на случай, когда фазовое пространство динамической системы не является локально компактным, до последнего времени оставался открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00303).

В данной работе предложен подход к решению этой задачи для разностных систем (1) по следующей схеме.

1°. Рассматривается динамическая система (1) с почти периодической по времени правой частью и положением равновесия z_0 на произвольном топологическом компакте и доказывается достаточный признак асимптотической устойчивости указанного выше типа с ослабленным условием на разностную производную функции Ляпунова $\nu_n(x)$ (первую разность):

$$\dot{\nu}_n(x) = \nu_{n+1}(f_n(x)) - \nu_n(x). \tag{2}$$

2°. Исследование устойчивости положения равновесия z_0 динамической системы (1) в произвольном метрическом пространстве проводится в два этапа.

(а) Выполняется надлежаще выбранная компактификация инвариантной окрестности точки z_0, динамическая система (1) и функция Ляпунова $\nu(x)$ продолжаются по непрерывности на построенный топологический компакт.

(б) К расширенной системе применяется результат п. 1°. Асимптотическая устойчивость положения равновесия — образа z_0 — означает для исходной системы асимптотическую устойчивость z_0, равномерную по начальному возмущению: существование окрестности U точки z_0 такой, что для траекторий x_n, начинающихся в этой окрестности ($x_0 \in U$), имеет место сходимость $x_n \to z_0$ равномерно по x_0.

В § 1 реализован п. 1° схемы, в § 2 — п. 2°.

Полученные результаты (как и результаты указанных выше работ) являются новыми и в периодическом случае.

§ 1. Основной результат

Пусть X — произвольное непустое множество, $J = \{\rho_\alpha,\ \alpha \in A\}$ — семейство полуметрик на множестве X, разделяющее его точки. Тогда семейство множеств вида $U_x(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \varepsilon) = \{y \in X \mid \max\limits_{1 \le k \le r} \rho_{\alpha_k}(x, y) < \varepsilon\}$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A$, образует базу некоторой хаусдорфовой топологии на множестве X. В частности, если X — компакт и $\rho_\alpha(x, y) = |\alpha(x) - \alpha(y)|$, $A = C(X)$, где $C(X)$ — множество всех непрерывных вещественнозначных функций на X, то эта топология совпадает с исходной топологией компакта X.

Определим на множестве $X^{\mathbb{Z}}$ всех двусторонних последовательностей $f : \mathbb{Z} \to X$ преобразование сдвига T_m, $m \in \mathbb{Z}$, формулой

$$T_m f_n = f_{n+m}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Семейство полуметрик $\overline{J} = \{\bar{\rho}_\alpha,\ \alpha \in A\}$, где $\bar{\rho}_\alpha(f, g) = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \rho_\alpha(f_n, g_n)$, задает на множестве $X^{\mathbb{Z}}$ хаусдорфову топологию τ, причем сдвиги являются изометриями:

$$\bar{\rho}_\alpha(T_m f, T_m g) = \bar{\rho}_\alpha(f, g), \quad f, g \in X^{\mathbb{Z}},\ \alpha \in A,\ m \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Последовательность $f \in X^{\mathbb{Z}}$ называется *почти периодической*, если семейство $\{T_m f,\ m \in \mathbb{Z}\}$ предкомпактно в топологии τ. Если X — метрическое пространство с метрикой ρ и $J = \{\rho\}$, то это определение эквивалентно в силу теоремы Бохнера классическому определению Бора, использующему понятие ε-почти периода [6]. *Оболочкой* $H[f]$ *почти периодической последовательности* f называется замыкание в топологии τ семейства $\{T_m f,\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма 1. *Пусть $f_1, f_2, g_1, g_2 \in X^{\mathbb{Z}}$ — почти периодические последовательности. Пара (f_1, f_2) является предельной (в топологии произведения $H[f_1] \times H[f_2]$) точкой семейства $\{(T_m g_1, T_m g_2),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$ тогда и только тогда, когда пара (g_1, g_2) является предельной точкой семейства $\{(T_m f_1, T_m f_2),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$.*

Доказательство. Необходимость и достаточность в данном случае представляют собой с точностью до обозначений одно и то же утверждение, поэтому проверим только достаточность. Пусть (f_1, f_2) является предельной точкой семейства $\{(T_m g_1, T_m g_2),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$. Тогда для произвольного $\alpha \in A$ существует возрастающая последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел такая, что $n_{k+1} - n_k \to \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \max\{\bar\rho_\alpha(T_{n_k} g_1, f_1), \bar\rho_\alpha(T_{n_k} g_2, f_2)\} = 0$, поэтому в силу (3) и неравенства треугольника для полуметрики $\bar\rho_\alpha$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \max\{\bar\rho_\alpha(T_{n_{k+1}-n_k} f_1, f_1), \bar\rho_\alpha(T_{n_{k+1}-n_k} f_2, f_2)\} = 0.$$

Из последнего равенства и условий на последовательность $\{n_k\}$ следует, что пара $(T_n f_1, T_n f_2)$ является предельной точкой семейства $\{(T_m f_1, T_m f_2),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Но ввиду (3) пара (g_1, g_2) — предельная точка семейства $\{(T_{-m} f_1, T_{-m} f_2),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$, откуда и вытекает требуемое.

Пусть K — компакт. Рассмотрим в качестве X множество всех непрерывных отображений K в себя, а полуметрики семейства J определим равенством

$$\rho_\alpha(\varphi, \psi) = \max_{x\in K} |\alpha(\varphi(x)) - \alpha(\psi(x))|, \quad \alpha \in C(K).$$

Пусть $f \in X^{\mathbb{Z}}$ — почти периодическая последовательность. Рассмотрим динамическую систему

$$x_{n+1} = g_n(x_n), \tag{4}$$

где $g \in H[f]$. Пусть $x_n(x)$ — траектория системы (4) с начальным условием $x_0 = x$. Определим отображения $G_n : H[f] \times K \to K$ соотношениями

$$G_0(g, x) \equiv x, \quad G_n(g, x) \equiv x_n(x),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Лемма 2. *Отображения G_n непрерывны.*

Доказательство. Для $n = 0$ утверждение леммы очевидно. Сделаем предположение индукции, и пусть $n > 0$. Для произвольной функции $\alpha \in C(X)$ имеем

$$\begin{aligned}
|\alpha(G_n(f,x)) - \alpha(G_n(g,y))| &\leq |\alpha(f_{n-1}(G_{n-1}(f,x))) - \alpha(f_{n-1}(G_{n-1}(g,y)))| \\
&\quad + |\alpha(f_{n-1}(G_{n-1}(g,y))) - \alpha(g_{n-1}(G_{n-1}(g,y)))| \\
&\leq |\alpha(f_{n-1}(G_{n-1}(f,x))) - \alpha(f_{n-1}(G_{n-1}(g,y)))| + \bar\rho_\alpha(f,g).
\end{aligned}$$

Так как композиция $\alpha \circ f_{n-1}$ непрерывна, непрерывность G_n следует из предположения индукции.

Пусть система (1) имеет положение равновесия z_0. Это положение равновесия называется *глобально асимптотически устойчивым*, если $\lim x_n(x) = z_0$, для всех $x \in K$, где $x_n(x)$ — траектория системы (1) с начальным условием $x_0 = x$.

Функция $\nu : K \to \mathbb{R}$ называется *положительно определенной относительно точки* z_0, если $\nu(z_0) = 0$ и $\nu(x) > 0$ для всех $x \in K$, $x \neq z_0$. Последовательность $V : \mathbb{Z} \to C(K)$ называется *положительно определенной в точке* z_0, если $V_n(z_0) = 0$ и $\bar\nu(x) \geq V_n(x) \geq \nu(x)$ для всех $x \in K$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\bar\nu : K \to \mathbb{R}$, $\nu : K \to \mathbb{R}$ — полунепрерывные соответственно сверху и снизу функции, положительно определенные в точке z_0.

Лемма 3. *Пусть $V : \mathbb{Z} \to C(K)$ — положительно определенная в точке z_0 последовательность и $\lim V_n(x_n) = 0$ для некоторой последовательности x_n в K. Тогда $\lim x_n = z_0$.*

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки z_0, тогда полунепрерывная снизу функция ν достигает своего наименьшего значения $\gamma > 0$ на компакте $K \backslash U$. Так как $\lim V_n(x_n) = 0$, для некоторого натурального N и всех $n \geq N$ справедливо неравенство $\nu(x_n) \leq V_n(x_n) < \gamma$, откуда следует справедливость при всех $n \geq N$ включения $x_n \in U$, что и требовалось доказать.

Разностная производная $\dot{V} : \mathbb{Z} \to C(K)$ последовательности $V : \mathbb{Z} \to C(K)$ в силу системы (1) определяется равенством (2) с заменой ν на V, f_n на g_n. Будем говорить, что $\dot{V}$ *неположительно определена*, если $\dot{V}_n(x) \leq 0$ для всех $x \in K$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 4. *Пусть A и B — компакты, x_n, y_n — последовательности в A и B соответственно. Тогда для произвольной предельной точки x последовательности x_n найдется предельная точка y последовательности y_n такая, что пара (x, y) является предельной точкой последовательности (x_n, y_n) в топологии произведения $A \times B$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторой предельной точки x последовательности x_n и произвольной предельной точки y последовательности y_n существует окрестность $V_y = U_{xy} \times U_y$ пары (x, y) такая, что $\mathrm{card}(V_y \cap \{(x_n, y_n)\}) < \infty$ ($\mathrm{card}\, X$ обозначает мощность множества X). Так как множество E предельных точек последовательности y_n — компакт, из его открытого покрытия $\{U_y, y \in E\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{y_k},\ k = 1, \ldots, n\}$. Тогда для окрестности $U_x = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{xy_k}$ точки x имеем $\mathrm{card}(U_x \times B \cap \{(x_n, y_n)\}) < \infty$, откуда следует, что $\mathrm{card}(U_x \cap \{x_n\}) < \infty$; противоречие с выбором точки x.

Теорема 1. *Пусть $f \in X^{\mathbb{Z}}$ — почти периодическая последовательность и система (1) имеет положение равновесия z_0. Пусть существует положительно определенная в точке z_0 последовательность $V : \mathbb{Z} \to C(K)$, разностная производная $\dot{V}$ которой в силу системы (1) неположительно определена. Тогда положение равновесия z_0 является глобально асимптотически устойчивым, если и только если выполнено условие: разностная производная $\dot{V}$ не равна нулю тождественно на каждой траектории системы (1), не совпадающей с положением равновесия z_0.*

Доказательство. Проверим сначала достаточность. Ввиду леммы 3 достаточно проверить равенство $\lim V_n(x_n(x)) = 0$ для произвольной траектории $x_n(x)$ системы (1). Предположим противное, тогда для некоторой траектории $x_n(x)$ системы (1) имеем $\lim V_n(x_n(x)) = c > 0$ (существование предела — следствие монотонности последовательности $V_n(x_n(x))$). Пусть x^* — предельная точка последовательности $x_n(x)$. Тогда по лемме 4 найдется предельная точка $(g, \overline{V})$ семейства $\{(T_m f, T_m V),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$ такая, что $(x^*, g, \overline{V})$ является предельной точкой семейства $\{(x_m(x), T_m f, T_m V),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$. Следовательно, ввиду леммы 2 для каждого фиксированного $k \geq 0$ тройка $(y_k(x^*), T_k g, T_k \overline{V})$, где $y_k(x^*)$ — траектория системы (4) с начальным условием $y_0(x^*) = x^*$, также является предельной точкой семейства $\{(x_m(x), T_m f, T_m V),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$, откуда $\overline{V}_k(y_k(x^*)) \equiv c$. С другой стороны, ввиду леммы 1 (f, V) является предельной точкой семейства $\{(T_m g, T_m \overline{V}),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$. Поэтому по лемме 4 найдется предельная точка $x^{**} \neq z_0$ семейства $\{y_m(x^*),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$ такая, что тройка (x^{**}, f, V) является предельной точкой семейства $\{(y_m(x^*), T_m g, T_m \overline{V}),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$. Следовательно, в силу леммы 2 для траектории $x_k(x^{**})$ системы (1) с начальным условием $x_0(x^{**}) = x^{**}$ имеем: для каждого фиксированного $k \geq 0$ тройка $(x_k(x^{**}), T_k f, T_k V)$ является предельной точкой семейства $\{(y_m(x^*), T_m g, T_m \overline{V}),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0\}$. Отсюда следует равенство $V_k(x_k(x^{**})) \equiv c$ или, что то же самое, $\dot{V}_k(x_k(x^{**})) \equiv 0$, что противоречит условию теоремы, так как $x^{**} \neq z_0$.

Проверим необходимость. Пусть существует траектория $x_n(x)$ системы (1) такая, что $V_k(x_k(x)) \equiv c > 0$. Тогда для любой предельной точки x^* семейства $\{x_n(x),\ n \geq 0\}$ получим $\bar{\nu}(x^*) \geq c > 0$ ввиду полунепрерывности сверху функции $\bar{\nu}$, следовательно, $x^* \neq z_0$. Теорема доказана.

§ 2. Метод функций Ляпунова для почти периодических разностных систем в метрическом пространстве

Пусть $\mathbb{D}$ — метрическое пространство с метрикой ρ. Обозначим через $C(\mathbb{D} \to \mathbb{D})$ пространство равномерно непрерывных отображений из $\mathbb{D}$ в себя с равномерной метрикой d, и пусть $f : \mathbb{Z} \to C(\mathbb{D} \to \mathbb{D})$ — почти периодическая последовательность. Предположим, что система (1) в фазовом пространстве $\mathbb{D}$ имеет положение равновесия z_0. Назовем это положение равновесия *асимптотически устойчивым равномерно относительно начального возмущения*, если существует $r > 0$ такое, что траектория $x_n(x)$ системы (1) с начальным условием $x_0 = x$ сходится к z_0 равномерно относительно x на шаре $B(z_0, r)$.

Отметим, что если $\mathbb{D}$ не является локально компактным, то асимптотически устойчивое положение равновесия системы (1) не обязательно удовлетворяет указанному условию равномерности. Поясним это на простом примере. Пусть в (1) $D = l_2$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $f_n = T$, где T — оператор сдвига:

$$T(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) = (u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots), \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in l_2.$$

Ясно, что точка $0 = (0, \ldots, 0, \ldots)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия этой динамической системы, однако условие равномерности не выполняется.

Пусть ν — равномерно непрерывная на $\mathbb{D}$ положительно определенная в точке z_0 функция, что в случае отсутствия локальной компактности $\mathbb{D}$ означает выполнение условий: $\nu(z_0) = 0$, ν положительна и отделена от 0 на дополнении любой окрестности точки z_0. Пусть производная в силу системы (1) функции ν неположительно определена. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ замкнутая окрестность $U_\varepsilon = \{x \in D \,|\, v\,(x) \leq \varepsilon\}$ точки z_0 является f-инвариантной в том смысле, что для произвольного $x \in U_\varepsilon$ траектория $x_n(x)$ системы (1) с начальным условием $x_0 = x$ целиком лежит в U_ε. Положим

$$U_\varepsilon^0 = U_\varepsilon, \quad U_\varepsilon^{n+1} = f_n\big(U_\varepsilon^n\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Введем условие

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow \sup_{x \in U_\varepsilon^n} \nu(x) \neq \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Обозначим через K пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $CA(U_{\varepsilon_0})$ ограниченных равномерно непрерывных на U_{ε_0} комплекснозначных функций. Напомним (см., например, [11, гл. I]), что точками компакта K

являются мультипликативные функционалы на $CA(U_{\varepsilon_0})$. Отображение, сопоставляющее точке $x \in U_{\varepsilon_0}$ мультипликативный функционал, вычисляющий значение функции из $CA(U_{\varepsilon_0})$ в точке x, является гомеоморфизмом U_{ε_0} на всюду плотное подмножество K, и отображение, сопоставляющее каждой функции из $CA(U_{\varepsilon_0})$ ее непрерывное продолжение на K (преобразование Гельфанда) будет изометрическим изоморфизмом $CA(U_{\varepsilon_0})$ на равномерную алгебру $C(K)$ всех непрерывных на K комплекснозначных функций (теорема Гельфанда — Наймарка).

Теорема 2. *Пусть существует равномерно непрерывная на $\mathbb{D}$ положительно определенная в точке z_0 функция ν, производная которой в силу системы* (1) *неположительно определена. Тогда положение равновесия z_0 системы* (1) *является асимптотически устойчивым равномерно относительно начального возмущения, если и только если выполнено условие* (5).

Доказательство. Опираясь на упомянутые выше конструкции теории коммутативных банаховых алгебр, построим продолжение динамической системы (7) на K, имеющее (при отождествлении U_{ε_0} с соответствующим подмножеством K) то же самое положение равновесия, что и система (1) (глобальная асимптотическая устойчивость этого положения равновесия означает его равномерную по начальному возмущению асимптотическую устойчивость как положения равновесия исходной системы (1)). Последнее вытекает из того очевидного факта, что асимптотическая устойчивость и равномерная по начальному возмущению асимптотическая устойчивость эквивалентны в случае компактного фазового пространства.

Положим для произвольных $y \in K$ и $\varphi \in CA(U_{\varepsilon_0})$

$$F_n(y)(\varphi) = y(\varphi \circ f_n). \tag{6}$$

Легко проверить, что функционал $F_n(y)$ на $CA(U_\varepsilon)$, определяемый равенством (6), является мультипликативным, и тем самым указанное равенство определяет для каждого $n \in \mathbb{Z}$ отображение $F[n] : K \to K$.

Отображение F_n непрерывно. Действительно, так как топология на K определяется семейством полуметрик

$$\{\rho_\varphi \mid \varphi \in CA(U_\varepsilon), \forall y_1, y_2 \in K \;\; \rho_\varphi(y_1, y_2) = |y_1(\varphi) - y_2(\varphi)|\}$$

и так как ввиду равномерной непрерывности отображения f_n справедлива импликация $\varphi \in CA(U_{\varepsilon_0}) \Rightarrow \varphi \circ f_n \in CA(U_{\varepsilon_0})$, непрерывность F_n следует из равенства

$$\begin{aligned}\rho_\varphi(F_n(y_1), F_n(y_2)) = |F_n(y_1)(\varphi) - F_n(y_2)(\varphi)|\\ = |y_1(\varphi \circ f_n) - y_2(\varphi \circ f_n)| = \rho_{\varphi \circ f_n}(y_1, y_2),\end{aligned}$$

верного для всех $\varphi \in CA(U_{\varepsilon_0})$, $y_1, y_2 \in K$.

Пусть $C(K \to K)$ — пространство непрерывных отображений K в себя с топологией, заданной семейством полуметрик

$$\{d_\varphi \mid d_\varphi(F, G) = \sup_{y \in K} |\Gamma\varphi \circ F(y) - \Gamma\varphi \circ G(y)|, \varphi \in C(D),\; F, G \in C(K \to K)\},$$

где $\Gamma\varphi$ — преобразование Гельфанда функции φ.

Последовательность $F : \mathbb{Z} \to C(K \to K)$ почти периодична. Действительно, равенство (6) определяет отображение $\Lambda : C(\mathbb{D} \to \mathbb{D})^{\mathbb{Z}} \to C(K \to K)^{\mathbb{Z}}$, перестановочное со сдвигами, которое непрерывно ввиду справедливости следующих соотношений:

$$d_\varphi(\Lambda(f)_n, \Lambda(g)_n) = \sup_{y\in K} |\Gamma\varphi \circ \Lambda(f)_n(y) - \Gamma\varphi \circ \Lambda(g)_n(y)|$$
$$= \sup_{y\in K} |y(\varphi \circ f_n) - y(\varphi \circ g_n)| \le \|\varphi \circ f_n - \varphi \circ g_n)\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ обозначает норму в $C(K)$, и того факта, что правая часть последнего неравенства равномерно по n сходится к 0 при $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} d(f_n, g_n) \to 0$. Так как непрерывный образ компакта — компакт, требуемое немедленно следует из определения почти периодической последовательности.

Рассмотрим динамическую систему

$$y_{n+1} = F_n(y_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

в фазовом пространстве K.

Если $V = \Gamma\nu$ — преобразование Гельфанда функции ν: $V(y) = y(\nu)$, то V положительно определена в точке z_0 и ее разностная производная в силу системы (7) неположительно определена, если соответствующими свойствами обладает функция ν. Действительно, пусть $y \ne z_0$. Так как y является предельной точкой дополнения в U_{ε_0} окрестности точки z_0, отделяющей z_0 от y, то $V(y)$ — предельная точка значений функции ν на этом дополнении, откуда следует, что $V(y) > 0$. Аналогично проверяется неположительная определенность $\dot{V}$.

Пусть выполнено условие (5) и $y \ne z_0$. Выбирая $\varepsilon = V(X)$, получим ввиду неположительной определенности разностной производной $\dot{V}$ в силу системы (7) $V(y_n(y)) \le \sup\limits_{x\in U_\varepsilon^n} \nu(x) < \varepsilon$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $V(y_n(y)) \ne$ const.

Если условие (5) не выполнено, то $\sup\limits_{x\in U_\varepsilon^n} \nu(x) \equiv c > 0$ для некоторого $\varepsilon_0 \ge \varepsilon > 0$ и, следовательно, существует последовательность $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, из U_ε такая, что $\nu(x_k(x^{(k)}) \to c$ при $k \to \infty$. Если y — предельная в K точка последовательности $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, то $V(y_n(y))$ при каждом фиксированном $n = 0, 1, \ldots$ является предельной точкой для множества $\{\nu(x_n(x^{(k)}))$, $k = 0, 1, \ldots\}$. Так как $\nu(x_n(x^{(k)})) \ge \nu(x_k(x^{(k)}))$, $k = n, n+1, \ldots$, то $\nu(y_n(y)) \ge c$. Но $\sup\limits_{x\in U_\varepsilon^0} \nu(x) = c$, поэтому $V(y) \le c$, откуда следует $V(y_n(y)) \equiv c$. Таким образом, установлена эквивалентность условия (5) и условия $V(y_n(y)) \ne$ const для произвольного $y \ne z_0$. Ссылка на теорему 1 заканчивает доказательство.

Отметим, что условие почти периодичности последовательности f_n существенно. Действительно, рассмотрим в качестве $\mathbb{D}$ произвольное линейное нормированное пространство, отображения f_n определим формулой $f_n(x) = \lambda_n x$, где $\lambda_n = 1 - 3^{-n-1}$, $n = 0, 1, \ldots$. В качестве функции Ляпунова выберем норму в $\mathbb{D}$. Легко видеть, что все условия теоремы 2, за исключением требования почти периодичности последовательности f_n, выполнены, однако нулевое положение равновесия не является асимптотически устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

2. *Добровольский С. М., Котюргина А. С., Романовский Р. К.* Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 6. С. 10–14.

3. *Добровольский С. М., Романовский Р. К.* Метод функций Ляпунова для почти периодических систем // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 151–153.

4. *Кириченова О. В., Котюргина А. С., Романовский Р. К.* Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 170–174.

5. *Кириченова О. В.* Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 45–48.

6. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995.

7. *Алексенко Н. В.* Устойчивость решений почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 3–6.

8. *Алексенко Н. В., Романовский Р. К.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. С. 147–153.

9. *Романовский Р. К., Троценко Г. А.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.

10. *Троценко Г. А.* Об устойчивости решений почти периодической системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6. С. 77–81.

11. *Гамелин Т. В.* Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 27 октября 2003 г.

Добровольский Сергей Михайлович
Омский гос. университет, кафедра математического анализа,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
dobrovsm@omsu.ru

Рогозин Андрей Владимирович
Омский гос. технический университет, кафедра высшей математики,
пр. Мира, 11, Омск 644050
andimir@mail.ru