Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.98

ДИАМЕТРАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВ СТРУЙ УИТНИ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ТОЧЕК

А. П. Гончаров, М. Зеки

Аннотация: Вычислена диаметральная размерность пространств струй Уитни на сходящихся последовательностях точек.

Ключевые слова: диаметральная размерность, функция Уитни.

1. Введение

Рассмотрим линейную топологическую структуру пространств следов C^∞-функций, заданных на сходящихся последовательностях точек. Мы вычислим диаметральную размерность этих пространств и укажем континуум попарно не изоморфных пространств для случая так называемых разреженных (sparse) последовательностей. Диаметральная размерность пространств струй Уитни, определенных на густых (thick) последовательностях (при некоторых условиях регулярности), та же, что и для пространства s быстро убывающих последовательностей.

Наш интерес к пространствам струй Уитни на компактных множествах такого типа вызван следующими причинами. Во-первых, до сих пор нет конкретного примера ядерного пространства Фреше функций, не имеющего топологического базиса. Пространство вещественных аналитических функций, как доказано в [1], не имеет базиса, но оно неметризуемо. В нашем случае не применим метод построения базиса для пространства функций Уитни на сходящейся последовательности интервалов [2] или на острие [3]. С другой стороны, проблема первичности для исследуемых пространств открыта. (Пространство X *первично*, если из представления $X = Y \oplus Z$ вытекает, что либо Y, либо Z изоморфно X.) Наши пространства занимают в некотором смысле промежуточное место между непервичными ядерными пространствами Фреше с непрерывными нормами (см. [4]) и первичным пространством $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Следует отметить, что диаметральная размерность не может быть применена для различения пространства струй Уитни, заданных на компактных множествах с непустой внутренностью. В самом деле, эти пространства содержат подпространство, изоморфное пространству s, так что их диаметральная размерность не больше чем диаметральная размерность s [5, предложение 7]. Однако, как показал Б. С. Митягин [5], пространство s имеет наименьшую диаметральную размерность в классе ядерных пространств Фреше.

Вычисление диаметральной размерности для пространств функций Уитни, определенных на канторовского типа множествах, дано в [6].

2. Предварительные сведения

Для компактного множества K на прямой через $\mathscr{E}(K)$ будем обозначать пространство последовательностей $(f^{(j)}(x))_{j=0}^{\infty}$, $x \in K$, таких, что существует продолжение $F \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ со свойством $F^{(j)}(x) = f^{(j)}(x)$ при $j \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ и $x \in K$. Пространство $\mathscr{E}(K)$ можно отождествить с фактор-пространством $C^{\infty}(I)/Z$, где I — интервал, содержащий K (пусть $I = [0,1]$) и $Z = \{F \in C^{\infty}(I) : F^{(j)}|_K \equiv 0,\, j \in \mathbb{N}_0\}$. По теореме Уитни [7] фактор-топология может быть задана полунормами

$$\|f\|_p = |f|_p + \sup\big\{\big|\big(R_y^p f\big)^{(i)}(x)\big| \cdot |x-y|^{i-p} : x, y \in K,\ x \neq y,\ 0 \le i \le p\big\},$$

где $|f|_p = \sup\{|f^{(i)}(x)| : x \in K,\ 0 \le i \le p\}$ и

$$R_y^p f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(y) \frac{(x-y)^k}{k!}$$

— p-й остаток в формуле Тейлора, $p \in \mathbb{N}_0$.

Положим $U_p = \{f \in \mathscr{E}(K) : \|f\|_p \le 1\}$.

Говорят, что пространство Фреше X *имеет непрерывную норму*, если одна из его полунорм является нормой. Аналогично X не имеет непрерывной нормы, если каждая его окрестность содержит прямую.

Для всякой последовательности $(b_k)_0^{\infty}$ найдется функция $F \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ такая, что $F^{(k)}(0) = b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ (задача Бореля). Таким образом, $\mathscr{E}(\{a\})$ изоморфно ω для любого одноточечного множества $\{a\}$.

Говорят, что компактное множество $K \subset \mathbb{R}^m$ *C^{∞}-определяющее*, если для любой C^{∞}-продолжимой функции f на K такой, что $f|_K = 0$, будет $f^{(j)}|_K = 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_0^m$.

В одномерном случае имеем следующее очевидное

Предложение 1. *Для компактного множества K на прямой эквивалентны следующие утверждения:*

(i) *K совершенно,*

(ii) *K является C^{∞}-определяющим,*

(iii) *$\mathscr{E}(K)$ имеет непрерывную норму,*

(iv) *$\mathscr{E}(K)$ не имеет дополняемого подпространства, изоморфного ω.*

Сосредоточим внимание на следующем модельном случае компактных множеств:

$$K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \quad \text{при } a_n \searrow 0.$$

Поперечник Колмогорова порядка n множества U_q относительно U_p (см. [8]) можно задать равенством

$$d_n(U_q, U_p) = \inf_{L \in \mathscr{L}_n} \inf\{\delta : U_q \subset \delta U_p + L\},$$

где инфимум берется по всем n-мерным подпространствам в $\mathscr{E}(K)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Диаметральная размерность $X = \mathscr{E}(K)$ задается следующим образом ([9], см. также [5]):

$$\Gamma(X) = \{\gamma = (\gamma_n) : \forall p\, \exists q\ \gamma_n \cdot d_n(U_q, U_p) \to 0 \text{ при } n \to \infty\}.$$

Рассмотрим считающую функцию, соответствующую диаметральной размерности

$$\beta(t) = \beta(t, U_p, U_q) := \min\{\dim L : tU_q \subset U_p + L\}, \quad t > 0.$$

Можно показать, что $\beta(t) = \left|\left\{n : d_n(U_q, U_p) > \frac{1}{t}\right\}\right|$, где $|A|$ — мощность множества A.

Так как $\mathscr{E}(K)$ — пространство Шварца, $\beta(t, U_p, U_q)$ принимает конечные значения для достаточно далеких p и q. Следующее известное предложение дает прямое соотношение между $\Gamma(X)$ и $\beta(t)$.

Предложение 2. $(\gamma_n) \in \Gamma(X) \Leftrightarrow \forall p\, \exists q\, \forall C\, \exists n_0\ \beta(C\gamma_n, U_p, U_q) \le n,\ n \ge n_0$.

Предложение 3. *Пространства Фреше X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$\forall p_1\, \exists p\, \forall q\, \exists q_1, C \quad \beta^{(Y)}(t, V_{p_1}, V_{q_1}) \le \beta^{(X)}(Ct, U_p, U_q), \quad t > 0.$$

Здесь $(U_p)_{p=1}^{\infty}$, $(V_p)_{p=1}^{\infty}$ суть базы окрестностей пространств X и Y соответственно.

Для нижней границы поперечников Колмогорова в локально выпуклом пространстве с непрерывной нормой можно использовать следующее замечание В. М. Тихомирова (см. [10] или [5, предложение 6]).

Предложение 4. *Пусть U — абсолютно выпуклое множество в линейном пространстве X и V — подмножество в X. Если $\alpha U \cap L_{n+1} \subset V \cap L_{n+1}$ для некоторого $(n+1)$-мерного подпространства L_{n+1} в X и для $\alpha > 0$, то $d_n(V, U) \ge \alpha$.*

Мы должны модифицировать это предложение для случая пространств без непрерывной нормы. В самом деле, если $X = \omega$ с $\|x\|_p = \max\limits_{k \le p} |x_k|$, $p < q < r$ и $L = \operatorname{span}(e_k)_{k=r}^{r+n}$, то, очевидно, $U_p \cap L \subset U_q \cap L$, но тем не менее $d_n(U_q, U_p) = 0$ для $n \ge p$.

Данный пример объясняется невозможностью применения в этом случае теоремы Рисса (см., например, [11, с. 84]), существенной для доказательства предложения 4.

Пусть X — локально выпуклое пространство и U — окрестность нуля в X. Пусть $Z_U = \{x \in X : \|x\|_U = 0\}$. Здесь $\|\cdot\|_U$ — калибровочная функция U. Пусть X_U — пополнение X/Z_U по норме $\|\cdot\|_U$, $\pi_U : X \to X_U : x \to \{x + Z_U\}$.

Предложение 5. *Для множества V если $\alpha\pi_U(U) \cap M_{n+1} \subset \pi_U(V) \cap M_{n+1}$ для некоторого $(n+1)$-мерного подпространства M_{n+1} в X_U и для $\alpha > 0$, то $d_n(V, U) \ge \alpha$.*

Доказательство. По предыдущему предложению $d_n^{(X_U)}(\pi(V), \pi(U)) \ge \alpha$. С другой стороны, для любого линейного оператора T имеем $d_n(TV, TU) \le d_n(V, U)$ (см., например, [5]), что завершает доказательство.

Следствие 1. *Имеет место неравенство*

$$\beta(t, U_p, U_q) \ge \sup\{\dim M : 2\pi_{U_p}(U_p) \cap M \subset t\pi_{U_p}(U_q)\},$$

где супремум берется по всем конечномерным подпространствам M в X_{U_p}.

Действительно, пусть подпространство M с $\dim M = n + 1$ удовлетворяет включению из условия. Тогда $d_n(U_q, U_p) \ge \frac{2}{t}$, и так как последовательность (d_n) неубывающая, имеем

$$\beta(t, U_p, U_q) \ge |\{k : d_k(U_q, U_p) \ge 2/t\}| \ge |\{0, 1, 2, \ldots, n\}| = \dim M.$$

Те же рассуждения можно повторить для всякого абсолютно выпуклого множества U в линейном пространстве X и для множества V в линейной оболочке множества U.

3. Считающая функция β для разреженных последовательностей

Будем говорить, что последовательность (a_n) с $a_n \searrow 0$ *разреженная*, если существует $Q \geq 1$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$a_n - a_{n+1} \geq a_n^Q. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть* $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$ *задается разреженной последовательностью с соответствующей константой* Q. *Тогда для считающей функции, соответствующей диаметральной размерности пространства* $\mathscr{E}(K)$, *и для* $q > p > 0$ *с* $q - Qp > 0$ *имеют место неравенства*

$$N_2 \leq \beta(t, U_p, U_q) \leq (q+1)N_1, \quad t \geq 4,$$

с $N_1 = \min\bigl\{n : a_n^{q-Qp} \leq \frac{1}{8t}\bigr\}$, $N_2 = \max\bigl\{n : (a_k - a_{k+1})^{q-p} \geq \frac{8}{t}\ \forall k \leq n\bigr\}$.

Доказательство. Из определения β видим, что $\beta(t) \leq \dim L$ для любого подпространства L, удовлетворяющего включению $tU_q \subset U_p + L$. Выберем подходящее подпространство L. Рассмотрим следующие функции:

$$H_j(x) = \begin{cases} \frac{x^j}{j!}, & \text{если } x \in [0, a_{N_1}] \cap K, \\ 0 & \text{для других точек из } K \end{cases}$$

и

$$h_{nj}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a_n)^j}{j!}, & \text{если } x = a_n \in K, \\ 0 & \text{для других точек из } K, \end{cases}$$

и определим

$$L = \operatorname{span}\{H_j \cup h_{nj} : n = 1, \dots, N_1 - 1;\ j = 0, \dots, q\}.$$

Тогда $\dim L = N_1(q+1)$.

Для $f \in U_q$ возьмем $g \in L$ следующего вида:

$$g = \sum_{j=0}^{q} f^{(j)}(0) H_j + \sum_{k=1}^{N_1 - 1} \sum_{j=0}^{q} f^{(j)}(a_k) h_{kj}.$$

Покажем, что $\|f - g\|_p \leq \frac{1}{t}$.

Заметим, что $|f - g|_p \leq \frac{1}{2t}$. Действительно, если $x > a_{N_1}$, то $f^{(i)}(x) = g^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \dots, p$. С другой стороны, для $x \leq a_{N_1}$ имеем $f(x) - g(x) = R_0^q f(x)$ и

$$\bigl|R_0^q f(x)\bigr|_p \leq \|f\|_q x^{q-p} \leq a_{N_1}^{q-p} \leq \frac{1}{2t}$$

ввиду выбора N_1.

Для оценки

$$b_{ip} := \left|\bigl(R_y^p(f-g)\bigr)^{(i)}(x)\right| \cdot |x - y|^{i-p}, \quad x, y \in K,\ x \neq y,\ i = 0, 1, 2, \dots, p,$$

рассмотрим все возможности расположения точек x, y в K.

Если $x, y > a_{N_1}$, то, очевидно, $b_{ip} = 0$.

Если $x, y \le a_{N_1}$, то $(f-g)(x) = R_0^q f(x)$. Здесь

$$R_y^p\big(R_0^q f\big)(x) = R_y^q\big(R_0^q f\big)(x) + \sum_{k=p+1}^{q} \big(R_0^q f\big)^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}.$$

Легко видеть, что первый член в правой части равен $R_y^q f(x)$. Поэтому

$$\big(R_y^p(f-g)\big)^{(i)}(x) = \big(R_y^q f\big)^{(i)}(x) + \sum_{k=p+1}^{q} \big(R_0^q f\big)^{(k)}(y)\frac{(x-y)^{k-i}}{(k-i)!}$$

и

$$b_{ip} \le \|f\|_q |x-y|^{q-p} + \|f\|_q \sum_{k=p+1}^{q} \frac{y^{q-k}|x-y|^{k-p}}{(k-i)!}.$$

Так как $f \in U_q$ и $y^{q-k}|x-y|^{k-p} < a_{N_1}^{q-p}$, имеем

$$b_{ip} \le a_{N_1}^{q-p}(1+e) \le \frac{1}{2t}.$$

Если $y \le a_{N_1} < x$, то

$$f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x) = 0, \quad f^{(k)}(y) - g^{(k)}(y) = \big(R_0^q f\big)^{(k)}(y) \text{ для } k = i, i+1, \dots, p.$$

Тем самым

$$R_y^p(f-g)(x) = -\sum_{k=0}^{p} \big(R_0^q f\big)^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}$$

и

$$b_{ip} \le \|f\|_q \sum_{k=i}^{p} y^{q-k}\frac{(x-y)^{k-p}}{(k-i)!}.$$

Здесь $x - y \ge a_{N_1}^Q$ ввиду (1). Отсюда в силу выбора N_1 получаем

$$b_{ip} \le \sum_{k=i}^{p} \frac{a_{N_1}^{q-k+Q(k-p)}}{(k-i)!} \le a_{N_1}^{q-Qp} e \le \frac{1}{2t}.$$

Случай $x \le a_{N_1} < y$ рассматривается аналогично.

Итак, $\|f-g\|_p \le \frac{1}{t}$, $U_q \subset \frac{1}{t}U_p + L$ и $\beta(t, U_p, U_q) \le (q+1)N_1$.

Для получения нижней границы β используем следствие 1. В нашем случае X_{U_p} — банахово пространство $\mathscr{E}^p(K)$ струй Уитни порядка p с нормой $\|\cdot\|_p$. Пусть $M = \operatorname{span}\{\pi_{U_p}(h_{np}),\ n = 1, 2, \dots, N_2\}$. Покажем, что

$$2\pi_{U_p}(U_p) \cap M \subset t\pi_{U_p}(U_q). \tag{2}$$

Любой элемент F из левой части имеет вид $F = \pi_{U_p}(f)$, где все компоненты струи f нулевые, кроме, возможно, $f^{(p)}(a_k) = \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, N_2$. Так как $f \in 2U_p$, имеем $|\alpha_k| \le 2$. Для доказательства (2) достаточно показать, что $\|f\|_q \le t$. Очевидно, $|f|_q \le |\alpha_k| \le \frac{t}{2}$.

Оценим $b_{iq} := \big|\big(R_y^q f\big)^{(i)}(x)\big| \cdot |x-y|^{i-q}$ с $x \ne y; x, y \in K$, $i \le q$. Все члены в $\big(R_y^q f\big)^{(i)}(x)$ нулевые, кроме, возможно, $f^{(p)}(x)$, $f^{(p)}(y)$, если $x, y \ge a_{N_2}$. Если $i = p$, то $b_{pq} = |f^{(p)}(x) - f^{(p)}(y)| \cdot |x-y|^{p-q}$. Если $i < p$, то

$$b_{iq} = |f^{(p)}(y)|\frac{|x-y|^{p-i}}{(p-i)!}|x-y|^{i-q}.$$

В обоих случаях $b_{iq} \leq 2|f|_p|x-y|^{p-q} \leq 4|x-y|^{p-q}$. По крайней мере одно из x или y не меньше чем a_{N_2}, ибо иначе тейлоровский остаток нулевой. Поэтому

$$|x-y| \geq \min_{k\leq N_2}(a_k - a_{k+1}) \geq (8/t)^{\frac{1}{q-p}}$$

по выбору N_2. Отсюда получаем $b_{iq} \leq \frac{t}{2}$ и приходим к соотношению (2). Итак, $\beta(t) \geq \dim M = N_2$.

4. Геометрическое условие

Наша следующая цель — дать необходимое условие изоморфизма $\mathscr{E}(K_a) \simeq \mathscr{E}(K_b)$ в терминах свойств последовательностей (a_n), (b_n). Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — разреженная последовательность такая, что $a_n = \varphi(n)$ для дифференцируемой монотонной функции $\varphi : \mathbb{R}_+ \to (0,1]$. Для упрощения оценки N_2 предположим, что φ выпуклая. Обозначим через Φ функцию, обратную к φ, и через Φ_1 — обратную к $-\varphi'$. Пусть функции ψ, $\Psi = \psi_{-1}$, $\Psi_1 = (-\psi')_{-1}$ соответствуют разреженной последовательности (b_n). Будем говорить, что последовательности (a_n) и (b_n) *эквивалентны*, если для любого q существуют ε, C и x_0 такие, что для $x > x_0$ выполнено неравенство

$$-\psi'(2qx) \leq C\varphi^{\varepsilon}(x) \tag{3}$$

и аналогичное условие выполнено, если поменять местами φ и ψ.

Будем обозначать через β_a, β_b считающие функции, соответствующие пространствам $\mathscr{E}(K_a)$, $\mathscr{E}(K_b)$.

Для $p < q$ и большого t положим $\rho = (\frac{8}{t})^{\frac{1}{q-p}}$. По определению N_2 получаем $a_{N_2+1} - a_{N_2+2} < \rho \leq a_{N_2} - a_{N_2+1}$. По теореме о среднем значении имеем $-\varphi'(\xi) < \rho$ с $N_2+1 < \xi < N_2+2$. Поэтому $-\varphi'(N_2+2) < \rho$ и $N_2+2 > \Phi_1(\rho)$. Теорема 1 показывает теперь, что $\Phi_1(\rho) - 2 < \beta_a(t, U_p, U_q)$. Таким же путем для $\rho_1 = (8t)^{-\frac{1}{q-Qp}}$ получаем, что

$$\beta_a(t, U_p, U_q) < (q+1)[\Phi(\rho_1) + 1]. \tag{4}$$

Применяя предложение 3, выводим, что из изоморфизма $\mathscr{E}(K_a) \simeq \mathscr{E}(K_b)$ вытекает условие

$$\forall p_1\, \exists p\, \forall q\, \exists q_1\, \exists C, t_0 \quad \Psi_1((8/t)^{\frac{1}{q_1-p_1}}) < (q+1)\Phi((Ct)^{\frac{-1}{q-Qp}}) + q + 3, \ t > t_0.$$

Правая часть неравенства может быть заменена на $2q\Phi(\cdot)$, так как $\Phi \uparrow \infty$, когда ее аргумент стремится к 0. Обозначим теперь $\frac{1}{2q}\Psi_1((8/t)^{\frac{1}{q_1-p_1}})$ через x. Тогда $8/t = (-\psi'(2qx))^{q_1-p_1}$ и $x < \Phi\big(\frac{1}{C}(-\psi'(2qx))^M\big)$ с $M = \frac{q_1-p_1}{q-Qp}$ и некоторой константой C. Отсюда, очевидно, вытекает (3).

Тем самым доказано следующее геометрическое необходимое условие изоморфизма.

Теорема 2. *Если пространства $\mathscr{E}(K_a)$, $\mathscr{E}(K_b)$ изоморфны, то последовательности (a_n), (b_n) эквивалентны.*

Вопрос. Будет ли эквивалентность разреженных последовательностей, обладающих всеми свойствами регулярности, также и достаточным условием изоморфности соответствующих пространств?

5. Примеры неизоморфных пространств

Применим предложение 2 для описания диаметральной размерности $\Gamma(\mathscr{E}(K_a))$ для компактного множества K_a, удовлетворяющего всем условиям предыдущего раздела.

Предложение 6. *Имеют место включения* $\big\{(\gamma_n) : \forall p\, \exists q\ \gamma_n \varphi^{q-Qp}(\frac{n}{2q}) \to 0$ *при* $n \uparrow \infty\big\} \subset \Gamma(\mathscr{E}(K_a)) \subset \{(\gamma_n) : \forall p\, \exists q\ \gamma_n(-\varphi'(n+2))^{q-p} \to 0$ *при* $n \uparrow \infty\}$.

Докажем первое вложение, так как рассуждения для доказательства второго такие же. Если

$$\forall p\, \exists q\, \forall C\, \exists n_0 \quad C\gamma_n \varphi^{q-Qp}(n/2q) < 1,\ n \geq n_0,$$

то $\frac{n}{2q} > \Phi((C\gamma_n)^{-\frac{1}{q-Qp}})$ и

$$n > (q+1)[\Phi((C\gamma_n)^{-\frac{1}{q-Qp}}) + 1] > \beta(C\gamma_n/8, U_p, U_q)$$

ввиду (4). Поэтому согласно предложению 2 $(\gamma_n) \in \Gamma(\mathscr{E}(K_a))$.

Условие (1) имеет вид

$$\exists Q \geq 1,\ t_0 \quad \varphi^Q(t) \leq -\varphi'(t), \quad t > t_0.$$

Если, кроме того, функция φ удовлетворяет следующему ограничению:

$$\exists C \geq 1,\ t_1 \quad \varphi^C(t) \leq \varphi(2t), \quad t > t_1,$$

то, как легко проверить,

$$\Gamma(\mathscr{E}(K_a)) = \{(\gamma_n) : \exists M\ \gamma_n \cdot \varphi^M(n) \to 0 \text{ при } n \uparrow \infty\}.$$

Следовательно, пространство струй Уитни на последовательности (n^{-1}) имеет ту же диаметральную размерность, что и пространство s быстро убывающих последовательностей, в то время как в случае $a_n = e^{-n}$ получаем класс Γ, как для случая пространства целых функций.

Укажем пример континуума попарно не изоморфных пространств $\mathscr{E}(K_{a_\lambda})$. Семейство функций $\varphi_\lambda(t) = \exp(-\ln^\lambda(t))$, $t \geq 1$, с параметром $\lambda \geq 1$ (ср. с [12]) дает нужный пример. Действительно, соответствующая последовательность разреженная, функция φ_λ удовлетворяет всем требованиям, и классы $\Gamma(\mathscr{E}(K_{a_\lambda}))$ различны для разных значений параметра.

6. Случай густых последовательностей

Из семейства неразреженных последовательностей выделим класс последовательностей (так называемых *густых*) таких, что для любого Q и достаточно большого n

$$a_n - a_{n+1} \leq a_n^Q.$$

Добавим дополнительное условие

$$\exists M, n_1 \quad a_n - a_{n+1} > 1/n^M \text{ для } n > n_1, \tag{5}$$

выполняемое для типичных густых последовательностей.

Для пространств Фреше X и Y будем говорить, что функции $\beta^{(X)}$ и $\beta^{(Y)}$ *имеют одинаковое асимптотическое поведение* $(\beta^{(X)} \sim \beta^{(Y)})$, если можно оценить одну функцию через другую с взаимной заменой составляющих, как в предложении 3.

Теорема 3. *Пусть густая выпуклая последовательность $a = (a_n)$ удовлетворяет условию* (5), $X = \mathscr{E}(K_a)$. *Тогда* $\beta^{(X)} \sim \beta^{(s)}$.

Доказательство. Для пространства s имеем

$$d_n(U_q, U_p) = (n+1)^{p-q}$$

(см., например, [13, лемма 2]) и

$$\beta^{(s)}(t, V_p, V_q) \sim t^{\frac{1}{q-p}}.$$

Так как функция $\beta^{(s)}$ имеет максимальный рост среди функций, соответствующим ядерным пространствам Фреше, естественно получаем верхнюю границу для $\beta^{(X)}$:

$$\forall p\, \forall \varepsilon\, \exists q\, \exists C \quad \beta^{(X)}(t, U_p, U_q) < Ct^{\varepsilon}.$$

С другой стороны, рассуждая, как в теореме 1, получим неравенство

$$\beta^{(X)}(t, U_p, U_q) \geq N_2$$

с тем же значением N_2, как и выше. Ввиду выпуклости последовательности (a_n)

$$a_{N_2+1} - a_{N_2+2} < \left(\frac{8}{t}\right)^{\frac{1}{q-p}}.$$

Применение (5) дает

$$a_{N_2+1} - a_{N_2+2} > (2N_2)^{-M}.$$

Поэтому $N_2 > Ct^{\frac{1}{M(q-p)}}$ для некоторой константы C, откуда и следует требуемое утверждение.

Условие (5) не вытекает из определения густой последовательности. Например, можно рекуррентно построить последовательность номеров (n_k) такую, что $a_{n_k} = \frac{1}{\ln n_k}$ и $a_n - a_{n+1} = n_k^{-k}$ для $n_k \leq n < n_{k+1}$. По-видимому, поведение функции β для соответствующего пространства $\mathscr{E}(K_a)$ крайне нерегулярно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Domanski P., Vogt D.* The space of real-analytic functions has no basis // Studia Math. 2000. V. 142, N 2. P. 187–200.
2. *Goncharov A. P.* Spaces of Whitney functions with basis // Math. Nachr. 2000. V. 220. P. 45–57.
3. *Goncharov A. P., Zahariuta V. P.* Basis in the space of C^∞-functions on a graduated sharp cusp // J. Geom. Anal. 2003. V. 13, N 1. P. 95–106.
4. *Diaz J. C.* On non-primary Fréchet Schwartz spaces // Studia Math. 1997. V. 126, N 3. P. 291–307.
5. *Митягин Б. С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 4. С. 63–132.
6. *Arslan B., Goncharov A., Kocatepe M.* Spaces of Whitney functions on Cantor-type sets // Canad. J. Math. 2002. V. 54. P. 225–238.
7. *Whitney H.* Differentiable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 369–387.
8. *Колмогоров А. Н.* О линейной размерности топологических векторных пространств // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. С. 239–241.
9. *Bessaga C., Pelczynski A., Rolewicz S.* On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. 1961. V. 9. P. 667–683.
10. *Тихомиров В. М.* Об n-мерных поперечниках компактов некоторых функциональных классов // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 4. С. 734–737.

11. *Yosida K.* Functional Analysis. Berlin: Springer, 1978.

12. *Goncharov A., Kocatepe M.* A continuum of pairwise non-isomorphic spaces of Whitney functions on Cantor-type sets // Linear Topological Spaces and Complex Analysis. 1997. V. 3. P. 57–64.

13. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 2. С. 153–173.

Статья поступила 18 августа 2003 г.

Гончаров Александр Павлович (Goncharov Alexander Pavlovich)
Department of Mathematics
Bilkent University
06800 Ankara, Turkey
goncha@fen.bilkent.edu.tr

Zeki Mustafa
Department of Mathematics
Ohio State University
Columbus, USA
zeki@math.ohio-state.edu