Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.11

О РАЗНОСТЯХ РЕШЕТОЧНЫХ ГОМОМОРФИЗМОВ

С. С. Кутателадзе

Аннотация: Порядково ограниченный функционал на векторной решетке представим в виде разности решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, если ядро этого функционала является векторной подрешеткой объемлющей решетки. Дается операторный аналог этого утверждения.

Ключевые слова: решеточный гомоморфизм, теорема Стоуна, булевозначный анализ.

Заметка посвящена ответу на следующий вопрос: какие замкнутые гиперплоскости в банаховой решетке сами являются векторными подрешетками, т. е. подпространствами, выдерживающими образование конечных максимумов и минимумов? Оказывается, что таковы в точности ядра разностей решеточных гомоморфизмов на исходной решетке. Мотивирующим примером для этой заметки послужила классическая теорема Стоуна о строении векторных подрешеток в пространстве $C(Q,\mathbb{R})$ непрерывных вещественных функций на компакте Q (см., например, [1, теорема 10.8.10]). Эта теорема может быть переформулирована в интересующих нас терминах следующим образом.

Теорема Стоуна. *Каждая замкнутая векторная подрешетка в $C(Q,\mathbb{R})$ представляет собой пересечение ядер разностей решеточных гомоморфизмов на $C(Q,\mathbb{R})$.*

В этой связи разность решеточных гомоморфизмов на векторной решетке X можно назвать *двухточечным соотношением* на X.

Здесь совсем не обязательно предполагать, что рассматриваемые решеточные гомоморфизмы действуют в поле $\mathbb{R}$. В теории мажорированных операторов известна классическая теорема Мейера (см. [2, § 3.3.1(5)]), утверждающая, что каждый сохраняющий дизъюнктность порядково ограниченный оператор между векторными решетками является двухточечным соотношением. Аналогичную теорему в несколько более общей ситуации установили Абрамович, Аренсон и Китовер (см. [3, § 5.4.1]).

Ниже мы будем рассматривать и общие решеточные гомоморфизмы, определенные на X и действующие в произвольное пространство Канторовича Y, база которого представляет собой некоторую полную булеву алгебру B.

Итак, пусть $T : X \to Y$ — регулярный оператор, положительная и отрицательная части которого — решеточные гомоморфизмы. Заметим, что для всякого порядкового проектора $b \in B$ оператор bT, называемый *слоем* T, также является двухточечным соотношением и, стало быть, ядро bT — векторная подрешетка X. На самом деле справедливо и обратное утверждение. Иными словами, имеет место

Основная теорема. *Регулярный оператор, действующий из векторной решетки в пространство Канторовича, является двухточечным соотношением в том и только в том случае, если ядро любого его слоя служит векторной подрешеткой объемлющей решетки.*

Проводимый ниже анализ весьма прозрачен, если пользоваться достаточно развитым аппаратом «нестандартной скаляризации». Этот аппарат реализует эвристический принцип переноса Л. В. Канторовича и сводит операторные задачи к случаю функционалов. Для экономии места, используя сведения из теории векторных решеток и булевозначного анализа, мы будем придерживаться терминологии и обозначений книги [4].

Схема доказательства основной теоремы такова. Используя функторы канонического вложения и подъема в булевозначную модель $\mathbb{V}^{(B)}$, мы сводим дело к характеризации скалярных двухточечных соотношений в векторных решетках над плотными подкольцами поля $\mathbb{R}$. Для решения возникающей скалярной задачи мы используем одну из формул субдифференциального исчисления [5], известную под названием

Теорема декомпозиции. *Пусть $H_1, \dots, H_N$ — конусы в векторной решетке X, а f, g — положительные функционалы над X.*

Неравенство

$$f(h_1 \vee \dots \vee h_N) \geq g(h_1 \vee \dots \vee h_N)$$

имеет место для всех $h_k \in H_k$ $(k := 1, \dots, N)$ в том и только в том случае, если для всякого разбиения g в сумму N положительных слагаемых $g = g_1 + \dots + g_N$ найдется разбиение f в сумму N положительных слагаемых $f = f_1 + \dots + f_N$ такое, что

$$f_k(h_k) \geq g_k(h_k) \quad (h_k \in H_k;\ k := 1, \dots, N).$$

В такой форме эта теорема была сформулирована и доказана в [6]. Очевидно, что векторную решетку в ней можно рассматривать и над любым плотным подполем поля $\mathbb{R}$. Отметим в этой связи, что последующие результаты сохранятся и в общих модулях, допускающих выпуклый анализ (см. [5, ч. I, § 2.3]).

Доказательство основной теоремы. Нуждается в проверке лишь достаточность. Итак, пусть T — регулярный оператор, действующий из X в Y, и ядро $\ker(bT) := (bT)^{-1}(0)$ любого слоя оператора T является векторной подрешеткой X.

Начнем со «скаляризации» задачи. Не нарушая общности, можно считать, что Y — ненулевое пространство, вложенное в качестве фундамента в расширенное пространство Канторовича $\mathscr{R}{\downarrow}$, представляющее собой спуск поля вещественных чисел $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. [4, теорема 5.2.4]).

Пусть, далее, $X^\wedge$ — стандартное имя X в $\mathbb{V}^{(B)}$. Понятно, что $X^\wedge$ — это $\mathbb{R}^\wedge$-векторная решетка внутри булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть $l := T{\uparrow}$ — подъем оператора T в $\mathbb{V}^{(B)}$. Ясно, что l действует из $X^\wedge$ в подъем $Y{\uparrow}$ пространства Y в смысле универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Таким образом,

$$l(x^\wedge) = Tx$$

внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ для всех $x \in X$, т. е. в терминах оценки истинности

$$[\![l : X^\wedge \to \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}, \quad (\forall x \in X)\ [\![l(x^\wedge) = Tx]\!] = \mathbb{1}.$$

Простые подсчеты оценок истинности показывают, что $T_+{\uparrow} = l_+$ и $T_-{\uparrow} = l_-$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Более того, справедливо равенство $[\![\ker(l)$ — подрешетка $X^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. В самом деле, возьмем $x, y \in X$, и пусть

$$b := [\![Tx = 0^\wedge]\!] \wedge [\![Ty = 0^\wedge]\!].$$

Это означает, что $x, y \in \ker(bT)$ и, стало быть, по условию $bT(x \vee y) = 0$. Иначе говоря,

$$[\![Tx = 0^\wedge]\!] \wedge [\![Ty = 0^\wedge]\!] \le [\![T(x \vee y) = 0^\wedge]\!].$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&[\![\ker(l) \text{ — подрешетка } X^\wedge]\!] \\
&\qquad = [\![(\forall x, y \in X^\wedge)(l(x) = 0^\wedge \wedge l(y) = 0^\wedge \to l(x \vee y) = 0^\wedge)]\!] \\
&\qquad\qquad = \bigwedge_{x,y \in X} [\![l(x^\wedge) = 0^\wedge \wedge l(y^\wedge) = 0^\wedge \to l((x \vee y)^\wedge) = 0^\wedge]\!] = \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем забыть про исходную операторную постановку и работать внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ с ненулевым функционалом l, игнорируя дальнейшее выписывание оценок истинности.

Поскольку l — регулярный функционал на $X^\wedge$, мы можем записать l в виде разности положительных дизъюнктных функционалов $l = l_+ - l_-$, где l_+ и l_- — положительная и отрицательная части l.

Для удобства положим $f := l_+$ и $g := l_-$, $H := \ker(l)$. Убедимся только в том, что l_- — решеточный гомоморфизм (ясно, что это не нарушает общности). Известный критерий [2, теорема 3.3.4(1)] гласит, что положительный функционал g является решеточным гомоморфизмом тогда и только тогда, когда каждый положительный функционал, меньший g, пропорционален g, т. е. порядковый интервал между нулем и g совпадает с отрезком, соединяющим нуль и g: символически, $[0, g] = [0, 1]g$. В операторном случае роль числа 1 играет тождественный эндоморфизм в области значений g.

Итак, пусть $0 \le g_1 \le g$ и $g_2 := g - g_1$. Можно считать, что $g_1 \ne 0$ и $g_1 \ne g$, иначе нечего было бы доказывать. По условию для любых $h_1, h_2 \in \ker(l)$ имеет место неравенство

$$0 = f(h_1 \vee h_2) \ge g(h_1 \vee h_2) = 0.$$

По теореме декомпозиции существует разбиение f в сумму двух положительных слагаемых $f = f_1 + f_2$ такое, что

$$f_1(h) - g_1(h) = 0, \quad f_2(h) - g_2(h) = 0 \quad (h \in H).$$

Поскольку H — это гиперплоскость функционала $l = f - g$, мы видим, что найдутся вещественные числа α, β такие, что

$$f_1 - g_1 = \alpha(f - g); \quad f_2 - g_2 = \beta(f - g).$$

Ясно, что $\alpha + \beta = 1$ (иначе $f = g$, т. е. $l = 0$).

Таким образом, одно из чисел α, β строго положительно. Если $\alpha > 0$, то в силу дизъюнктности f и g будет $g_1 = \alpha g$ (см., например, [7, 1.2.1(II)]. Раз g_1 не равен нулю, то $0 \le \alpha \le 1$ и $g_1 \in [0, 1]g$. Если же $\beta > 0$, то по аналогичной причине $g_2 = \beta g$. Раз $g_1 \ne g$, то $g_2 \ne 0$. Стало быть, $0 \le \beta \le 1$, и опять $g_1 \in [0, 1]g$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Обратимся к теореме Мейера (ср. [8]). Пусть T — сохраняющий дизъюнктность порядково ограниченный оператор. Возьмем $x \in \ker(T)$. Раз $x_+ \wedge x_- = 0$, то $|Tx_+| \wedge |Tx_-| = 0$. Помимо этого, $Tx_+ = Tx_-$ по выбору x. Значит, $Tx_+ = 0$ и $Tx_- = 0$. Иными словами, $\ker(T)$ — это подрешетка области определения T. Слой bT оператора T для $b \in B$ также сохраняет дизъюнктность, и, стало быть, его ядро — векторная подрешетка. Для завершения доказательства теоремы Мейера можно сослаться на основную теорему.

Замечание 2. Осуществляя спуск приведенной теоремы из булевозначного универсума или, что эквивалентно, используя характеризацию модулей, допускающих выпуклый анализ, можно получить аналогичное основной теореме описание мажорированных модульных гомоморфизмов, обладающих решеточным ядром, в модулях над почти рациональными подкольцами кольца ортоморфизмов пространства образов (ср. [9, теорема 3.3]).

Замечание 3. Из основной теоремы легко вытекает, что теорема Стоуна не может быть обобщена далеко за пределы AM-пространств. В самом деле, если в некоторой банаховой решетке каждая замкнутая подрешетка есть пересечение двухточечных соотношений, то в такой решетке существует достаточное множество решеточных гомоморфизмов, разделяющее точки исходной решетки (ср. [10, гл. 3, § 9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Изд. 4. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
3. *Kutateladze S. S. (ed.)* Vector lattices and integral operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ. Изд. 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003.
5. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы: теория и приложения.. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. Ч. 1.
6. *Кутателадзе С. С.* Границы Шоке в K-пространствах // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 4. С. 107–146.
7. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.
8. *Meyer M.* Le stabilisateur d'un espace vectoriel réticulé // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1976. V. 283. P. 249–250.
9. *Abramovich Y. A., Arenson E. L., Kitover A. K.* Banach $C(K)$-modules and operators preserving disjointness New York: John Wiley & Sons, Inc., 1992. (Preprint / Math. Sci. Res. Inst., Berkeley, 1991; N 05808–91).
10. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operators. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1974.

Статья поступила 1 февраля 2005

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru;