Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.98

ЛИПШИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ И АБСТРАКТНЫХ ВЫПУКЛЫХ КОНУСАХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНОЙ Λ–ВАРИАЦИИ

О. М. Солычева

Аннотация: Получено полное описание липшицевых операторов суперпозиции, действующих на отображениях конечной Λ-вариации, со значениями в метрических полугруппах или абстрактных выпуклых конусах, а также их аналогов для многозначных операторов суперпозиции.

Ключевые слова: Λ-вариация по Уотерману, отображение со значениями в метрических пространствах, операторы суперпозиции Немыцкого, условие Липшица, свойство типа банаховости алгебры.

§ 1. Введение

Пусть $I = [a, b]$, $a < b$, — отрезок вещественной прямой и $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ расходится.

Функцию $f : I \to \mathbb{R}$ будем называть *функцией ограниченной Λ-вариации* (*в смысле Уотермана*) *на отрезке* I и писать $f \in \Lambda\mathrm{BV}$ (см. [1, 2]), если следующая величина, называемая Λ-*вариацией* функции f на I, конечна:

$$V_\Lambda(f, I) = V_\Lambda(f) = \sup \sum_{n=1}^{m} |f(b_n) - f(a_n)|/\lambda_n, \tag{1}$$

где супремум берется по всем $m \in \mathbb{N}$ и всем неупорядоченным наборам неналегающих отрезков $I_n = [a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \dots, m$. Всюду ниже, если не оговорено противное, такой набор условий, по которому берется супремум, будем называть стандартным, а под Λ будем понимать некоторую фиксированную последовательность, удовлетворяющую указанным ранее свойствам.

Легко видеть, что $\Lambda\mathrm{BV}$ совпадает с пространством BV функций обычной жордановой ограниченной вариации на I тогда и только тогда, когда Λ является ограниченной последовательностью. Если же $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = \infty$, то BV является собственным подмножеством $\Lambda\mathrm{BV}$.

Известно [1, разд. 3], что $\Lambda\mathrm{BV}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_\Lambda = |f(a)| + V_\Lambda(f, I), \quad f \in \Lambda\mathrm{BV}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00473).

Более того, в [3, теорема 4] показано, что $\Lambda\mathrm{BV}$ является нормированной банаховой алгеброй (см. также [4, формула (19)]).

Пространства $\Lambda\mathrm{BV}$ с различными последовательностями Λ представляют интерес при изучении рядов Фурье (см., например, [1, 2, 5]). В настоящей работе предложено другое приложение классов $\Lambda\mathrm{BV}$, связанное с описанием операторов суперпозиции, удовлетворяющих глобальному условию Липшица.

Пусть $\mathbb{R}^I$ — множество всех функций, действующих из I в $\mathbb{R}$. Для заданной функции двух переменных $h : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ оператор $\mathscr{H} : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^I$, определенный для всех $t \in I$ и $f \in \mathbb{R}^I$ правилом

$$(\mathscr{H} f)(t) \equiv \mathscr{H}(f)(t) = h(t, f(t)), \tag{2}$$

называется *оператором суперпозиции с генератором* h.

Пусть $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^I$ — некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Нас будут интересовать те операторы суперпозиции, которые удовлетворяют условию Липшица, т. е. $\mathscr{H} : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$, для которых существует константа $\mu > 0$ такая, что

$$\|\mathscr{H}(f_1) - \mathscr{H}(f_2)\| \leq \mu \|f_1 - f_2\|, \quad f_1, f_2 \in \mathrm{B}. \tag{3}$$

В пространствах функций различных конечных вариаций относительно действия операторов суперпозиции мало что известно. Более подробно изучены липшицевы операторы такого типа. Матковский в [6] получил следующий результат: в случае $\mathrm{B} = \mathrm{Lip}$ — пространства липшицевых функций на I с обычной липшицевой нормой — условие (3) эквивалентно существованию двух функций $h_0, h_1 \in \mathrm{Lip}$ таких, что $h(t,x) = h_0(t) + h_1(t)x$, $t \in I$, $x \in \mathbb{R}$. Матковский и Мищ в [7] показали, что если B совпадает с пространством функций ограниченной жордановой вариации BV и выполнено условие (3), то найдутся две непрерывные слева на I функции $h_0, h_1 \in \mathrm{BV}$, для которых $h^*(t,x) = h_0(t) + h_1(t)x$ для $t \in (a,b]$, $x \in \mathbb{R}$, где $h^*(t,x) = \lim\limits_{s \to t-0} h(s,x)$ — левая регуляризация функции h. В работах [8–12] описаны липшицевы операторы суперпозиции на пространствах многозначных функций соответственно ограниченной жордановой вариации, удовлетворяющих условию Липшица, и ограниченной обобщенной вариации в смысле Рисса — Орлича и Винера — Орлича.

В работе [4] для операторов суперпозиции на вещественнозначных функциях конечной Λ-вариации получен следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathscr{H} : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^I$ — оператор суперпозиции, порожденный генератором $h : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ согласно формуле* (2).

Если $\mathscr{H}$ действует из $\Lambda\mathrm{BV}$ в $\Lambda\mathrm{BV}$ и липшицев в смысле (3), *то существуют постоянная $\mu_0 > 0$, зависящая от μ и λ_1, такая, что*

$$|h(t,x_1) - h(t,x_2)| \leq \mu_0 |x_1 - x_2|, \quad t \in I, \ x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

и две непрерывные слева на $(a,b]$ функции $h_0, h_1 \in \Lambda\mathrm{BV}$ такие, что

$$h^*(t,x) = h_0(t) + h_1(t)x, \quad t \in I, \ x \in \mathbb{R},$$

где $h^*(t,x)$ — левая регуляризация функции $t \mapsto h(t,x)$ для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}$.

Обратно, если $h_0, h_1 \in \Lambda\mathrm{BV}$ и $h(t,x) = h_0(t) + h_1(t)x$, $t \in I$, $x \in \mathbb{R}$, то $\mathscr{H}$ действует из $\Lambda\mathrm{BV}$ в $\Lambda\mathrm{BV}$ и удовлетворяет условию Липшица (3).

Описанный выше результат Матковского и Мища вытекает из теоремы 1.1 при $\lambda_n = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, но теорема 1.1 также справедлива для операторов суперпозиции, действующих на функции со значениями в линейных нормированных пространствах (см. [4, теорема 4.1]).

Цель данной работы — представить полное описание липшицевых операторов суперпозиции, действующих в пространствах отображений конечной Λ-вариации, со значениями в метрических полугруппах или абстрактных выпуклых конусах, а также их аналогов для многозначных операторов суперпозиции, что является обобщением и развитием результатов работ [4, 13].

Работа состоит из пяти параграфов. В § 2 приводятся определения метрической полугруппы, абстрактного выпуклого конуса и пространства $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$. В § 3 содержатся формулировки основных результатов работы (теоремы 3.1–3.3), а в § 4 — их переформулировки на случай многозначных операторов. В заключительном § 5 приводятся доказательства основных результатов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. В. Чистякову за постановку задачи, внимание к работе и ценные критические замечания, а также профессору М. В. Долову за интерес, проявленный к этой работе.

§ 2. Метрические полугруппы и конусы отображений

Метрической полугруппой (м.п.г.) называется тройка $(M, d, +)$, где (M, d) — метрическое пространство с метрикой d, $(M, +)$ — абелева полугруппа по сложению, т. е. $(u + v) + w = u + (v + w)$ и $u + v = v + u$ для всех $u, v, w \in M$, и метрика d инвариантна относительно сдвигов, т. е. $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ для всех $u, v, w \in M$ (см. [14]). Последнее свойство гарантирует выполнение неравенства $d(x, y) \leq d(x + u, y + v) + d(u, v)$ для всех $x, y, u, v \in M$. Если м.п.г. M содержит нуль, то полагаем $|u|_d = d(u, 0)$. Важным является свойство непрерывности операции суммы: если $x_n, y_n, x, y \in M$ и $d(x_n, x) \to 0$ и $d(y_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$, то $d(x_n + y_n, x + y) \to 0$ при $n \to \infty$.

Абстрактным выпуклым конусом (а.в.к.) назовем четверку $(M, d, +, \cdot)$, где $(M, d, +)$ — м.п.г. с нулем и $\cdot : [0, \infty) \times M \to M$ — операция $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ со свойствами: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$, $1 \cdot u = u$, $d(\lambda u, \lambda v) = \lambda d(u, v)$ для всех $u, v \in M$ и $\lambda, \mu \geq 0$ [15]. Отметим, что в а.в.к. $(M, d, +, \cdot\,)$ выполнено равенство

$$d(\lambda u + \mu v, \lambda v + \mu u) = |\lambda - \mu| d(u, v), \quad u, v \in M, \ \lambda, \mu \geq 0. \tag{4}$$

Для отрезка $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, последовательности Λ и метрического пространства (M, d) обозначим через $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ множество всех отображений $f : I \to M$, для которых конечна Λ-вариация по Уотерману:

$$V_{\Lambda,d}(f, I) = V_{\Lambda,d}(f) = \sup \sum_{n=1}^{m} \frac{d(f(b_n), f(a_n))}{\lambda_n}, \tag{5}$$

где супремум берется по стандартному набору условий.

Если M — (полная) м.п.г. (а.в.к.), то множество $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ является (полной) м.п.г. (соответственно а.в.к.) с поточечными операциями и метрикой d_Λ (см. лемму 5.5): для всех $f, g \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$

$$d_\Lambda(f, g) = d(f(a), g(a)) + W_{\Lambda,d}(f, g), \tag{6}$$

где

$$W_{\Lambda,d}(f, g) = \sup \sum_{n=1}^{m} \frac{d(f(b_n) + g(a_n), f(a_n) + g(b_n))}{\lambda_n} \tag{7}$$

и супремум берется по стандартному набору условий.

Если м.п.г. $(M, d, +)$ содержит нуль и $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$, то полагаем

$$\|f\|_d = |f(a)|_d + V_{\Lambda,d}(f, I).$$

Пусть (N, ρ) — метрическое пространство и $(M, d, +)$ — м.п.г. Обозначим через $\mathrm{Lip}(N, M)$ множество всех липшицевых отображений $T : N \to M$, так что конечна величина

$$L(T) = \sup\left\{\frac{d(Tu, Tv)}{\rho(u, v)},\ u, v \in N,\ u \neq v\right\}.$$

Если M — (полная) м.п.г. (а.в.к.), то множество $\mathrm{Lip}(N, M)$ является (полной) м.п.г. (соответственно а.в.к.) с поточечными операциями и метрикой d_L: $d_L(T, S) = d(Tu_0, Su_0) + d_l(T, S)$ для $T, S \in \mathrm{Lip}(N, M)$, где элемент u_0 принадлежит $\mathbb{N}$ и фиксирован и

$$d_l(T, S) = \sup\left\{\frac{d(Tu + Sv, Tv + Su)}{\rho(u, v)},\ u, v \in N,\ u \neq v\right\}$$

(см. [9, 10, 12, 14, 15]).

Пусть $(N, \rho, +)$ и $(M, d, +)$ — две м.п.г. Оператор $T : N \to M$ называется *аддитивным*, если $T(u + v) = Tu + Tv$ для всех $u, v \in N$. Обозначим через $\mathrm{L}(N, M)$ множество всех липшицевых аддитивных операторов из N в M. Если N и M содержат нули и $T \in \mathrm{L}(N, M)$, то $T(0) = 0$. В этом случае $d_L = d_l$ (при $u_0 = 0$) является метрикой пространства $\mathrm{L}(N, M)$ и для $T \in \mathrm{L}(N, M)$ имеем $L(T) = d_L(T, 0) \equiv |T|_{d_L}$.

§ 3. Основные результаты

Для формулировки первого результата нам потребуется понятие левой регуляризации отображения со значениями в полной м.п.г. $(M, d, +)$. Для $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ *левой регуляризацией* называется такое отображение $f^* : I \to M$, что $f^*(t) = \lim\limits_{s \to t-0} f(s)$ для всех $t \in (a, b]$ и $f^*(a) = \lim\limits_{s \to a+0} f^*(s) = \lim\limits_{s \to a+0} f(s)$. Существование указанных односторонних пределов будет доказано в леммах 5.6, 5.7 и 5.9. Множество тех $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$, для которых $f^*(t) = f(t)$ при $t \in (a, b]$, будем обозначать через $\Lambda\mathrm{BV}^*(I, M)$.

Теорема 3.1. *Пусть $(N, \rho, +, \cdot)$ и $(M, d, +, \cdot)$ — два а.в.к., M полный и отображение $h : I \times N \to M$ — генератор оператора суперпозиции $\mathscr{H}$, определенного согласно (2), где $t \in I$ и $f \in N^I$. Если $\mathscr{H} \in \mathrm{Lip}(\Lambda\mathrm{BV}(I, N), \Lambda\mathrm{BV}(I, M))$, то $h(t, \cdot) \in \mathrm{Lip}(N, M)$ для всех $t \in I$ и найдутся два отображения $h_0 : I \to M$ и $h_1 : I \to \mathrm{L}(N, M)$ такие, что $h_0, h_1(\cdot)u \in \Lambda\mathrm{BV}^*(I, M)$ для всех $u \in N$ и $h^*(t, u) = h_0(t) + h_1(t)u$ для всех $t \in I$, $u \in N$, где $h_1(\cdot)u$ действует по правилу $t \mapsto h_1(t)u$, а $h^*(\cdot, u)$ есть левая регуляризация отображения $h(\cdot, u)$ при каждом фиксированном $u \in N$.*

Теорема 3.2. *Предположим, что $(N, \rho, +)$ и $(M, d, +)$ — две* м.п.г. *с нулями. Если $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, \mathrm{L}(N, M))$ и $g \in \Lambda\mathrm{BV}(I, N)$, то отображение $fg : I \to M$, действующее по правилу $(fg)(t) = f(t)g(t)$, $t \in I$, лежит в $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ и выполнено неравенство*

$$\|fg\|_d \leq \max\{1, 2\lambda_1\}\|f\|_{d_L}\|g\|_\rho.$$

С учетом результата теоремы 3.2 теорема 3.1 допускает следующее обращение.

Теорема 3.3. *Пусть* $(N,\rho,+)$ *и* $(M,d,+)$ — *две* м.п.г. *с нулями, и пусть отображение* $h: I\times N\to M$, *определенное согласно правилу* $h(t,u)=h_0(t)+h_1(t)u$, *где* $h_0\in\Lambda\mathrm{BV}(I,M)$ *и* $h_1\in\Lambda\mathrm{BV}(I,\mathrm{L}(N,M))$, *является генератором оператора суперпозиции* $\mathscr{H}$. *Тогда* $\mathscr{H}\in\mathrm{Lip}(\Lambda\mathrm{BV}(I,N),\Lambda\mathrm{BV}(I,M))$ *и имеет место неравенство*

$$L(\mathscr{H})\le\max\{1,2\lambda_1\}\|h_1\|_{d_L}.$$

Приведенные результаты дают полное описание структуры пространства липшицевых операторов суперпозиции на отображениях конечной Λ-вариации со значениями в метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах. Основная идея представления генератора оператора суперпозиции в указанном виде принадлежит Матковскому [6], идея построения пробных функций, используемых в доказательстве теорем 3.1 и 3.3, заимствована из работ В. В. Чистякова [10, 12, 16].

§ 4. Многозначные операторы суперпозиции

Здесь основные теоремы 3.1–3.3 будут переформулированы на многозначный случай.

Пусть $(Y,|\cdot|)$ — вещественное нормированное линейное пространство. Обозначим через $\mathrm{cc}(Y)$ семейство всех непустых компактных выпуклых подмножеств Y, через $\mathrm{cbc}(Y)$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств Y и под $\mathscr{P}(Y)$ будем понимать одно из этих множеств. Семейство $\mathscr{P}(Y)$ наделено метрикой Хаусдорфа D, порожденной нормой в Y:

$$D(P,Q)=\max\{\sup_{p\in P}\inf_{q\in Q}|p-q|,\sup_{q\in Q}\inf_{p\in P}|p-q|\},\quad P,Q\in\mathscr{P}(Y).$$

Для $P,Q\in\mathscr{P}(Y)$ положим $P+Q=\{p+q\mid p\in P,\ q\in Q\}$, $\lambda P=\{\lambda p\mid p\in P\}$, $\lambda\ge 0$. В случае, когда $\mathscr{P}(Y)=\mathrm{cc}(Y)$, и многозначный липшицев оператор суперпозиции $\mathscr{H}$ действует из пространства $\Lambda\mathrm{BV}(I,K)$, где K — выпуклый конус, в $\Lambda\mathrm{BV}(I,\mathrm{cc}(Y))$, в [13] представлены аналоги теорем 3.1–3.3.

Для $P,Q\in\mathrm{cbc}(Y)$ введем операцию $\overset{*}{+}$, определенную так: $P\overset{*}{+}Q=\mathrm{cl}(P+Q)$ (см. [15]), где cl означает замыкание в Y. В $\mathrm{cbc}(Y)$ выполняются следующие равенства [17]: $P\overset{*}{+}Q=\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\,P+\mathrm{cl}\,Q)$, $\lambda(P\overset{*}{+}Q)=\lambda P\overset{*}{+}\lambda Q$, $(\lambda+\mu)P=\lambda P\overset{*}{+}\mu P$, $\lambda(\mu P)=(\lambda\mu)P$ и $D(\lambda P,\lambda Q)=\lambda D(P,Q)$ для всех $\lambda,\mu\ge 0$. Более того, поскольку (см. [18, лемма 3] и [19, лемма 2.2])

$$D(P\overset{*}{+}R,Q\overset{*}{+}R)=D(P+R,Q+R)=D(P,Q),\quad P,Q,R\in\mathrm{cbc}(Y),$$

то $(\mathrm{cbc}(Y),D,\overset{*}{+},\cdot\,)$ — а.в.к., причем полный, если Y полное.

Многозначный оператор T, действующий из а.в.к. $(N,\rho,+,\cdot\,)$ в $\mathrm{cbc}(Y)$, называется *линейным*, если он аддитивен и $T(\lambda u)=\lambda T(u)$ для $\lambda\ge 0$, $u\in N$. Обозначим через $\mathbb{L}(N,\mathrm{cbc}(Y))$ а.в.к. всех линейных липшицевых многозначных операторов из N в $\mathrm{cbc}(Y)$, наделенный поточечными операциями (за которыми сохраняются обозначения операций в $\mathrm{cbc}(Y)$) и метрикой $D_L=D_l$:

$$D_L(T,S)=\sup_{u,v\in N,u\ne v}\left\{\frac{D(Tu\overset{*}{+}Sv,Tv\overset{*}{+}Su)}{\rho(u,v)}\right\}.$$

Из изложенного следует, что теоремы 3.1–3.3 остаются справедливыми и в многозначном случае, если в них положить $(M,d,+)=(\mathrm{cbc}(Y),D,\overset{*}{+})$, в теореме 3.1 предположить, что $(Y,|\cdot|)$ — банахово пространство, и $\mathrm{L}(N,M)$ заменить на $\mathbb{L}(N, \mathrm{cbc}(Y))$, а в теореме 3.3 оценку переписать в виде

$$L(\mathscr{H}) = \max\{1, 2\lambda_1\}(L(h_1(a)) + V_{\Lambda,d_L}(h_1, I)).$$

§ 5. Доказательства основных результатов

Для доказательства теорем 3.1–3.3 нам потребуется несколько вспомогательных лемм. Следующие несколько утверждений выражают свойства отображений конечной Λ-вариации и являются обобщением некоторых результатов работы [1]. Ввиду отсутствия принципиальных различий в технике доказательств последние опускаются.

Лемма 5.1 [1, теорема 2]. *Пусть (M, d) — метрическое пространство. Для $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ и произвольного $s \in (a, b)$ имеет место неравенство*

$$V_{\Lambda,d}(f, [a, b]) \le V_{\Lambda,d}(f, [a, s]) + V_{\Lambda,d}(f, [s, b]).$$

При этом если $a < t < s$, то $\varphi(t) \le \varphi(s) \le \varphi(t) + V_{\Lambda,d}(f, [t, s])$, где $\varphi(t) = V_{\Lambda,d}(f, [a, t])$, $a \le t \le b$.

Лемма 5.2 [1, теорема 3]. *Пусть (M, d) — метрическое пространство и $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$. Тогда*

(1) *если f непрерывна справа в точке a, т. е.*

$$\lim_{t\to a+0} d(f(t), f(a)) = 0, \tag{8}$$

то $V_{\Lambda,d}(f, [a, t]) \to 0$ при $t \to a + 0$, а если f непрерывна слева в точке b, т. е.

$$\lim_{t\to b-0} d(f(t), f(b)) = 0, \tag{9}$$

то $V_{\Lambda,d}(f, [t, b]) \to 0$ при $t \to b - 0$;

(2) *если $[t, s] \subset (a, b)$, то $V_{\Lambda,d}(f, [t, s]) \to 0$ при $t, s \to a$ или $t, s \to b$.*

Лемма 5.3 [1, теорема 4]. *Пусть (M, d) — метрическое пространство, $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$. Тогда функция $\varphi(t) = V_{\Lambda,d}(f, [a, t])$ непрерывна справа в точке $t \in [a, b)$ (слева в точке $t \in (a, b]$) в том и только в том случае, когда f непрерывна справа (слева) в точке t в смысле равенств* (8) *и* (9).

Лемма 5.4. *Пусть $(M, d, +)$ —* м.п.г. *и отображения $f, f_k : I \to M$ для всех $k \in \mathbb{N}$ таковы, что $d(f_k(t), f(t)) \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $t \in I$. Тогда*

(a) *имеет место неравенство*

$$V_{\Lambda,d}(f, I) \le \liminf_{k\to\infty} V_{\Lambda,d}(f_k, I);$$

(b) *если $f_k \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то*

$$W_{\Lambda,d}(f_k, f) \le \liminf_{j\to\infty} W_{\Lambda,d}(f_k, f_j) \le \lim_{j\to\infty} d_\Lambda(f_k, f_j) \in [0, \infty);$$

(c) *для всех $k, j \in \mathbb{N}$, $t, s \in I$ выполнено*

$$|d(f_k(t), f_j(t)) - d(f_k(s), f_j(s))| \le d(f_k(t) + f_j(s), f_k(s) + f_j(t)) \le \lambda_1 W_{\Lambda,d}(f_k, f_j).$$

Доказательство. (a) Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Для $m \in \mathbb{N}$ и произвольного набора неналегающих отрезков $[a_n, b_n] \subset I$, $i = 1, \dots, m$, имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{d(f_k(b_n), f_k(a_n))}{\lambda_n} \le V_{\Lambda,d}(f_k, I).$$

Переходя к нижнему пределу при $k \to \infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{d(f(b_n), f(a_n))}{\lambda_n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{d(f_k(b_n), f_k(a_n))}{\lambda_n} \le \liminf_{k\to\infty} V_{\Lambda,d}(f_k, I).$$

Осталось перейти к супремуму по стандартному набору условий.

(b) Для фиксированного $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ и произвольного набора неналегающих отрезков $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \dots, m$, можем записать

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{d(f_k(b_n) + f_j(a_n), f_k(a_n) + f_j(b_n))}{\lambda_n} \le W_{\Lambda,d}(f_k, f_j).$$

Переходя к нижнему пределу при $j \to \infty$, аналогично п. (a) получаем

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{d(f_k(b_n) + f(a_n), f_k(a_n) + f(b_n))}{\lambda_n} \le \liminf_{j\to\infty} W_{\Lambda,d}(f_k, f_j).$$

Перейдя к супремуму по всем $m \in \mathbb{N}$ и всем наборам неналегающих отрезков $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \dots, m$, получим $W_{\Lambda,d}(f_k, f) \le \liminf\limits_{j\to\infty} W_{\Lambda,d}(f_k, f_j)$. Поскольку $W_{\Lambda,d}(f_k, f_j) \le d_\Lambda(f_k, f_j)$, имеем

$$\liminf_{j\to\infty} W_{\Lambda,d}(f_k, f_j) \le \lim_{j\to\infty} d_\Lambda(f_k, f_j),$$

а величина в правой части конечна, так как $f_k \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

(c) Справедливость неравенства вытекает непосредственно из свойств метрики d и определения (7).

Лемма 5.5. *Если* M — (*полная*) м.п.г. (а.в.к.), *то* $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ *является* (*полной*) м.п.г. (*соответственно* а.в.к.) *с метрикой* d_Λ, *определенной согласно* (6).

Доказательство утверждения сводится к проверке аксиом метрики и м.п.г. (либо а.в.к.), что не представляет сложностей, и поэтому опускается. Докажем лишь полноту пространства $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность в $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$, т. е.

$$d_\Lambda(f_k, f_j) = d(f_k(a), f_j(a)) + W_{\Lambda,d}(f_k, f_j) \to 0 \quad \text{при } k, j \to \infty.$$

По лемме 5.4(c) последовательность $\{f_k(t)\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна в M при любом $t \in I$. Поэтому в силу полноты M найдется отображение $f : I \to M$ такое, что $d(f_k(t), f(t)) \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $t \in I$.

На основании леммы 5.4(b)

$$W_{\Lambda,d}(f_k, f) \le \lim_{j\to\infty} d_\Lambda(f_k, f_j) \in [0, \infty).$$

Поскольку $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна, перейдя к верхнему пределу при $k \to \infty$, получим

$$\limsup_{k\to\infty} W_{\Lambda,d}(f_k, f) \le \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} d_\Lambda(f_k, f_j) \to 0,$$

т. е. $W_{\Lambda,d}(f_k, f) \to 0$ при $k \to \infty$, откуда $d_\Lambda(f_k, f) \to 0$ при $k \to \infty$, что означает сходимость последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ в метрике d_Λ.

Из леммы 5.4(c) следует, что $|V_{\Lambda,d}(f_k, I) - V_{\Lambda,d}(f_j, I)| \le W_{\Lambda,d}(f_k, f_j)$ для всех $k, j \in \mathbb{N}$, и, значит, $\{V_{\Lambda,d}(f_k, I)\}_{k=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность, поэтому существует постоянная $C > 0$ такая, что $V_{\Lambda,d}(f_k, I) \le C$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу поточечной сходимости и леммы 5.4(a)

$$V_{\Lambda,d}(f, I) \le \liminf_{k\to\infty} V_{\Lambda,d}(f_k, I) \le C,$$

т. е. $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$.

Следующие два утверждения гарантируют существование односторонних пределов отображений со значениями в метрических полугруппах, что существенно используется при работе с их регуляризациями.

Лемма 5.6. *Пусть $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$, где (M, d) — полное метрическое пространство. Тогда f имеет предел слева $f(t-0) \in M$ в каждой точке $t \in (a, b]$, т. е. $\lim\limits_{s\to t-0} d(f(t-0), f(s)) = 0$, и предел справа $f(t+0) \in M$ в каждой точке $t \in [a, b)$, т. е. $\lim\limits_{s\to t+0} d(f(t+0), f(s)) = 0$, причем множество точек разрыва функции f не более чем счетно.*

Доказательство будем проводить для предела справа. Функция $I \ni t \mapsto \varphi(t) = V_{\Lambda,d}(f, [a, t])$ является неубывающей и ограниченной для $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$. Поэтому в любой точке $t \in [a, b)$ существует предел справа $\varphi(t+0) = \lim\limits_{s\to t+0} \varphi(s) \in [0, +\infty)$.

В точках непрерывности φ функция f также непрерывна (см. лемму 5.3), поэтому предел справа в этих точках существует и равен значению функции в них. Пусть t_0 — точка разрыва $\varphi(t)$, в которой также существует предел справа $\varphi(t_0 + 0)$. Наряду с $\varphi(t)$ рассмотрим функцию $\varphi_1(t) = V_{\Lambda,d}(f, [t_0, t])$ для всех $t \in [t_0, b]$, где $a < t_0 < b$. В силу свойств Λ-вариации $\varphi_1(t) \le \varphi(t)$ для всех t, и φ_1 в каждой точке $[a, b)$ имеет предел справа. Для f можем записать $d(f(\tau_1), f(\tau_2)) \le \lambda_1 V_{\Lambda,d}(f, [\tau_1, \tau_2]) \le \lambda_1 V_{\Lambda,d}(f, [t_0, t]) = \lambda_1\varphi_1(t)$ при $t \ge \max\{\tau_1, \tau_2\}$. Согласно лемме 5.2 $\varphi_1(t) \to 0$ при $t \to t_0 + 0$, поэтому $d(f(\tau_1), f(\tau_2)) \to 0$, что в полном пространстве M означает выполнение условия критерия Коши, поэтому существует предел справа функции f в точке t_0, т. е. $\lim\limits_{t\to t_0+0} d(f(t_0 + 0), f(t)) = 0$. Аналогично устанавливается существование предела слева.

Утверждение о том, что число точек разрыва функции f не более чем счетно, вытекает из того, что число точек разрыва φ не более чем счетно и f непрерывна в тех и только тех точках, в которых непрерывна функция φ.

Лемма 5.7. *Пределы в определении левой регуляризации отображения $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$, где M — полная* м.п.г.*, существуют.*

Доказательство. Легко видеть, что существование предела слева для всех точек $t \in (a, b]$ доказывает предыдущая лемма 5.6. Докажем существование предела в точке a. Поскольку M — полная м.п.г., воспользуемся критерием Коши. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Согласно предыдущей лемме существует правосторонний предел $f(a+0)$ функции f в точке a, т. е. $\lim\limits_{s\to a+0} d(f(a+0), f(s)) = 0$. Значит, найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $a \le t \le a+\delta$, то $d(f(t), f(a+0)) < \varepsilon$. Возьмем произвольно $\tau_1, \tau_2 \in I$, причем $0 < \tau_i - a \le \delta$, $i = 1, 2$. При малых σ (таких, что $\sigma < \min\{\tau_1 - a, \tau_2 - a\}$) в силу инвариантности относительно сдвигов метрики d имеем

$$\begin{aligned} &d(f(\tau_2), f(\tau_1)) \\ &\quad= d(f(\tau_2) + f(\tau_2 - \sigma) + f(\tau_1 - \sigma), f(\tau_1) + f(\tau_2 - \sigma) + f(\tau_1 - \sigma)) \\ &\quad\le d(f(\tau_2), f(\tau_2 - \sigma)) + d(f(\tau_2 - \sigma), f(\tau_1 - \sigma)) + d(f(\tau_1), f(\tau_1 - \sigma)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d(f(\tau_2-\sigma),f(\tau_1-\sigma))\le d(f(\tau_2-\sigma),f(a+0))+d(f(\tau_1-\sigma),f(a+0))<2\varepsilon,$$

а оставшиеся слагаемые за счет уменьшения σ оценим так: $d(f(\tau_i),f(\tau_i-\sigma))<\varepsilon$, $i=1,2$. Таким образом, при $0<\tau_i-a\le\delta(\varepsilon)$, $i=1,2$, справедливо неравенство $d(f(\tau_2),f(\tau_1))<4\varepsilon$, что и доказывает существование $f^*(a)$.

Лемма 5.8. *Если $f\in\mathbb{R}^I$ — ограниченная монотонная функция, то $f\in\Lambda\mathrm{BV}(I,\mathbb{R})$ и $V_\Lambda(f,I)=|f(b)-f(a)|/\lambda_1$.*

Утверждение леммы следует непосредственно из определения (5).

Лемма 5.9. *Пусть (M,d) — полное метрическое пространство. Если $f\in\Lambda\mathrm{BV}(I,M)$, то $f^*\in\Lambda\mathrm{BV}^*(I,M)$.*

Доказательство. 1. Ясно, что если $t\in I$ — точка непрерывности функции f, то $f^*(t)=f(t)$. В силу леммы 5.6 множество точек разрыва функции f не более чем счетно, т. е. множество точек непрерывности f всюду плотно на I, поэтому для $t\in(a,b]$ найдется последовательность $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ точек непрерывности f, лежащих строго слева от t и сходящихся к t при $k\to\infty$. Тогда

$$\lim_{s\to t-0}d(f^*(t),f^*(s))=\lim_{k\to\infty}d(f^*(t),f^*(s_k))\\=\lim_{k\to\infty}d(f^*(t),f(s_k))=\lim_{s\to t-0}d(f^*(t),f(s))=0,$$

т. е. f^* непрерывна слева в каждой точке $t\in(a,b]$.

2. Покажем теперь, что $f^*\in\Lambda\mathrm{BV}(I,M)$, причем $V_{\Lambda,d}(f^*,I)\le V_{\Lambda,d}(f,I)$. Будем считать, что $f\ne\mathrm{const}$, поэтому $V_{\Lambda,d}(f,I)>0$. Пусть $Q=\{1,2,\dots\}$ — конечное или счетное множество, а $\{\tau_k\}_{k\in Q}\subset(a,b]$ — множество точек разрыва слева функции f на I. Определим отображение $f_1:I\to M$ следующим образом: $f_1(t)=f(t)$ при $t\ne\tau_1$ и $f_1(\tau_1)=f(\tau_1-0)$. Покажем, что $V_{\Lambda,d}(f_1,I)\le V_{\Lambda,d}(f,I)$. Возьмем $m\in\mathbb{N}$ и произвольный набор неналегающих отрезков $[a_n,b_n]\subset I$, $n=1,\dots,m$. Возможны следующие варианты.

(a) $\tau_1\ne a_n$ и $\tau_1\ne b_n$ ни для какого $n\in\{1,2,\dots,m\}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^m\frac{d(f_1(b_n),f_1(a_n))}{\lambda_n}=\sum_{n=1}^m\frac{d(f(b_n),f(a_n))}{\lambda_n}\le V_{\Lambda,d}(f,I).$$

(b) Пусть найдется такой номер $n_0\in\{1,2,\dots,m\}$, для которого $\tau_1=b_{n_0}$ (аналогичен случай $\tau_1=a_{n_0}$). Тогда

$$\sum_{n=1}^m\frac{d(f_1(b_n),f_1(a_n))}{\lambda_n}=\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{d(f_1(b_n),f_1(a_n))}{\lambda_n}+\frac{d(f_1(\tau_1),f_1(a_{n_0}))}{\lambda_{n_0}}\\+\sum_{n=n_0+1}^m\frac{d(f_1(b_n),f_1(a_n))}{\lambda_n}=\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{d(f(b_n),f(a_n))}{\lambda_n}\\+\frac{d(f(\tau_1-0),f(a_{n_0}))}{\lambda_{n_0}}+\sum_{n=n_0+1}^m\frac{d(f(b_n),f(a_n))}{\lambda_n}.\quad(10)$$

Для любого фиксированного $\varepsilon>0$ найдется такое число $s(\varepsilon)\in I$, что $a_{n_0}<s(\varepsilon)<\tau_1$ и

$$\frac{d(f(\tau_1-0),f(a_{n_0}))}{\lambda_{n_0}}\le\frac{d(f(s),f(a_{n_0}))}{\lambda_{n_0}}+\varepsilon,$$

причем s — точка непрерывности для f. Поскольку $\{[a_1,b_1],\dots,[a_{n_0-1},b_{n_0-1}],$ $[a_{n_0},s(\varepsilon)],[s(\varepsilon),\tau_1],[a_{n_0+1},b_{n_0+1}],\dots\}$ состоит из неналегающих отрезков, то с учетом последней оценки неравенство (10) примет вид

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{d(f_1(b_n),f_1(a_n))}{\lambda_n}\le\sum_{n=1}^{m}\frac{d(f(b_n),f(a_n))}{\lambda_n}+\varepsilon\le V_{\Lambda,d}(f,I)+\varepsilon.$$

Перейдя к супремуму по стандартному набору условий, имеем $V_{\Lambda,d}(f_1,I)\le V_{\Lambda,d}(f,I)+\varepsilon$. Теперь устремим ε к нулю и получим $V_{\Lambda,d}(f_1,I)\le V_{\Lambda,d}(f,I)$. Аналогично по индукции строятся отображения $f_2,f_3,\dots$, причем каждое задается рекуррентной формулой $f_k(t)=f_{k-1}(t)$, если $t\ne\tau_k$, и $f_k(\tau_k)=f_{k-1}(\tau_k-0)$, если $k\in Q$. Таким образом,

$$V_{\Lambda,d}(f_k,I)\le\dots\le V_{\Lambda,d}(f_1,I)\le V_{\Lambda,d}(f,I),$$

и утверждение доказано для конечного Q.

Пусть теперь Q счетно. Определим для $t\in I$ отображение $\mathscr{F}(t)=f(t)$, если $t\ne\tau_k$ для всех $k\in Q$, и $\mathscr{F}(\tau_k)=f(\tau_k-0)$ для $k\notin Q$. Так как последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится поточечно к $\mathscr{F}$ на I при $k\to\infty$, то по лемме 5.4(a)

$$V_{\Lambda,d}(\mathscr{F},I)\le\liminf_{k\to\infty}V_{\Lambda,d}(f_k,I)\le V_{\Lambda,d}(f,I).$$

Заметим, что $f^*(t)=\mathscr{F}(t)$ при всех $t\ne a$ и $f^*(a)=\mathscr{F}(a+0)$, так что f^* и $\mathscr{F}$ различаются лишь в точке a. В силу доказанного выше заключаем, что $V_{\Lambda,d}(f^*,I)\le V_{\Lambda,d}(\mathscr{F},I)\le V_{\Lambda,d}(f,I)$. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. 1. Так как $\mathscr{H}:\Lambda\mathrm{BV}(I,N)\to\Lambda\mathrm{BV}(I,M)$ липшицев, то выполнено неравенство $d_\Lambda(\mathscr{H}f_1,\mathscr{H}f_2)\le\mu\rho_\Lambda(f_1,f_2)$ для всех $f_1,f_2\in\Lambda\mathrm{BV}(I,N)$. В частности, из определения метрики в $\Lambda\mathrm{BV}(I,M)$ следует, что $W_{\Lambda,d}(\mathscr{H}f_1,\mathscr{H}f_2)\le\mu\rho_\Lambda(f_1,f_2)$, т. е. если $m\in\mathbb{N}$ и $[a_n,b_n]\subset I$, $n=1,\dots,m$, — произвольный набор неналегающих отрезков, то на основании (7) имеем

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{d(\mathscr{H}f_1(b_n)+\mathscr{H}f_2(a_n),\mathscr{H}f_2(b_n)+\mathscr{H}f_1(a_n))}{\lambda_n}\le\mu\rho_\Lambda(f_1,f_2),$$

или согласно определению (2)

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{d(h(b_n,f_1(b_n))+h(a_n,f_2(a_n)),h(b_n,f_2(b_n))+h(a_n,f_1(a_n)))}{\lambda_n}\le\mu\rho_\Lambda(f_1,f_2). \tag{11}$$

2. Для $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ определим липшицеву функцию $\eta_{\alpha,\beta}:\mathbb{R}\to[0,1]$ следующим образом:

$$\eta_{\alpha,\beta}(s)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad s\le\alpha,\\ \frac{s-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{если } \alpha\le s\le\beta,\\ 1, & \text{если } s\ge\beta.\end{cases}$$

Покажем, что отображение $h(t,\cdot)$ является липшицевым при всех $t\in I$, т. е. существует постоянная $\mu_0>0$ такая, что

$$d(h(t,u_1),h(t,u_2))\le\mu_0\rho(u_1,u_2),\quad t\in I,\ u_1,u_2\in N. \tag{12}$$

а) Пусть $u_1, u_2 \in N$, $a < t \le b$. В (11) положим $m = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = t$ и подставим функции вида $f_j(s) = \eta_{a,t}(s)u_j$, где $j = 1, 2$ и $s \in I$. При этом заметим, что $f_j(a) = 0$, $f_j(t) = u_j$, $j = 1, 2$, а $W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2)$ вычислим так: для $s_1, s_2 \in I$ на основании равенства (4) можем записать

$$\begin{aligned}\rho(f_1(s_1) + f_2(s_2), f_1(s_2) + f_2(s_1))\\ = \rho(\eta_{a,t}(s_1)u_1 + \eta_{a,t}(s_2)u_2, \eta_{a,t}(s_2)u_1 + \eta_{a,t}(s_1)u_2)\\ = |\eta_{a,t}(s_1) - \eta_{a,t}(s_2)|\rho(u_1, u_2).\end{aligned}$$

Подставив вместо точек s_1, s_2 точки a_n, b_n, $n = 1, \dots, m$, и просуммировав по всем отрезкам $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \dots, m$, а затем перейдя к супремуму по стандартному набору условий, получим

$$W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) = V_\Lambda(\eta_{a,t}, I)\rho(u_1, u_2) = \rho(u_1, u_2)/\lambda_1$$

в силу леммы 5.8. Тогда $\rho_\Lambda(f_1, f_2) = \rho(u_1, u_2)/\lambda_1$. Следовательно, согласно (11)

$$\begin{aligned}\frac{d(h(t, u_1), h(t, u_2))}{\lambda_1} = \frac{d(h(t, u_1) + h(a, 0), h(t, u_2) + h(a, 0))}{\lambda_1}\\ = \frac{d(h(t, f_1(t)) + h(a, f_2(a)), h(t, f_2(t)) + h(a, f_1(a)))}{\lambda_1} \le \frac{\mu}{\lambda_1}\rho(u_1, u_2).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает (12) для $t \in (a, b]$ при $\mu_0 = \mu$.

б) Пусть теперь $t = a$. Полагая в (11) $m = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = b$, подставим в неравенство функции вида $f_j(s) = (1 - \eta_{a,b}(s))u_j$, $j = 1, 2$, $s \in I$. Учитывая, что $f_j(a) = u_j$, $f_j(b) = 0$, $j = 1, 2$, и $W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) = \rho(u_1, u_2)/\lambda_1$, для правой части неравенства (11) получим

$$\rho_\Lambda(f_1, f_2) = \rho(f_1(a), f_2(a)) + W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) = (1 + 1/\lambda_1)\rho(u_1, u_2).$$

Тогда из (11) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{d(h(a, u_2), h(a, u_1))}{\lambda_1} = \frac{d(h(b, 0) + h(a, u_2), h(b, 0) + h(a, u_1))}{\lambda_1}\\ = \frac{d(h(b, f_1(b)) + h(a, f_2(a)), h(b, f_2(b)) + h(a, f_1(a)))}{\lambda_1} \le \mu\left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)\rho(u_1, u_2).\end{aligned}$$

Таким образом, для $t = a$ неравенство (12) выполнено, что и доказывает его справедливость при всех $t \in I$ с искомой константой $\mu_0 = \mu\lambda_1(1 + 1/\lambda_1)$.

3. Здесь мы покажем, что левая регуляризация функции $h(t, u)$ имеет представление $h^*(t, u) = h_0(t) + h_1(t)u$. Пусть $u_1, u_2 \in N$, $t \in (a, b]$, $m \in \mathbb{N}$ и последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ такова, что $a < a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_m < b_m < t \le b$. Подставим в неравенство (11) отображения следующего вида:

$$f_1(s) = \frac{1}{2}((\eta_m(s) + 1)u_1 + (1 - \eta_m(s))u_2), \quad f_2(s) = \frac{1}{2}(\eta_m(s)u_1 + (2 - \eta_m(s))u_2),$$

где $\eta_m(s) : I \to [0, 1]$ — липшицева функция, определенная по правилу [10, 12]

$$\eta_m(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \le s \le a_1, \\ \eta_{a_i,b_i}, & \text{если } a_i \le s \le b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ 1 - \eta_{b_i,a_{i+1}}, & \text{если } b_i \le s \le a_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ 1, & \text{если } b_m \le s \le b. \end{cases}$$

Вычислим $W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2)$. Поскольку для любых $t, s \in I$ выполнено равенство $\rho(f_1(t) + f_2(s), f_1(s) + f_2(t)) = 0$, находим, что $W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) = 0$, а поэтому

$$\rho_\Lambda(f_1, f_2) = \rho(f_1(a), f_2(a)) = \rho\left(\frac{u_1 + u_2}{2}, u_2\right) = \rho\left(\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2}, \frac{u_2}{2} + \frac{u_2}{2}\right) = \rho\left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2}\right) = \frac{\rho(u_1, u_2)}{2}.$$

Так как $f_1(a_n) = (u_1 + u_2)/2$, $f_2(a_n) = u_2$, $f_1(b_n) = u_1$, $f_2(b_n) = (u_1 + u_2)/2$ при $n = 1, \dots, m$, то неравенство (11) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{d(h(b_n, u_1) + h(a_n, u_2), h(b_n, \frac{u_1+u_2}{2}) + h(a_n, \frac{u_1+u_2}{2}))}{\lambda_n} \le \frac{\mu}{2}\rho(u_1, u_2). \qquad (13)$$

Поскольку постоянные отображения лежат в $\Lambda\mathrm{BV}(I, N)$ и значения оператора $\mathscr{H}$ лежат в $\Lambda\mathrm{BV}(I, M)$, можем заключить, что $h(\,\cdot\,, u) = \mathscr{H}(u) \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ для всех $u \in N$. Принимая во внимание определение h^*, лемму 5.9 и тот факт, что операция суммы непрерывна, и переходя в (13) к пределу при $a_1 \to t - 0$, получаем для любого $t \in (a, b]$ неравенство

$$d\left(h^*(t, u_1) + h^*(t, u_2), h^*\left(t, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) + h^*\left(t, \frac{u_1 + u_2}{2}\right)\right) \le \frac{\mu}{2}\rho(u_1, u_2)\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\lambda_n}\right)^{-1}.$$

Устремляя $m \to \infty$ и пользуясь свойствами последовательности Λ, приходим к тому, что

$$d\left(h^*(t, u_1) + h^*(t, u_2), h^*\left(t, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) + h^*\left(t, \frac{u_1 + u_2}{2}\right)\right) = 0. \qquad (14)$$

Это равенство верно и при $t = a$, если в (14) при $a < t \le b$ перейти к пределу при $t \to a + 0$ и учесть определение $h^*(a, u)$. Поскольку d — метрика в M, а $(u_1 + u_2)/2$ — элемент а.в.к. N, можем записать последнее равенство в виде

$$h^*(t, u_1) + h^*(t, u_2) = 2h^*\left(t, \frac{u_1 + u_2}{2}\right), \quad t \in I.$$

Следовательно, для каждого $t \in I$ оператор $h^*(t, \cdot\,) : N \to M$ удовлетворяет уравнению Йенсена вида

$$\frac{1}{2}(h^*(t, u_1) + h^*(t, u_2)) = h^*\left(t, \frac{u_1 + u_2}{2}\right), \quad u_1, u_2 \in N.$$

В силу [15, теорема 1, следствие 2] для каждого фиксированного $t \in I$ найдутся такие элемент $h_0(t) \in M$ и липшицев аддитивный оператор $h_1(t)(\,\cdot\,) : N \to M$, что $h^*(t, u) = h_0(t) + h_1(t)u$ для всех $t \in I$, $u \in N$.

4. Покажем, что функция $h_1(\,\cdot\,)u$ непрерывна слева на $(a, b]$ и имеет конечную вариацию. Возьмем $u_1, u_2 \in N$, $t \in I$. В силу неравенства (12)

$$d(h_1(t)u_1, h_1(t)u_2) = d(h_1(t)u_1 + h_0(t), h_1(t)u_2 + h_0(t)) = d(h^*(t, u_1), h^*(t, u_2)) \le \mu_0\rho(u_1, u_2),$$

т. е. оператор $h_1(t)(\,\cdot\,)$ липшицев, а так как он аддитивен, то $h_1(t)(\,\cdot\,) \in \mathrm{L}(N, M)$. Поскольку N и M содержат нули, то $h_1(t)(0) = 0$ для всех $t \in I$ и $h^*(t, 0) = h_0(t)$ для всех $t \in I$, поэтому $h_0 \in \Lambda\mathrm{BV}^*(I, M)$.

Зафиксируем $u \in N$. Тогда для произвольного набора неналегающих отрезков $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \dots, m$, можем записать

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{m} \frac{d(h_1(b_n)u, h_1(a_n)u)}{\lambda_n} \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{m} \frac{d(h_0(b_n) + h_1(b_n)u + h_0(a_n), h_0(a_n) + h_1(a_n)u + h_0(b_n))}{\lambda_n} \\
&\qquad\qquad = \sum_{n=1}^{m} \frac{d(h^*(b_n, u) + h_0(a_n), h^*(a_n, u) + h_0(b_n))}{\lambda_n} \\
&\qquad\qquad \le \sum_{n=1}^{m} \biggl(\frac{d(h^*(b_n, u) + h_0(a_n), h^*(a_n, u) + h_0(a_n))}{\lambda_n} \\
&\qquad\qquad\quad + \frac{d(h^*(a_n, u) + h_0(a_n), h^*(a_n, u) + h_0(b_n))}{\lambda_n} \biggr) \\
&\qquad\qquad\qquad = \sum_{n=1}^{m} \frac{d(h^*(b_n, u), h^*(a_n, u))}{\lambda_n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{d(h_0(a_n), h_0(b_n))}{\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Переходя к супремуму по стандартному набору условий, получим

$$V_{\Lambda,d}(h_1(\,\cdot\,)u, I) \le V_{\Lambda,d}(h_0, I) + V_{\Lambda,d}(h^*(\,\cdot\,, u), I) < \infty,$$

т. е. $h_1(\,\cdot\,)u \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ для всех $u \in N$.

Для $t \in (a, b]$ и $a \le s < t$ имеем

$$d(h_1(t)u, h_1(s)u) \le d(h_0(t), h_0(s)) + d(h^*(t, u), h^*(s, u)).$$

Далее, $\lim\limits_{s \to t-0} d(h_1(t)u, h_1(s)u) = 0$ в силу того, что $h_0, h^* \in \Lambda\mathrm{BV}^*(I, M)$. Последнее равенство означает, что отображение $h_1(\,\cdot\,)u$ непрерывно слева на $(a, b]$, т. е. $h_1(\,\cdot\,)u \in \Lambda\mathrm{BV}^*(I, M)$ для всех $u \in N$, что и требовалось. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Сначала получим оценку для вариации отображения fg. Пусть $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, \mathrm{L}(N, M))$, $g \in \Lambda\mathrm{BV}(I, N)$. Для любых $t, s \in I$ находим, что

$$\begin{aligned}
d((fg)(t), (fg)(s)) &= d(f(t)g(t), f(s)g(s)) \\
&\le d(f(t)g(t), f(t)g(s)) + d(f(t)g(s), f(s)g(s)) \\
&\le L(f(t))\rho(g(t), g(s)) + d(f(t)g(s) + f(s)(0), f(s)g(s) + f(t)(0)) \\
&\le L(f(t))\rho(g(t), g(s)) + d_L(f(t), f(s))|f(s)|_\rho.
\end{aligned}$$

Отсюда, если $m \in \mathbb{N}$ произвольно и $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \dots, m$, — некоторый набор неналегающих отрезков, то

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{m} d(f(b_n)g(b_n), f(a_n)g(a_n)) \\
&\qquad \le \sup_{t \in I} L(f(t)) \sum_{n=1}^{m} \frac{\rho(g(b_n), g(a_n))}{\lambda_n} + \sup_{s \in I} |g(s)|_\rho \sum_{n=1}^{m} \frac{d_L(f(b_n), f(a_n))}{\lambda_n},
\end{aligned}$$

что после взятия супремума по стандартному набору условий дает

$$V_{\Lambda,d}(fg,I) \le \sup_{t\in I} L(f(t))V_{\Lambda,\rho}(g,I) + \sup_{s\in I} |g(s)|_\rho V_{\Lambda,d_L}(f,I).$$

Полагая $\|f\|_u = \sup\limits_{t\in I} L(f(t))$ и $\|g\|_u = \sup\limits_{s\in I} |g(s)|_\rho$, перепишем предыдущее неравенство в виде

$$V_{\Lambda,d}(fg,I) \le \|f\|_u V_{\Lambda,\rho}(g,I) + \|g\|_u V_{\Lambda,d_L}(f,I). \tag{15}$$

Покажем теперь, что отображение fg имеет конечную Λ-вариацию. Так как $\rho(g(t),g(a))/\lambda_1 \le V_{\Lambda,\rho}(g,I)$, $t \in I$, и $\rho(g(t),0) \le \rho(g(a),0) + \lambda_1 V_{\Lambda,\rho}(g,I)$, то $|g(t)|_\rho \le |g(a)|_\rho + \lambda_1 V_{\Lambda,\rho}(g,I)$, поэтому

$$\|g\|_u \le |g(a)|_\rho + \lambda_1 V_{\Lambda,\rho}(g,I). \tag{16}$$

Поскольку $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I,\mathrm{L}(N,M))$, то в силу [12, лемма 5(b)] имеем $|L(f(t)) - L(f(s))| \le d_L(f(t),f(s))$ для $t,s \in I$, откуда аналогичным образом получаем

$$\|f\|_u \le L(f(a)) + \lambda_1 V_{\Lambda,d_L}(f,I). \tag{17}$$

С учетом (16) и (17), неравенство (15) можно продолжить так:

$$\begin{aligned} V_{\Lambda,d}(fg,I) &\le (L(f(a)) + \lambda_1 V_{\Lambda,d_L}(f,I))V_{\Lambda,\rho}(g,I) \\ &\qquad + V_{\Lambda,d_L}(f,I)(|g(a)|_\rho + \lambda_1 V_{\Lambda,\rho}(g,I)) \\ &= L(f(a))V_{\Lambda,\rho}(g,I) + V_{\Lambda,d_L}(f,I)|g(a)|_\rho + 2\lambda_1 V_{\Lambda,d_L}(f,I)V_{\Lambda,\rho}(g,I). \end{aligned}$$

Так как $V_{\Lambda,d_L}(f,I) < \infty$, $V_{\Lambda,\rho}(g,I) < \infty$, то $V_{\Lambda,d}(fg,I) < \infty$, т. е. $fg \in \Lambda\mathrm{BV}(I,M)$.

Теперь оценим «норму» отображения fg:

$$\begin{aligned} \|fg\|_d &= |(fg)(a)|_d + V_{\Lambda,d}(fg,I) \le d(f(a)g(a), f(a)(0)) + V_{\Lambda,d}(fg,I) \\ &\le d_L(f(a),0)(|g(a)|_\rho + V_{\Lambda,\rho}(g,I)) + V_{\Lambda,d_L}(f,I)(|g(a)|_\rho + 2\lambda_1 V_{\Lambda,\rho}(g,I)) \\ &\le \max\{1,2\lambda_1\}(|g(a)|_\rho + V_{\Lambda,\rho}(g,I))(|f(a)|_{d_L} + V_{\Lambda,d_L}(f,I)) \\ &= \max\{1,2\lambda_1\}\|f\|_{d_L}\|g\|_\rho. \end{aligned}$$

Теорема 3.2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.3. Вначале покажем, что $\mathscr{H}$ отображает $\Lambda\mathrm{BV}(I,N)$ в $\Lambda\mathrm{BV}(I,M)$. Пусть $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I,N)$. По условию $(\mathscr{H}f)(t) = h_0(t) + h_1(t)f(t)$, $t \in I$. По теореме 3.2 $h_1 f \in \Lambda\mathrm{BV}(I,M)$. Поскольку $V_{\Lambda,d}(\mathscr{H}f,I) \le V_{\Lambda,d}(h_0,I) + V_{\Lambda,d}(h_1 f,I)$, то $\mathscr{H}f \in \Lambda\mathrm{BV}(I,M)$.

Покажем, что оператор $\mathscr{H} : \Lambda\mathrm{BV}(I,N) \to \Lambda\mathrm{BV}(I,M)$ удовлетворяет условию Липшица, и оценим константу Липшица $L(\mathscr{H})$. Для всех $t \in I$ в силу инвариантности метрики d относительно сдвигов имеем

$$\begin{aligned} d_\Lambda(\mathscr{H}f_1,\mathscr{H}f_2) &= d(h_0(a) + h_1(a)f_1(a), h_0(a) + h_1(a)f_2(a)) + W_{\Lambda,d}(\mathscr{H}f_1,\mathscr{H}f_2) \\ &\le L(h_1(a))\rho(f_1(a),f_2(a)) + W_{\Lambda,d}(\mathscr{H}f_1,\mathscr{H}f_2). \end{aligned}$$

Для оценки $W_{\Lambda,d}(\mathscr{H}f_1,\mathscr{H}f_2)$ заметим, что если $t,s \in [a,b]$, то

$$\begin{aligned} &d(\mathscr{H}f_1(t) + \mathscr{H}f_2(s), \mathscr{H}f_1(s) + \mathscr{H}f_2(t)) \\ &\qquad = d(h_1(t)f_1(t) + h_1(s)f_2(s), h_1(s)f_1(s) + h_1(t)f_2(t)) \\ &\le d(h_1(t)f_1(t) + h_1(t)f_2(s) + h_1(s)f_2(s), h_1(t)f_2(t) + h_1(t)f_1(s) + h_1(s)f_2(s)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ d(h_1(t)f_2(t) + h_1(t)f_1(s) + h_1(s)f_2(s), h_1(s)f_1(s) + h_1(t)f_2(t) + h_1(t)f_2(s)) \\
&= d(h_1(t)(f_1(t) + f_2(s)), h_1(t)(f_2(t) + f_1(s))) \\
&+ d(h_1(t)f_1(s) + h_1(s)f_2(s), h_1(s)f_1(s) + h_1(t)f_2(s)) \\
&\le L(h_1(t))\rho(f_1(t) + f_2(s), f_2(t) + f_1(s)) + d_L(h_1(t), h_1(s))\rho(f_1(s), f_2(s)) \\
&\le (\sup_{t\in I} L(h_1(t)))\rho(f_1(s)+f_2(t), f_1(t)+f_2(s)) + d_L(h_1(t), h_1(s)) \sup_{s\in I}\rho(f_1(s), f_2(s)).
\end{aligned}
$$

Теперь пусть $m \in \mathbb{N}$ и $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \ldots, m$, — набор неналегающих отрезков в I. Приведенные вычисления дают

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} &\frac{d(\mathscr{H} f_1(b_n) + \mathscr{H} f_2(a_n), \mathscr{H} f_1(a_n) + \mathscr{H} f_2(b_n))}{\lambda_n} \\
&\le \sup_{t\in I} L(h_1(t)) \sum_{n=1}^{m} \frac{\rho(f_1(b_n) + f_2(a_n), f_1(a_n) + f_2(b_n))}{\lambda_n} \\
&\qquad + \sup_{s\in I}\rho(f_1(s), f_2(s)) \sum_{n=1}^{m} \frac{d_L(h_1(b_n), h_1(a_n))}{\lambda_n}.
\end{aligned}
$$

Оценим $\sup\limits_{s\in I}\rho(f_1(s), f_2(s))$. Для $a, s \in I$ справедливо неравенство

$$
\rho(f_1(s) + f_2(a), f_1(a) + f_2(s))/\lambda_1 \le W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2),
$$

и в силу свойств метрики ρ имеет место неравенство

$$
\rho(f_1(s), f_2(s)) - \rho(f_1(a), f_2(a)) \le \rho(f_1(s) + f_2(a), f_1(a) + f_2(s)),
$$

поэтому

$$
\rho(f_1(s), f_2(s)) \le \rho(f_1(a), f_2(a)) + \lambda_1 W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2).
$$

При переходе к супремуму по всем $s \in I$ неравенство сохраняется. Теперь, переходя к супремуму по всем $m \in \mathbb{N}$ и всем наборам неналегающих отрезков $[a_n, b_n] \subset I$, $n = 1, \ldots, m$, и учитывая (17), получаем

$$
\begin{aligned}
W_{\Lambda,d}(\mathscr{H} f_1, \mathscr{H} f_2) &\le \|h_1\|_u W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) + \sup_{s\in I}\rho(f_1(s), f_2(s)) V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) \\
&\le (L(h_1(a)) + \lambda_1 V_{\Lambda,d_L}(h_1, I)) W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) \\
&+ (\rho(f_1(a), f_2(a)) + \lambda_1 W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2)) V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) \\
= d_L(h_1(a), 0) W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) &+ 2\lambda_1 V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) + \rho(f_1(a), f_2(a)) V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) \\
&= |h_1(a)|_{d_L} W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) + 2\lambda_1 V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) \\
&\qquad + \rho(f_1(a), f_2(a)) V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) \equiv \mathscr{R}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
d_\Lambda(\mathscr{H} f_1, \mathscr{H} f_2) &\le d(\mathscr{H} f_1(a), \mathscr{H} f_2(a)) + \mathscr{R} \\
&= d(h_0(a) + h_1(a)f_1(a), h_0(a) + h_1(a)f_2(a)) + \mathscr{R} \\
&= L(h_1(a))\rho(f_1(a), f_2(a)) + |h_1(a)|_{d_L} W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) \\
&+ 2\lambda_1 V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2) + \rho(f_1(a), f_2(a)) V_{\Lambda,d_L}(h_1, I) \\
&= L(h_1(a))(\rho(f_1(a), f_2(a)) + W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2)) \\
&+ V_{\Lambda,d_L}(h_1, I)(\rho(f_1(a), f_2(a)) + 2\lambda_1 W_{\Lambda,\rho}(f_1, f_2)) \\
&\le \max\{1, 2\lambda_1\}\rho_\Lambda(f_1, f_2)\|h_1\|_{d_L},
\end{aligned}
$$

откуда $L(\mathscr{H}) \le \max\{1, 2\lambda_1\}\|h_1\|_{d_L}$, что и требовалось. Теорема доказана. $\square$

Замечание 5.10. Если в рамках теоремы 3.3 положить $N = M$, где M — полная м.п.г. с нулем и $\|h_1\|_{d_L} < 1/\max\{1, 2\lambda_1\}$, то принцип сжимающих отображений Банаха гарантирует существование единственного отображения $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I, M)$ такого, что $f(t) = h_1(t)f(t) + h_0(t)$ для всех $t \in I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Waterman D.* On Λ-bounded variation // Studia Math. 1976. V. 57, N 1. P. 33–45.
2. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. V. 44, N 2. P. 107–117.
3. *Maligranda L., Orlicz W.* On some properties of functions of generalized variation // Monatsh. Math. 1987. V. 104. P. 53–65.
4. *Chistyakov V. V., Solycheva O. M.* Lipschitzian operators of substitution in the algebra ΛBV // J. Differential Equations Appl. 2003. V. 9, N 3/4. P. 407–416.
5. *Goffman C., Nishiura T., Waterman D.* Homeomorphisms in analysis. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. (Math. Surveys and Monographs; V. 54).
6. *Matkowski J.* Functional equations and Nemytskii operators // Funkcial. Ekvac. 1982. V. 25, N 2. P. 127–132.
7. *Matkowski J. Miś J.* On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space $BV\langle a, b\rangle$ // Math. Nachr. 1984. V. 117. P. 155–159.
8. *Zawadzka G.* On Lipschitzian operators of substitution in the space of set-valued functions of bounded variation // Rad. Mat. 1990. V. 6. P. 279–293.
9. *Smajdor A., Smajdor W.* Jensen equation and Nemytskii operator for set-valued functions // Rad. Mat. 1989. V. 5. P. 311–320.
10. *Chistyakov V. V.* Generalized variation of mappings with applications to composition operators and multifunctions // Positivity. 2001. V. 5, N 4. P. 323–358.
11. *Chistyakov V. V.* Mappings of generalized variation and composition operators. Dynamical systems // J. Math. Sci. 2002. V. 110, N 2. P. 2455–2466.
12. *Chistyakov V. V.* Lipschitzian Nemytskii operators in the cones of mappings of bounded Winer φ-variation // Folia Math. 2004. V. 11, N 1. P. 15–39.
13. *Солычева О. М.* Многозначные липшицевы операторы суперпозиции в пространствах Уотермана ΛBV // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2003. Т. 19. С. 203–205.
14. *Чистяков В. В.* Метрические полугруппы и конусы отображений конечной вариации нескольких переменных и многозначные операторы суперпозиции // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 6. С. 757–761.
15. *Smajdor W.* Note on Jensen and Pexider functional equations // Demonstratio Math. 1999. V. 32, N 2. P. 311–320.
16. *Chistyakov V. V.* Lipschitzian superposition operators between spaces of functions of bounded generalized variation with weight // J. Appl. Anal. 2000. V. 6, N 2. P. 173–186.
17. *Hörmander L.* Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe // Arc. Mat. 1954. V. 3, N 12. P. 181–186.
18. *Rådström H.* An embedding theorem for spaces of convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3, N 1. P. 165–169.
19. *De Blasi F. S.* On differentiability of multifunctions // Pacific J. Math. 1976. V. 66. P. 67–81.

Статья поступила 25 декабря 2004 г.

Солычева Ольга Михайловна
Нижегородский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра дифференциальных уравнений и математического анализа,
пр. Гагарина, 23, корп. 2, Нижний Новгород 603950
Solycheva@list.ru