Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 510.64

О РАСШИРЕНИЯХ ЛОГИКИ НЕЛЬСОНА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ АКСИОМЕ ДАММЕТА

С. П. Одинцов

Аннотация: Полностью описан класс расширений логики, получающейся присоединением к паранепротиворечивой логике Нельсона аксиомы Даммета. Кроме того, доказано, что каждое расширение указанной логики конечно аксиоматизируемо и разрешимо и что по произвольной формуле можно узнать, какое именно расширение она аксиоматизирует.

Ключевые слова: логика Нельсона, аксиома Даммета, паранепротиворечивость, конструктивное отрицание.

§ 1. Введение

Логика называется *паранепротиворечивой*, если существует нетривиальная противоречивая теория над данной логикой. Если же таких теорий нет, то логика называется *избыточной*.

Логика Нельсона известна также под названием конструктивной логики с сильным отрицанием. Избыточный вариант этой логики, который мы будем обозначать через **N3**, был предложен Нельсоном в 1949 г. [1] как альтернативная формализация интуиционистской логики. Истинность негативного утверждения может быть установлена в интуиционистской логике только опосредованно, через сведение к абсурду. Вследствие этого интуиционистское и минимальное отрицания обладают следующим свойством, неудовлетворительным с конструктивной точки зрения. Если доказуемо отрицание конъюнкции $\neg(\varphi \wedge \psi)$, то из этого факта не следует, что одна из формул $\neg\varphi$ или $\neg\psi$ доказуема. В упомянутой работе Нельсон предлагает новую конструктивную концепцию отрицания. Основная идея состоит в том, что ложность (фальсифицируемость) атомных утверждений может быть установлена непосредственно так же, как их истинность (верифицируемость). Это приводит к двум параллельным конструктивным процедурам, сводящим истинность и ложность сложных утверждений к истинности или ложности их компонент. В результате Нельсон получает логическую систему, обладающую таким свойством:

если $\vdash\sim(\varphi \wedge \psi)$, то $\vdash\sim\varphi$ или $\vdash\sim\psi$,

где $\sim$ обозначает связку отрицания, а $\vdash$ — выводимость в системе Нельсона. В настоящее время данное свойство рассматривается как характеристическое свойство конструктивного отрицания, а отрицания нельсоновского типа называются *сильными*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4413.2006.1).

Логика **N3** и класс ее расширений изучались достаточно интенсивно. Семантика Крипке для **N3** была предложена Томасоном [2] и Рутли [3], алгебраическая семантика — Расевой в [4], где определяется многообразие N-решеток, характеризующее логику **N3**. Впоследствии удобное представление N-решеток в терминах так называемых твист-структур найдено независимо Вакареловым [5] и Фиделем [6]. Класс расширений логики **N3** изучался такими авторами, как Горанко [7], Сендлевский [8–10], Крахт [11]. Паранепротиворечивый вариант логики Нельсона, который мы обозначим через **N4**, предложен значительно позднее. Лишь в 1984 г. в работе [12] коротко упомянуто, что вычеркивание схемы аксиом $\varphi \to (\sim \varphi \to \psi)$ из системы Нельсона приводит к конструктивной логике, которая может успешно применяться для работы с противоречивой информацией. Взгляд на **N4** как на логику, удобную для представления и переработки информации, нашел отражение в ряде книг (см. [13–15]). Кроме того, логика **N4** оказалась полезной для разрешения некоторых известных логико-философских парадоксов [16, 17], однако алгебраическому изучению логики **N4** и решетки ее расширений уделено значительно меньше внимания.

Прежде чем продолжить обсуждение алгебраической семантики и решетки расширений паранепротиворечивой логики Нельсона, уточним, что следует понимать под этим названием. Проблема в том, в каком языке следует рассматривать эту логику. Избыточная логика **N3** рассматривается обычно в языке $\langle \vee, \wedge, \to, \sim, \neg \rangle$ с символами для двух отрицаний: сильного $\sim$ и интуиционистского $\neg$. Причем интуиционистское отрицание, вообще говоря, излишне, так как может быть определено через сильное. При переходе к паранепротиворечивой логике **N4** интерпретация $\neg$ неясна, поэтому кажется естественным рассматривать язык с единственным отрицанием $\sim$. Такой вариант паранепротиворечивой логики Нельсона мы будем обозначать через **N4**. Именно так понимается паранепротиворечивая логика Нельсона в работах [13, 14, 16–18]. И именно логика **N4** исследовалась в работах автора [19, 20]. В первой из этих работ логика **N4** охарактеризована в терминах **N4**-решеток, доказано, что **N4**-решетки образуют многообразие $\mathscr{V}_{\mathbf{N4}}$, наконец, установлен дуальный изоморфизм между решеткой $\mathscr{E}\mathbf{N4}$ расширений логики **N4** и решеткой подмногообразий многообразия $\mathscr{V}_{\mathbf{N4}}$. В [20] разработаны начала алгебраической теории **N4**-решеток, необходимые для исследования решетки логик $\mathscr{E}\mathbf{N4}$. Тем не менее, как выяснилось впоследствии, решетка $\mathscr{E}\mathbf{N4}$ не обладает регулярной структурой, характерной для решетки расширений паранепротиворечивой логики. Дело в том, что ввиду отсутствия аксиомы $\sim p \to (p \to q)$ в паранепротиворечивой логике различные противоречия, т. е. формулы вида $\varphi \wedge \sim \varphi$, не эквивалентны в этой логике. Это приводит к проблеме экспликации структуры противоречий. Как установлено при исследовании класса расширений минимальной логики [21], в нем можно выделить такой подкласс, что входящие в него логики эксплицируют, в некотором строго определенном смысле, структуры противоречий во всех расширениях минимальной логики. Более того, последнее обстоятельство играет очень важную роль для построения теории класса расширений минимальной логики. В решетке же $\mathscr{E}\mathbf{N4}$ не удается выделить подкласс логик, которые служат для экспликации структур противоречий во всех логиках из $\mathscr{E}\mathbf{N4}$. В [22] показано, что положение можно исправить, если ввести в язык избыточное интуиционистское отрицание наряду с паранепротиворечивым сильным отрицанием. В [22] определено консервативное расширение $\mathbf{N4}^{\perp}$ логики **N4** в языке $\langle \vee, \wedge, \to, \sim, \perp \rangle$ с дополнительными аксиомами для константы $\perp$ и исследован его класс расширений. Интуиционистское отрицание определяется в $\mathbf{N4}^{\perp}$ обычным образом: $\neg\varphi := \varphi \to \perp$. Используя два отрицания, интуиционистское и сильное, можно записать аксиому $\neg\neg(p\vee \sim p)$, которая и позволяет выделить в решетке расширений логики $\mathbf{N4}^{\perp}$ *нормальные* логики, которые эксплицируют структуры противоречий во всех расширениях $\mathbf{N4}^{\perp}$. Логика $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$ *нормальна*, если $\neg\neg(p\vee \sim p) \in L$. В результате, как показано в [22], класс расширений логики $\mathbf{N4}^{\perp}$ может быть структурирован примерно так же, как и класс расширений минимальной логики. Тем самым логика $\mathbf{N4}^{\perp}$ предпочтительнее логики $\mathbf{N4}$ в качестве паранепротиворечивого варианта логики Нельсона. Как установлено недавно [23], подобная комбинация паранепротиворечивого и избыточного отрицаний характерна также и для логического программирования. В контексте [23], где существенным образом использовались результаты из [22], интуиционистское отрицание соответствует тому, что в логическом программировании называется «отрицание как неудача»(*negation as failure* или *default negation*), а сильное отрицание — явному отрицанию (*explicit negation*).

Перейдем, наконец, к описанию задач настоящей работы. Мы планируем полностью описать решетки расширений логик $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} := \mathbf{N4}^{\perp} + \{\mathbf{C}\}$ и $\mathbf{N4C} := \mathbf{N4} + \{\mathbf{C}\}$, полученных присоединением к $\mathbf{N4}^{\perp}$ и соответственно $\mathbf{N4}$ линейной аксиомы Даммета $\mathbf{C} := (p \to q) \vee (q \to p)$. Интерес к этому результату имеет следующее объяснение.

Во-первых, сравнение структур решеток $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ и $\mathscr{E}\mathbf{N4}C$ наглядно показывает, как разрушается регулярная структура расширений логики $\mathbf{N4}^{\perp}$ при удалении интуиционистского отрицания. В частности, в классе $\mathscr{E}\mathbf{N4}$ мы не в состоянии более определить нормальные логики.

Во-вторых, заслуживает внимание сравнение структур решеток расширений $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$, $\mathscr{E}\mathbf{N3C}$ и $\mathbf{LC}$, где $\mathbf{N3C} := \mathbf{N3} + \{\mathbf{C}\}$, а $\mathbf{LC}$ — логика Даммета, получающаяся присоединением к интуиционистской логике аксиомы линейности. Логика Даммета является первым примером предтабличной логики, структура расширений которой была полностью описана [24]. Напомним, что логика называется *предтабличной*, если любое ее расширение таблично, т. е. задается конечной алгеброй. Фактически работа [24] была опубликована еще до того, как было введено понятие предтабличности, и определила интерес к предтабличным логикам как логикам, класс расширений которых допускает исчерпывающее описание. Крахт [11] описал структуру расширений логики $\mathbf{N3C}$ и показал, что, хотя эта логика не является предтабличной, она сохраняет важнейшие свойства предтабличных логик. А именно, все расширения логики $\mathbf{N3C}$ конечно аксиоматизируемы и разрешимы. Более того, по данной формуле можно эффективно определить, какое именно расширение логики $\mathbf{N3C}$ она аксиоматизирует. Мы покажем, что класс расширений логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ также удовлетворяет всем этим свойствам. Кроме того, сравнение решеток $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ и $\mathscr{E}\mathbf{N3C}$ наглядно демонстрирует степень сложности решетки расширений паранепротиворечивой логики Нельсона.

Наконец, напомним, что поводом для описания решетки расширений логики $\mathbf{N3}$C в [11] послужил вопрос Гельфонда о строении верхней части решетки расширений избыточной логики Нельсона $\mathbf{N3}$. При описании семантики логических программ с избыточным сильным отрицанием в терминах так называемых «множеств ответов» существенную роль играет логика «здесь-и-там» с сильным отрицанием, попадающая в верхнюю часть решетки $\mathscr{E}\mathbf{N3}$. Поэтому важно получить информацию и о том, какие логики лежат рядом с ней.

При характеризации паранепротиворечивых множеств ответов в [23] возникает паранепротиворечивый вариант логики «здесь-и-там» с сильным отрицанием, который попадает уже в верхнюю часть решетки $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$. Это ставит вопрос о строении верхней части этой решетки, в частности об описании решетки расширений логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$.

§ 2. Предварительные замечания

Мы будем рассматривать пропозициональные языки $\mathscr{L} := \{\vee, \wedge, \to, \sim\}$ с символом $\sim$ для сильного отрицания и $\mathscr{L}^{\perp} := \mathscr{L} \cup \{\perp\}$ с дополнительным символом для константы «абсурдность», через которую будет определяться интуционистское отрицание. Связки эквивалентности $\leftrightarrow$ и сильной эквивалентности $\Leftrightarrow$ определяются следующим образом: $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ и $\varphi \Leftrightarrow \psi := (\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\sim \psi \leftrightarrow \sim \varphi)$. Как обычно, *логика* — это множество формул, замкнутое относительно правил подстановки и *modus ponens*. Через For ($\mathrm{For}^{\perp}$) обозначаем тривиальную логику, т. е. множество всех формул языка $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}^{\perp}$). Если L — логика, а X — множество формул, то $L + X$ обозначает наименьшее расширение логики L, содержащее X. Мы используем $+$ также для обозначения операции взятия наименьшей верхней грани в решетке логик. Логики будут определяться через дедуктивные системы гильбертовского типа с единственными правилами подстановки и *modus ponens*. Поэтому для задания логики будет достаточно указать список ее аксиом. Паранепротиворечивая логика $\mathbf{N4}$ — это логика в языке $\mathscr{L}$, характеризуемая следующим списком аксиом:

A1) $p \to (q \to p)$,
A2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$,
A3) $(p \wedge q) \to p$,
A4) $(p \wedge q) \to q$,
A5) $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$,
A6) $p \to (p \vee q)$,
A7) $q \to (p \vee q)$,
A8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$,
A9) $\sim\sim p \leftrightarrow p$,
A10) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$,
A11) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$,
A12) $\sim (p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

Чтобы получить логику Нельсона $\mathbf{N3}$, следует добавить к списку аксиом логики $\mathbf{N4}$ аксиому избыточности

A13) $\sim p \to (p \to q)$.

Логика $\mathbf{N4}^{\perp}$ — это логика в языке $\mathscr{L}^{\perp}$, определяемая аксиомами A1–A12 и двумя дополнительными аксиомами для константы $\perp$:

A14) $\perp \to p$,
A15) $p \to \sim \perp$.

Согласно аксиоме A14 соотношение $\neg\varphi := \varphi \to \perp$ определяет в $\mathbf{N4}^{\perp}$ интуиционистское отрицание. Если положить $\perp := \sim (p_0 \to p_0)$, то можно доказать

$$\mathbf{N3} \vdash \perp \to p, \ p \to \sim \perp.$$

Первая формула эквивалентна частному случаю аксиомы A13 в позитивной логике, а вторая следует из эквивалентности $\sim \perp \leftrightarrow (p_0 \to p_0)$, получаемой из аксиомы A9. В частности, интуиционистское отрицание определимо в $\mathbf{N3}$. По этой причине мы не вводим в рассмотрение две различные логики $\mathbf{N3}$ и $\mathbf{N3}^{\perp}$.

Предложение 2.1 [22]. *Логика* $\mathbf{N4}^{\perp}$ *является консервативными расширением* $\mathbf{N4}$ *и интуиционистской логики.*

Говорим, что формула φ в языке $\mathscr{L}$ или $\mathscr{L}^{\perp}$ является *негативной нормальной формой* (nnf), если она содержит символ $\sim$ только перед атомными формулами. Следующая трансляция $\overline{(\cdot)}$ переводит каждую формулу φ в негативную нормальную форму:

$$\overline{p} = p, \quad \overline{\sim p} = \sim p, \quad \overline{\sim\sim \varphi} = \overline{\varphi}, \quad \overline{\varphi \diamond \psi} = \overline{\varphi} \diamond \overline{\psi},$$

$$\overline{\sim(\varphi \vee \psi)} = \overline{\sim \varphi} \wedge \overline{\sim \psi}\overline{\sim(\varphi \wedge \psi)} = \overline{\sim \varphi} \vee \overline{\sim \psi}, \quad \overline{\sim(\varphi \to \psi)} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\sim \psi},$$

где p — атомная формула и $\diamond \in \{\vee, \wedge, \to\}$.

Предложение 2.2. *Для любой формулы* φ *языка* $\mathscr{L}$ $(\mathscr{L}^{\perp})$

$$\mathbf{N4}^{\perp}(\mathbf{N4}) \vdash \varphi \leftrightarrow \overline{\varphi}.$$

Доказательство легко следует из аксиом сильного отрицания A9–A12.

Важная особенность логик Нельсона $\mathbf{N4}$ и $\mathbf{N4}^{\perp}$ состоит в том, что доказуемая эквивалентность не является отношением конгруэнции. Однако аксиомы A1–A8 представляют собой аксиоматизацию позитивной логики $\mathbf{Lp}$ (см. [25]). А это означает, что доказуемая эквивалентность обладает свойствами конгруэнции относительно позитивных связок. Точнее, для любых формул φ_0, φ_1 и позитивной формулы $\psi(p)$ с пропозициональным параметром доказуемость формулы $\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1$ в $\mathbf{N4}^{\perp}$ (или $\mathbf{N4}$) влечет доказуемость $\psi(\varphi_0) \leftrightarrow \psi(\varphi_1)$ в этой же логике. Доказуемая сильная эквивалентность $\Leftrightarrow$ будет отношением конгруэнции как в $\mathbf{N4}^{\perp}$, так и в $\mathbf{N4}$. Следующий факт хорошо известен для $\mathbf{N4}$, а доказательство для $\mathbf{N4}^{\perp}$ полностью аналогично случаю $\mathbf{N4}$.

Предложение 2.3. *Логики* $\mathbf{N4}^{\perp}$ *и* $\mathbf{N4}$ *замкнуты относительно слабого правила замены*

$$\frac{\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1 \quad \sim \varphi_0 \leftrightarrow \sim \varphi_1}{\psi(\varphi_0) \leftrightarrow \psi(\varphi_1)}.$$

Введем ряд семантических обозначений. *Матрица* — это, как обычно, пара $\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, D^{\mathscr{A}} \rangle$, где $\mathscr{A}$ — алгебра, а $D^{\mathscr{A}} \subseteq A$ — множество выделенных элементов. В случае, когда $D^{\mathscr{A}} = \{1\}$ одноэлементно, пишем $\langle \mathscr{A}, 1 \rangle$ вместо $\langle \mathscr{A}, \{1\} \rangle$ и отождествляем тем самым матрицу с алгеброй в языке с дополнительной константой 1. *Оценка* в алгебре определяется стандартным образом. Формула φ *истинна* на матрице $\mathscr{M} = \langle \mathscr{A}, D^{\mathscr{A}} \rangle$, $\mathscr{M} \models \varphi$, если $v(\varphi) \in D^{\mathscr{A}}$ для любой $\mathscr{A}$-оценки. Тождество $\varphi = \psi$ *истинно* на алгебре $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \models \varphi = \psi$, если $v(\varphi) = v(\psi)$ для любой $\mathscr{A}$-оценки. Множество $\mathrm{Th}(\mathscr{M}) := \{\varphi \mid \mathscr{M} \models \varphi\}$ называется *теорией* матрицы $\mathscr{M}$, а множество $\mathrm{Eq}(\mathscr{A}) := \{\varphi = \psi \mid \mathscr{A} \models \varphi = \psi\}$ — *эквациональной теорией* алгебры $\mathscr{A}$. Для класса матриц (алгебр) $\mathscr{K}$ определим $\mathrm{Th}(\mathscr{K}) := \bigcap\{\mathrm{Th}(\mathscr{M}) \mid \mathscr{M} \in \mathscr{K}\}$ $(\mathrm{Eq}(\mathscr{K}) := \bigcap\{\mathrm{Eq}(\mathscr{A}) \mid \mathscr{A} \in \mathscr{K}\})$.

Предполагается знакомство читателя с интуиционистской логикой $\mathbf{Li}$ и позитивной логикой $\mathbf{Lp}$, а также с алгебрами Гейтинга и импликативными решетками, задающими алгебраическую семантику для этих логик (см., например, [25]).

Пусть $\mathscr{A}$ — импликативная решетка (алгебра Гейтинга). Если $X \subseteq |\mathscr{A}|$, обозначим через $\langle X \rangle$ фильтр, порожденный множеством X. Через $F_d(\mathscr{A})$ обозначаем фильтр плотных элементов алгебры Гейтинга и фильтр

$$\langle \{a \vee (a \to b) \mid a, b \in |\mathscr{A}|\} \rangle$$

импликативной решетки. Решетка фильтров на $\mathscr{A}$ обозначается через $\mathscr{F}(\mathscr{A})$, а решетка идеалов — через $\mathscr{I}(\mathscr{A})$.

Напомним, что алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если ее решетка конгруенций содержит единственный коатом. Известно, что импликативная решетка (алгебра Гейтинга) $\mathscr{A}$ подпрямо неразложима, если и только если найдется элемент $\omega \in |\mathscr{A}|$ такой, что $\omega \neq 1$ и для любого $a \in |\mathscr{A}|$ если $a \neq 1$, то $a \leq \omega$.

Запись $h : \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{B}$ означает, что гомоморфизм h изоморфно вкладывает $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$, а $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{B}$ означает, что алгебра $\mathscr{A}$ изоморфно вкладывается в алгебру $\mathscr{B}$.

Напомним также, что любое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми алгебрами. Если $\mathscr{V}$ — многообразие, то $\mathrm{Sub}(\mathscr{V})$ обозначает решетку его подмногообразий. Если $\mathscr{K}$ — класс алгебр, то $\mathsf{H}(\mathscr{K})$ обозначает класс алгебр, изоморфных гомоморфным образам алгебр из класса $\mathscr{K}$, $\mathsf{S}(\mathscr{K})$ — класс алгебр, вложимых в алгебры из $\mathscr{K}$, наконец, $\mathsf{Up}(\mathscr{K})$ обозначает класс алгебр, изоморфных ультрапроизведениям алгебр из $\mathscr{K}$.

§ 3. Алгебраическая семантика логик N4 и N4$^\perp$

В этом параграфе будут приведены (без доказательств) основные факты о многообразиях алгебр, задающих алгебраическую семантику для логик **N4** и **N4**$^\perp$.

Определение 3.1. Пусть $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 1\rangle$ ($\langle A, \vee, \wedge, \to, \perp, 1\rangle$) — импликативная решетка (алгебра Гейтинга).

1. *Полная твист-структура* над $\mathscr{A}$ — это алгебра

$$\mathscr{A}^{\bowtie} = \langle A \times A, \vee, \wedge, \to, \sim\rangle \quad (\mathscr{A}^{\bowtie} = \langle A \times A, \vee, \wedge, \to, \sim, \perp, 1\rangle)$$

с *твист-операциями*, определенными для $(a, b), (c, d) \in A \times A$ следующим образом:

$$(a, b) \vee (c, d) := (a \vee c, b \wedge d), \quad (a, b) \wedge (c, d) := (a \wedge c, b \vee d),$$

$$(a, b) \to (c, d) := (a \to c, a \wedge d), \quad \sim (a, b) := (b, a)$$

$$(\perp := (0, 1),\ 1 := (1, 0)).$$

2. *Твист-структура* над $\mathscr{A}$ — это произвольная подалгебра $\mathscr{B}$ полной твист-структуры $\mathscr{A}^{\bowtie}$ такая, что $\pi_1(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$ (при этом также верно $\pi_2(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$), где π_i, $i = 1, 2$, обозначает проекцию прямого произведения на i-ю координату.

3. Класс всех твист-структур над $\mathscr{A}$ обозначается через $S^{\bowtie}(\mathscr{A})$.

Означивание в твист-структуре $\mathscr{B}$ определяется обычным образом как гомоморфизм алгебры формул в алгебру $\mathscr{B}$. Отношение $\mathscr{B} \models_{\bowtie} \varphi$, где φ — формула соответствующего языка, означает, что $\pi_1 v(\varphi) = 1$ для любого $\mathscr{B}$-означивания v. Для формулы $\varphi \in \mathrm{For}$ ($\mathrm{For}^\perp$) соотношение $\models_{\bowtie} \varphi$ ($\models^{\perp}_{\bowtie} \varphi$) означает, что $\mathscr{B} \models_{\bowtie} \varphi$ для любой твист-структуры $\mathscr{B}$ над импликативной решеткой (алгеброй Гейтинга).

Приводимая ниже теорема полноты в терминах твист-структур была доказана для **N4** в [19], а для **N4**$^\perp$ — в [22].

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{For}$ ($\mathrm{For}^\perp$). *Тогда*

$$\mathbf{N4} \vdash \varphi \ \Leftrightarrow \models_{\bowtie} \varphi \quad (\mathbf{N4}^\perp \vdash \varphi \ \Leftrightarrow \models^{\perp}_{\bowtie} \varphi).$$

Необходимость определять семантику для логик **N4** и $\mathbf{N4}^{\perp}$ с помощью структур, заданных на прямых произведениях алгебраических систем, напрямую связана с формой правила подстановки в этих логиках (см. предложение 3). Более традиционная семантика может быть определена следующим образом.

Определение 3.3. Алгебра $\mathscr{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \sim\rangle$ ($\langle A, \vee, \wedge, \to, \sim, \perp, 1\rangle$) называется $\mathbf{N4}$($\mathbf{N4}^{\perp}$)-*решеткой*, если выполнены следующие условия.

1. Редукт $\langle A, \vee, \wedge, \sim\rangle$ ($\langle A, \vee, \wedge, \sim, \perp, 1\rangle$) является (ограниченной) алгеброй Де Моргана, т. е. (ограниченной) дистрибутивной решеткой, удовлетворяющей тождествам $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ и $\sim\sim p = p$.

2. Отношение $\preceq$, где $a \preceq b$ означает $(a \to b) \to (a \to b) = a \to b$, является предпорядком на $\mathscr{A}$.

3. Отношение $\approx$, где $a \approx b$ эквивалентно $a \preceq b$ и $b \preceq a$, является конгруенцией относительно $\vee$, $\wedge$ и $\to$, а фактор-алгебра $\mathscr{A}_{\bowtie} := \langle A, \vee, \wedge, \to\rangle/\approx$ является импликативной решеткой (фактор-алгебра $\mathscr{A}_{\bowtie} := \langle A, \vee, \wedge, \to, \perp, 1\rangle/\approx$ является алгеброй Гейтинга).

4. Для любых $a, b \in A$ верно $\sim(a \to b) \approx a \wedge \sim b$.

5. Для любых $a, b \in A$ неравенство $a \leq b$ эквивалентно $a \preceq b$ и $\sim b \preceq \sim a$, где $\leq$ — решеточный порядок на $\mathscr{A}$.

Как видно из приводимых ниже предложений, класс **N4**- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решеток совпадает с замыканием класса твист-структур над импликативными решетками (алгебрами Гейтинга) относительно изоморфизма.

Предложение 3.4 [19, 22]. *Пусть* $\mathscr{A}$ — *импликативная решетка* (*алгебра Гейтинга*). *Если* $\mathscr{B} \in S^{\bowtie}(\mathscr{A})$, *то* $\mathscr{B}$ *является* **N4**- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)*решеткой. Более того, для любых* $(a, b), (c, d) \in |\mathscr{B}|$ *верны следующие соотношения:*

a) $(a, b) \preceq (c, d)$, *если и только если* $a \leq c$,

b) $(a, b) \approx (c, d)$, *если и только если* $a = c$,

c) $(a, b) \leq (c, d)$, *если и только если* $a \leq c$ *и* $d \leq b$,

d) *отображение* $[(a, b)]_{\approx} \mapsto a$ *является изоморфизмом импликативных решеток (алгебр Гейтинга)* $\mathscr{B}_{\bowtie}$ *и* $\mathscr{A}$.

Предложение 3.5 [19, 22]. *Для любой* **N4**- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)*решетки* $\mathscr{A}$ *отображение*

$$a \mapsto ([a]_{\approx}, [\sim a]_{\approx})$$

является изоморфным вложением $\mathscr{A}$ *в* $(\mathscr{A}_{\bowtie})^{\bowtie}$.

Оказывается, истинность формулы $\varphi \in \mathrm{For}$ ($\mathrm{For}^{\perp}$) на твист-структуре $\mathscr{A}$ эквивалентна выполнимости тождества $\varphi \to \varphi = \varphi$ на **N4**- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решетке $\mathscr{A}$, что приводит к следующей теореме о полноте.

Теорема 3.6 [19, 22]. *Для любой* $\varphi \in \mathrm{For}$ ($\mathrm{For}^{\perp}$) *выполняется* **N4** ($\mathbf{N4}^{\perp}$) $\vdash \varphi$, *если и только если* $\mathscr{A} \models \varphi \to \varphi = \varphi$ *для любой* **N4**- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)*решетки* $\mathscr{A}$.

В дальнейшем для **N4**- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решетки $\mathscr{A}$ вместо $\mathscr{A} \models \varphi \to \varphi = \varphi$ будем писать $\mathscr{A} \models \varphi$.

В [19, 22] установлено, что класс всех **N4**- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решеток образует многообразие $\mathscr{V}_{\mathbf{N4}}$ ($\mathscr{V}_{\mathbf{N4}^{\perp}}$). Более того, эти многообразия конгруэнц-дистрибутивны, поскольку на них выполняются решеточные тождества (см. [26]).

Отображения $Var : \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp} \to \mathrm{Sub}(\mathscr{V}_{\mathbf{N4}^{\perp}})$ и $L : \mathrm{Sub}(\mathscr{V}_{\mathbf{N4}^{\perp}}) \to \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$ определяются следующим образом. Для логики $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$ полагаем

$$Var(L) := \{\mathscr{A} \mid \varphi \to \varphi = \varphi \in \mathrm{Eq}(\mathscr{A}) \text{ для всех } \varphi \in L\}.$$

Ясно, что $Var(L) \in \mathrm{Sub}(\mathscr{V}_{\mathbf{N4}^{\perp}})$. Для любого $V \in \mathrm{Sub}(\mathscr{V}_{\mathbf{N4}^{\perp}})$ определим множество формул

$$L(V) := \{\varphi \mid \varphi \to \varphi = \varphi \in \mathrm{Eq}(V)\}.$$

Тогда $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$.

Теорема 3.7 [22]. *Отображения Var и L являются взаимно обратными дуальными решеточными изоморфизмами между решетками $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$ и $\mathrm{Sub}(\mathscr{V}_{\mathbf{N4}^{\perp}})$.*

Аналогичный результат справедлив и для решеток $\mathscr{E}\mathbf{N4}$ и $\mathrm{Sub}(\mathscr{V}_{\mathbf{N4}})$.

Пусть $\mathscr{A}$ — импликативная решетка (алгебра Гейтинга), $\nabla \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$, $F_d(\mathscr{A}) \subseteq \nabla$, $\Delta \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$. Несложно проверить, что множество

$$Tw(\mathscr{A}, \nabla, \Delta) = \{(a, b) \mid a, b \in A, a \vee b \in \nabla, a \wedge b \in \Delta\}$$

замкнуто относительно твист-операций. Значит, $S^{\bowtie}(\mathscr{A})$ содержит твист-структуру с таким универсумом, которую мы будем обозначать также через $Tw(\mathscr{A}, \nabla, \Delta)$. Оказывается, что множество $S^{\bowtie}(\mathscr{A})$ исчерпывается структурами такого вида.

Предложение 3.8 [20, 22]. *Пусть $\mathscr{A}$ — импликативная решетка* (*алгебра Гейтинга*) *и $\mathscr{B} \in S^{\bowtie}(\mathscr{A})$. Определим*

$$I(\mathscr{B}) := \{a \vee \sim a \mid a \in B\}, \quad \nabla(\mathscr{B}) := \pi_1(I(\mathscr{B})), \quad \Delta(\mathscr{B}) := \pi_2(I(\mathscr{B})).$$

Тогда $\nabla(\mathscr{B}) \supseteq F_d(\mathscr{A})$, $\nabla(\mathscr{B}) \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$, $\Delta(\mathscr{B}) \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$. Более того,

$$\mathscr{B} = Tw(\mathscr{A}, \nabla(\mathscr{B}), \Delta(\mathscr{B})).$$

Для произвольной $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решетки $\mathscr{A}$ положим

$$\nabla(\mathscr{A}) := \{[a \vee \sim a]_{\approx} \mid a \in A\} \quad \text{и} \quad \Delta(\mathscr{A}) := \{[a \wedge \sim a]_{\approx} \mid a \in A\}).$$

Тогда $\mathscr{A} \cong Tw(\mathscr{A}_{\bowtie}, \nabla(\mathscr{A}), \Delta(\mathscr{A}))$.

Теперь рассмотрим гомоморфизмы и конгруэнции $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решеток. Оказывается, далеко не каждый решеточный фильтр на $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решетке задает конгруэнцию, поэтому возникает необходимость выделить фильтры специального вида, соответствующие конгруэнциям.

Как и для N-решеток [4, 25], определим *специальный фильтр* на $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решетке $\mathscr{A}$ как непустое множество $\nabla \subseteq |\mathscr{A}|$ такое, что 1) $a, b \in \nabla$ влечет $a \wedge b \in \nabla$; 2) $a \in \nabla$ и $a \preceq b$ влекут $b \in \nabla$. Решетку всех специальных фильтров на $\mathscr{A}$ обозначим через $\mathscr{F}^s(\mathscr{A})$. Если $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — гомоморфизм $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решеток, то определим его *ядро* как $\mathrm{Ker}(h) := h^{-1}(D^{\mathscr{B}})$, где $D^{\mathscr{B}} := \{a \mid a \in |\mathscr{B}|, a \to a = a\}$.

Предложение 3.9 [20, 22]. *Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решетки.*

1. *$D^{\mathscr{A}}$ является наименьшим элементом $\mathscr{F}^s(\mathscr{A})$.*
2. *Если $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — эпиморфизм, то $\mathrm{Ker}(h) \in \mathscr{F}^s(\mathscr{A})$. При этом $h(a) = h(b)$, если и только если $a \Leftrightarrow b \in \mathrm{Ker}(h)$.*
3. *Если $\nabla \in \mathscr{F}^s(\mathscr{A})$, то отношение $\approx_{\nabla} := \{(a, b) \mid a \Leftrightarrow b \in \nabla\}$ является конгруенцией на $\mathscr{A}$ и $\nabla = \mathrm{Ker}(h)$, где $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A} / \approx_{\nabla}$ — канонический эпиморфизм.*

Пусть $\mathscr{B} \in S^{\bowtie}(\mathscr{A})$. Для фильтра $\nabla \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$ полагаем $\nabla^{\bowtie} := \pi_1^{-1}(\nabla) = \{(a, b) \in A \times A \mid a \in \nabla\}$. Для любого $\nabla \in \mathscr{F}^s(\mathscr{B})$ определим $\nabla_{\bowtie} := \pi_1(\nabla)$.

Предложение 3.10. *Решетки* $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ *и* $\mathscr{F}^s(\mathscr{B})$ *изоморфны, причем отображения* $\nabla \mapsto \nabla^{\bowtie}$, $\nabla \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$, *и* $\nabla \mapsto \nabla_{\bowtie}$, $\nabla \in \mathscr{F}^s(\mathscr{B})$, *задают их взаимно обратные изоморфизмы.*

Из этого предложения и возможности представления **N4**- (**N4**$^{\perp}$-)решеток в виде твист-структур вытекает, что решетки конгуенций алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}_{\bowtie}$ изоморфны. В частности, имеет место

Следствие 3.11. *Пусть* $\mathscr{A}$ — **N4**- (**N4**$^{\perp}$-)*решетка. Она подпрямо неразложима, если и только если импликативная решетка (алгебра Гейтинга)* $\mathscr{A}_{\bowtie}$ *подпрямо неразложима.*

Если $h : \mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}_1$ — гомоморфизм твист-структур $\mathscr{A}_i \in S^{\bowtie}(\mathscr{B}_i)$, то $h_{\bowtie} := \pi_1 h$ — гомоморфизм импликативных решеток (алгебр Гейтинга) $h_{\bowtie} : \mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}_1$. Для произвольных **N4**- (**N4**$^{\perp}$-)решеток $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ поступаем следующим образом. Для каждого гомоморфизма $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ определяем отображение $h_{\bowtie} : \mathscr{A}_{\bowtie} \to \mathscr{B}_{\bowtie}$ правилом $h_{\bowtie}([a]_{\approx}) := [h(a)]_{\approx}$. Корректность этого определения следует из того, что h — гомоморфизм, а $\approx$ — конгруэнция относительно позитивных операций. Конгруэнтные свойства отношения $\approx$ гарантируют также, что $h_{\bowtie}$ — гомоморфизм алгебр Гейтинга. Предложение 3.10 переводится на язык гомоморфизмов следующим образом.

Предложение 3.12. *Пусть* $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{B}$ — **N4**- (**N4**$^{\perp}$-)*решетки, а* $h^i : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $i = 1, 2$, — *гомоморфизмы такие, что* $h^1_{\bowtie} = h^2_{\bowtie}$. *Тогда* $h^1 = h^2$.

Приведем несколько полезных приложений представления твист-структур в виде $Tw(\mathscr{A}, \nabla, \Delta)$.

Предложение 3.13. *Пусть* $\mathscr{B}$ — *импликативная решетка или алгебра Гейтинга,* $F \in \mathscr{F}(\mathscr{B})$. *Если* $\mathscr{A} \in S^{\bowtie}(\mathscr{B})$ *и* $\mathscr{A} = Tw(\mathscr{B}, \nabla, \Delta)$, *то*

$$\mathscr{A}/F^{\bowtie} \cong Tw(\mathscr{B}/F, \nabla/F, \Delta/F).$$

Предложение 3.14. *Пусть* $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{B}$ — **N4**- (**N4**$^{\perp}$-)*решетки. Существует гомоморфизм (мономорфизм)* $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, *если и только если существует гомоморфизм (мономорфизм)* $g : \mathscr{A}_{\bowtie} \to \mathscr{B}_{\bowtie}$ *такой, что* $g(\nabla(\mathscr{A})) \subseteq \nabla(\mathscr{B})$ *и* $g(\Delta(\mathscr{A})) \subseteq \Delta(\mathscr{B})$.

Предложение 3.15. 1. *Пусть* $\mathscr{B} \in S^{\bowtie}(\mathscr{A})$. *Тогда* $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{\bowtie}$, *если и только если* $\nabla(\mathscr{B}) = \Delta(\mathscr{B}) = A$.

2. *Пусть* $\mathscr{A}_0$ *и* $\mathscr{A}_1$ — *алгебры Гейтинга (импликативные решетки),* $\nabla_i \in \mathscr{F}(\mathscr{A}_i)$ *и* $\Delta_i \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_i)$, $i = 0, 1$. *Более того, пусть* $\mathscr{A}_0 \leq \mathscr{A}_1$, $\nabla_0 \subseteq \nabla_1$ *и* $\Delta_0 \subseteq \Delta_1$. *Тогда*

$$Tw(\mathscr{A}_0, \nabla_0, \Delta_0) \leq Tw(\mathscr{A}_1, \nabla_1, \Delta_1).$$

3. *Пусть* $\mathscr{B} \in S^{\bowtie}(\mathscr{A})$ *и* $\mathscr{C} \leq \mathscr{B}$. *Тогда* $\mathscr{C} = Tw(\mathscr{A}_1, \nabla, \Delta)$, *где* $\mathscr{A}_1 \leq \mathscr{A}$, $\nabla \in \mathscr{F}(\mathscr{A}_1)$ *и* $\nabla \subseteq \nabla(\mathscr{B})$, $\Delta \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)$ *и* $\Delta \subseteq \Delta(\mathscr{B})$.

Как отмечено в [22], при изучении структуры решетки $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$ важнейшую роль играют следующие подклассы:

$$\mathsf{Exp} := \{L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp} \mid \sim p \to (p \to q) \in L\}, \quad \mathsf{Nor} := \{L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp} \mid \neg\neg(p \vee \sim p) \in L\},$$
$$\mathsf{Gen} := \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp} \setminus (\mathsf{Exp} \cup \mathsf{Nor}).$$

Пусть $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$. Говорят, что логика L *избыточна*, если $L \in \mathsf{Exp}$. Назовем L *нормальной*, если $L \in \mathsf{Nor}$. Наконец, если $L \in \mathsf{Gen}$, то говорят, что L — логика *общего вида*.

Лемма 3.16. *Пусть $\mathscr{A}$ — $\mathbf{N4}^{\perp}$-решетка.*

1. $\mathscr{A} \models \sim p \to (p \to q)$, *если и только если* $\Delta(\mathscr{A}) = \{0\}$.
2. $\mathscr{A} \models \neg\neg(p \vee \sim p)$, *если и только если* $\nabla(\mathscr{A}) = F_d(\mathscr{A})$.

Из этой леммы немедленно следует семантическая характеризация логик из классов Exp и $\mathbf{Nor}$.

Предложение 3.17. *Пусть* $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}$.

1. $L \in \mathsf{Exp}$, *если и только если для любой* $\mathbf{N4}^{\perp}$*-решетки* $\mathscr{A}$ *такой, что* $\mathscr{A} \models L$, *верно* $\Delta(\mathscr{A}) = \{0\}$.
2. $L \in \mathsf{Nor}$, *если и только если для любой* $\mathbf{N4}^{\perp}$*-решетки* $\mathscr{A}$ *такой, что* $\mathscr{A} \models L$, *верно* $\nabla(\mathscr{A}) = F_d(\mathscr{A})$.

В решетке $\mathscr{E}\mathbf{N4}$ по-прежнему можно выделить класс Exp избыточных логик как логик с аксиомой $\sim p \to (p \to q)$. И по-прежнему эти логики характеризуются как логики, в моделях которых идеал $\Delta(\mathscr{A})$ имеет наименьшее возможное значение.

Предложение 3.18. *Пусть* $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}$. *Тогда* $L \in \mathsf{Exp}$, *если и только если для любой* $\mathbf{N4}$*-решетки* $\mathscr{A}$ *такой, что* $\mathscr{A} \models L$, *импликативная решетка* $\mathscr{A}_{\bowtie}$ *содержит наименьший элемент* 0 *и верно* $\Delta(\mathscr{A}) = \{0\}$.

Можно попытаться определить в $\mathscr{E}\mathbf{N4}$ нормальные логики как логики, в моделях которых фильтр $\nabla(\mathscr{A})$ имеет наименьшее возможное значение $\nabla(\mathscr{A}) = F_d(\mathscr{A})$. Однако, как будет показано в последнем параграфе, $\mathbf{N4}$-решетки с условием $\nabla(\mathscr{A}) = F_d(\mathscr{A})$ не образуют многообразия.

§ 4. Структура решетки $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$

Напомним, что класс $\mathscr{E}\mathbf{LC}$ расширений логики Даммета $\mathbf{LC} = \mathbf{Li} + \{(p \to q) \vee (q \to p)\}$ имеет следующую структуру. Пусть ch_n — линейно упорядоченная n-элементная алгебра Гейтинга. Алгебры ch_n — это все с точностью до изоморфизма подпрямо неразложимые модели логики $\mathbf{LC}$. Очевидно, для любого $n \in \omega$ имеем вложение $ch_n \hookrightarrow ch_{n+1}$. Поэтому каждое собственное $\mathbf{LC}$-расширение имеет вид Lch_n для некоторого $n \in \omega$, а решетка $\mathscr{E}\mathbf{LC}$ изоморфна линейному порядку типа $(\omega + 1)^*$ (рис. 1).

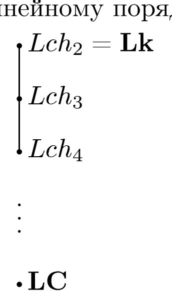

Рис. 1.

Пусть дана логика L. Рассмотрим класс $\mathrm{Mod}_{fsi}(L)$ ее конечно порожденных подпрямо неразложимых моделей. Определим на $\mathrm{Mod}_{fsi}(L)$ предпорядок:

$$\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B} \quad \Leftrightarrow \quad L\mathscr{A} \subseteq L\mathscr{B}.$$

Следующий результат Йонссона хорошо известен. В конгруенц-дистрибутивном многообразии все подпрямо неразложимые элементы подмногообразия, порожденного классом алгебр $\mathscr{K}$, принадлежат классу $\mathsf{HSUp}(\mathscr{K})$. Если алгебра $\mathscr{A}$ конечна, то $\mathsf{HSUp}(\{\mathscr{A}\}) = \mathsf{HS}(\{\mathscr{A}\})$. Многообразия $\mathbf{N4}$-алгебр и $\mathbf{N4}^{\perp}$-алгебр конгруенц-дистрибутивны, поэтому для любых конечных $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)алгебр верна эквивалентность

$$L\mathscr{A} \subseteq L\mathscr{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{B} \in \mathsf{HS}(\{\mathscr{A}\}).$$

Как отмечено выше, все конечно порожденные подпрямо неразложимые модели логики Даммета $\mathbf{LC}$ конечны. Согласно следствию 1 $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)решетка $\mathscr{A}$ подпрямо неразложима, если и только если $\mathscr{A}_{\bowtie}$ подпрямо неразложима. Докажем, что из конечной порожденности $\mathscr{A}$ следует, что $\mathscr{A}_{\bowtie}$ также конечно порождена.

Лемма 4.1. *Если* $\mathbf{N4}$- ($\mathbf{N4}^{\perp}$-)*решетка* $\mathscr{A}$ *конечно порождена, то алгебра Гейтинга* $\mathscr{A}_{\bowtie}$ *конечно порождена.*

Доказательство. Если $\mathscr{A}$ порождается множеством $\{a_1, \dots, a_n\}$, то ее редукт $\langle A, \vee, \wedge, \to, \perp, 1\rangle$ порождается множеством $\{a_1, \dots, a_n, \sim a_1, \dots, \sim a_n\}$. Это следует из того, что в $\mathbf{N4}^{\perp}$ любая формула эквивалентна nnf. По определению $\mathscr{A}_{\bowtie} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \perp, 1\rangle / \approx$. Следовательно, $\mathscr{A}_{\bowtie}$ порождается множеством $\{[a_1]_{\approx}, \dots, [a_n]_{\approx}, [\sim a_1]_{\approx}, \dots, [\sim a_n]_{\approx}\}$. $\square$

Таким образом, каждая конечно порожденная подпрямо неразложимая модель логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ изоморфна твист-структуре над алгеброй ch_n для подходящего $n \in \omega$, поэтому все подпрямо неразложимые модели логик $\mathbf{N4C}$ и $\mathbf{N4C}^{\perp}$ также конечны. Мы будем рассматривать только расширения логик $\mathbf{N4C}$ и $\mathbf{N4C}^{\perp}$, поэтому всюду в дальнейшем для $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{Mod}_{fsi}(L)$ верна эквивалентность

$$\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{B} \in \mathsf{HS}(\{\mathscr{A}\}).$$

Каждое расширение логики L определяется классом своих конечно порожденных подпрямо неразложимых моделей. Этот класс образует конус предпорядка $(\mathrm{Mod}_{fsi}(L), \sqsubseteq)$. Разумеется, в общем случае не каждый конус в $(\mathrm{Mod}_{fsi}(L), \sqsubseteq)$ может быть представлен в виде $\mathrm{Mod}_{fsi}(L')$ для подходящего L-расширения L'. Однако мы увидим, что для любого конуса U предпорядка $(\mathrm{Mod}_{fsi}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}), \sqsubseteq)$ существует логика $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ такая, что $\mathrm{Mod}_{fsi}(L) = U$. Разумеется, конусы предпорядка $(\mathrm{Mod}_{fsi}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}), \sqsubseteq)$ замкнуты относительно изоморфизма. Заметим, что отношение изоморфизма совпадает с эквивалентностью, задаваемой предпорядком $\sqsubseteq$. Профакторизовав $(\mathrm{Mod}_{fsi}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}), \sqsubseteq)$ по отношению изоморфизма, получим частичный порядок типов изоморфизма подпрямо неразложимых моделей логики $\mathbf{N4}^{\perp}$, который мы обозначим через $(\mathrm{Mod}^*_{fsi}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}), \sqsubseteq^*)$. Таким образом, описание структуры решетки $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ будет сведено к описанию частичного порядка $(\mathrm{Mod}^*_{fsi}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}), \sqsubseteq^*)$.

Пусть $|ch_n| = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $0 \leq 1 \leq \dots \leq n-1$. Идеалы алгебры ch_n — это в точности непустые начальные сегменты ch_n. Фильтр $F_d(ch_n)$ равняется $\{1, \dots, n-1\}$. Таком образом, если $\mathscr{A} = Tw(ch_n, \nabla, \Delta)$, то $\nabla = ch_n$ или $\nabla = F_d(ch_n)$ и $\Delta = \{0, \dots, m\}$ для некоторого $m \leq n-1$. Мы доказали тем самым, что $|S^{\bowtie}(ch_n)| = 2n$. Обозначим

$$\mathsf{ch}_n(k, +) := Tw(ch_n, ch_n, \{0, \dots, k-1\}),$$

$$\mathsf{ch}_n(k, -) := Tw(ch_n, F_d(ch_n), \{0, \dots, k-1\}),$$

где $1 \leq k \leq n$.

Пусть $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in S^{\bowtie}(ch_n)$. Как следует из предложений 3.10 и 3.13, каждый собственный гомоморфный образ алгебры $\mathscr{B}$ изоморфен твист-структуре над собственным гомоморфным образом алгебры ch_n, т. е. над алгеброй ch_m, $m < n$. Поэтому $\mathscr{B} \sqsubseteq \mathscr{A}$, если и только если $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{B}$. Таким образом, из предложения 3.15 следует, что $\mathscr{B} \sqsubseteq \mathscr{A}$, если и только если $|\nabla(\mathscr{A})| \leq |\nabla(\mathscr{B})|$ и $|\Delta(\mathscr{A})| \leq |\Delta(\mathscr{B})|$. Структура семейства $S^{\bowtie}(ch_n)$, упорядоченного отношением $\sqsubseteq$, представлена на рис. 2.

Предложение 3.12 утверждает, что гомоморфный образ $h(\mathscr{A})$ $\mathbf{N4}^{\perp}$-решетки $\mathscr{A}$ однозначно определяется гомоморфным образом $h_{\bowtie}(\mathscr{A}_{\bowtie})$ соответствующей алгебры Гейтинга. Поскольку каждый фильтр алгебры ch_n имеет вид $F_m :=$

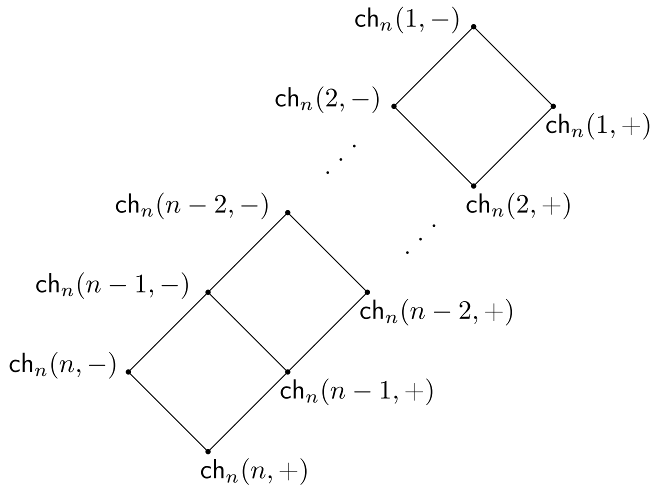

Рис. 2.

$\{m,\ldots,n-1\}$ и $ch_n/F_m \cong ch_{m+1}$, предложение 3.13 позволяет заключить, что твист-структура $\mathsf{ch}_n(k,\epsilon)$ имеет следующие фактор-структуры:

$$\mathsf{ch}_n(k,\epsilon)/(F_m)^{\bowtie} \cong \mathsf{ch}_{m+1}(\min\{k,m+1\},\epsilon),$$

где $m \leq n-1$, $\epsilon \in \{+,-\}$.

Рассмотрим вопрос о вложении твист-структур вида $\mathsf{ch}_n(k,\epsilon)$. Если $h : \mathsf{ch}_{n_1}(k_1,\epsilon_1) \hookrightarrow \mathsf{ch}_{n_2}(k_2,\epsilon_2)$, то согласно предложению 3.14 гомоморфизм $h_{\bowtie}$ является вложением ch_{n_1} в ch_{n_2} и имеют место включения

$$h_{\bowtie}(\nabla(\mathsf{ch}_{n_1}(k_1,\epsilon_1))) \subseteq \nabla(\mathsf{ch}_{n_2}(k_2,\epsilon_2)), \quad h_{\bowtie}(\Delta(\mathsf{ch}_{n_1}(k_1,\epsilon_1))) \subseteq \Delta(\mathsf{ch}_{n_2}(k_2,\epsilon_2)).$$

Следовательно, $n_1 \leq n_2$ и $k_1 \leq k_2$. Из $h_{\bowtie}(0) = 0$ и первого из включений получаем, что $\epsilon_1 = +$ влечет $\epsilon_2 = +$.

Полагаем $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$, если $\epsilon_1 = \epsilon_2$ или $\epsilon_1 = -$ и $\epsilon_2 = +$.

Легко видеть, что условия $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$, $n_1 \leq n_2$ и $k_1 \leq k_2$ гарантируют существование вложения $g : ch_{n_1} \hookrightarrow ch_{n_2}$ такого, что $g(\{0,\ldots,k_1-1\}) \subseteq \{0,\ldots,k_2-1\}$. Опять по предложению 3.14 существует вложение

$$h : \mathsf{ch}_{n_1}(k_1,\epsilon_1) \hookrightarrow \mathsf{ch}_{n_2}(k_2,\epsilon_2)$$

такое, что $h_{\bowtie} = g$.

Тем самым доказана

Лемма 4.2. *Пусть* $n_1,n_2,k_1,k_2 \in \omega$, $k_1 \leq n_1$, $k_2 \leq n_2$ *и* $\epsilon_1,\epsilon_2 \in \{+,-\}$.

1. $\mathsf{ch}_{n_1}(k_1,\epsilon_1) \hookrightarrow \mathsf{ch}_{n_2}(k_2,\epsilon_2)$, *если и только если* $n_1 \leq n_2$, $k_1 \leq k_2$ *и* $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$.

2. *Если* $\mathsf{ch}_{n_1}(k_1,\epsilon_1) \in \mathsf{H}(\mathsf{ch}_{n_2}(k_2,\epsilon_2))$, *то* $\mathsf{ch}_{n_1}(k_1,\epsilon_1) \hookrightarrow \mathsf{ch}_{n_2}(k_2,\epsilon_2)$.

Пусть $\mathbf{T} := \bigcup_{n\in\omega} S^{\bowtie}(ch_n)$. Используя лемму 4.2 и структуру семейства $(S^{\bowtie}(ch_n), \sqsubseteq)$, представленную на рис. 2, заключаем, что семейство $\mathbf{T}$ упорядочивается отношением $\sqsubseteq$ так, как это представлено на рис. 3.

Поскольку каждая конечно порожденная подпрямо неразложимая модель логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ изоморфна некоторому элементу $\mathbf{T}$, приходим к следующему заключению.

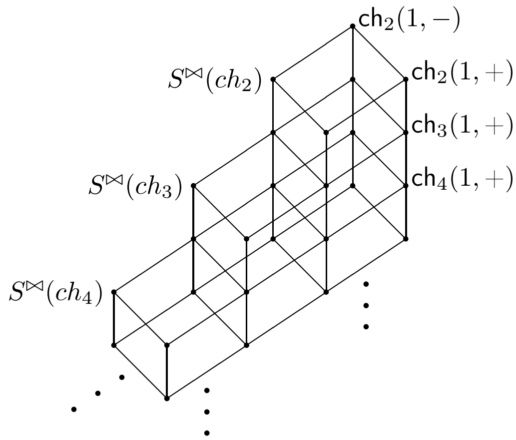

Рис. 3.

Предложение 4.3. *Предпорядок* $(\mathrm{Mod}^*_{fsi}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}), \sqsubseteq^*)$ *имеет структуру, представленную на рис. 3.*

Опишем конусы частичного порядка $(\mathbf{T}, \sqsubseteq)$.

Пусть $\mathscr{A} \in \mathbf{T}$. Если $\mathscr{A} = \mathsf{ch}_n(k,\epsilon)$, то говорим, что $\mathscr{A}$ типа (n,k,ϵ), и пишем $tp(\mathscr{A}) = (n,k,\epsilon)$. Через $tp_i(\mathscr{A})$, $i = 1,2,3$, обозначим i-ю компоненту типа $tp(\mathscr{A})$.

Для конуса U порядка $(\mathbf{T}, \sqsubseteq)$ и $i = 1,2$ полагаем

$$tp_i^-(U) := \max\{tp_i(\mathscr{A}) \mid \mathscr{A} \in U \text{ и } tp_3(\mathscr{A}) = -\},$$
$$tp_i^+(U) := \max\{tp_i(\mathscr{A}) \mid \mathscr{A} \in U \text{ и } tp_3(\mathscr{A}) = +\}.$$

Ясно, что $tp_i^+(U) \le tp_i^-(U)$ для $i = 1,2$.

Далее, выделим следующие конусы:

$$\mathbf{T}^- := \{\mathscr{A} \in \mathbf{T} \mid tp_3(\mathscr{A}) = -\}, \quad \mathbf{T}_k := \{\mathscr{A} \in \mathbf{T} \mid tp_2(\mathscr{A}) \le k\},$$
$$\mathbf{T}_k^- := \{\mathscr{A} \in \mathbf{T} \mid tp_3(\mathscr{A}) = - \text{ и } tp_2(\mathscr{A}) \le k\}.$$

Предложение 4.4. *Каждый конус порядка* $(\mathbf{T}, \sqsubseteq)$ *представим в виде* $U \cup V$, *где* U *— конечный конус, а* V *— один из следующих конусов:*

$$\varnothing, \mathbf{T}, \mathbf{T}^-, \mathbf{T}_k, \mathbf{T}_k^-, \mathbf{T}^- \cup \mathbf{T}_k, \mathbf{T}_k \cup \mathbf{T}_{k'}^-,$$

где $k < k'$.

Доказательство. Пусть U — конус порядка $(\mathbf{T}, \sqsubseteq)$. Если $tp_1^-(U) < \omega$ и $tp_2^-(U) < \omega$, то, как легко видно из рис. 3, конус U конечен или пуст.

Если $tp_1^+(U) = \omega$ и $tp_2^+(U) = \omega$, то $U = \mathbf{T}$.

Пусть $tp_1^-(U) = \omega$ и $tp_2^-(U) = \omega$. Тогда $\mathbf{T}^- \subseteq U$. Если, кроме того, $tp_1^+(U) < \omega$ и $tp_2^+(U) < \omega$, то $U = \mathbf{T}^- \cap U'$, где U' — конечный конус.

Если $tp_1^+(U) = \omega$ и $tp_2^+(U) < \omega$, то существует $m \le tp_2^+(U)$ такое, что $\mathsf{ch}_n(m,+) \in U$ для всех n. Пусть

$$k := \max\{m \mid \mathsf{ch}_n(m,+) \in U \text{ для всех } n\}.$$

Тогда $U = \mathbf{T}^- \cup \mathbf{T}_k \cup U'$, где U' — конечный конус.

Пусть $tp_1^-(U) = \omega$ и $tp_2^-(U) < \omega$. Полагаем

$$k := \max\{m \mid \mathsf{ch}_n(m,-) \in U \text{ для всех } n\}.$$

Тогда $\mathbf{T}_k^- \subseteq U$ и, повторяя предшествующие рассуждения, получим либо $U = \mathbf{T}_k^- \cup U'$, либо $U = \mathbf{T}_k^- \cup \mathbf{T}_{k'} \cup U'$, $k' < k$, либо $U = \mathbf{T}_k \cup U'$, где U' — конечный конус. $\square$

Теорема 4.5. *Решетка $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ изоморфна решетке конусов частичного порядка, представленного на рис. 3. Все элементы решетки $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ конечно аксиоматизируемы и разрешимы.*

Доказательство. Ввиду предложения 4.3 решетка $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ вкладывается в решетку конусов частичного порядка, представленного на рис. 3. Мы должны доказать, что данное вложение является также отображением «на», т. е. что для любого конуса порядка $(\mathbf{T}, \sqsubseteq)$ найдется логика $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ такая, что $\mathbf{T}(L) := \mathrm{Mod}_{fsi}(L) \cap \mathbf{T} = U$. Заметим, что, поскольку $\mathbf{T}$ содержит все с точностью до изоморфизма конечно порожденные подпрямо неразложимые модели логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$, из равенства $\mathbf{T}(L) = U$ следует $LU = L$.

Сначала заметим, что пустой конус соответствует тривиальной логике $\mathrm{For}^{\perp}$. Как отмечено в [22], любое нетривиальное расширение логики $\mathbf{N4}^{\perp}$ непротиворечиво, поэтому любое противоречие аксиоматизирует $\mathrm{For}^{\perp}$ над $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$. Считаем $p\wedge \sim p$ «стандартной» аксиомой тривиальной логики.

Теперь установим равенство $\mathbf{T}^{-} = \mathbf{T}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{\neg\neg(p\vee \sim p)\})$. По определению $\mathbf{T}^{-}$ содержит в точности те алгебры из $\mathbf{T}$, которые удовлетворяют условию $\nabla(\mathscr{A}) = F_d(\mathscr{A})$. Согласно лемме 3.16 это условие эквивалентно выполнимости формулы $\neg\neg(p\vee \sim p)$ на $\mathscr{A}$, откуда и следует требуемое равенство.

Рассмотрим формулы

$$D_n := \bigvee_{1\leq k<m\leq n+1} (p_k\wedge \sim p_k) \leftrightarrow (p_m\wedge \sim p_m), \quad E_n := \bigvee_{1\leq k<m\leq n+1} p_k \leftrightarrow p_m.$$

Пусть $\mathscr{A} \in \mathbf{T}$. Для $\mathscr{A}$-оценки v имеем $\pi_1 v(p\wedge \sim p) \in \Delta(\mathscr{A})$. В тоже время если $a \in \Delta(\mathscr{A})$, то $(a, 1) \in \mathscr{A}$. Действительно, $a \wedge 1 = a \in \Delta(\mathscr{A})$ и $a \vee 1 = 1 \in \nabla(\mathscr{A})$. Имеем $a = \pi_1((a, 1)\wedge \sim (a, 1))$. Мы доказали, что $\Delta(\mathscr{A}) = \pi_1(\{a\wedge \sim a \mid a \in \mathscr{A}\})$. Тем самым выполнимость $\mathscr{A} \models D_n$ эквивалентна тому, что $v(E_n) = 1$ для любой $\mathscr{A}_{\bowtie}$-оценки такой, что $v(p_k) \in \Delta(\mathscr{A})$, $1 \leq k \leq n + 1$. Поскольку $\mathscr{A}_{\bowtie}$ линейно упорядочена, немедленно получаем, что $\mathscr{A} \models D_n$, если и только если $\Delta(\mathscr{A})$ содержит не более n элементов. Иными словами, $\mathscr{A} \models D_n$, если и только если $tp_2(\mathscr{A}) \leq n$. Тем самым доказано равенство $\mathbf{T}^{-} = \mathbf{T}(\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{D_n\})$.

Поскольку $\mathbf{T}^{-}_n = \mathbf{T}^{-} \cap \mathbf{T}_n$, этот конус выделяется в $\mathbf{T}$ формулами $\{\neg\neg(p\vee \sim p),\ D_n\}$.

Для $\mathscr{A} \in \mathbf{T}$ условие $tp_1(\mathscr{A}) \leq n$ эквивалентно $\mathscr{A}_{\bowtie} = ch_m$, $m \leq n$. Класс моделей с этим свойством выделяется в $\mathrm{Mod}_{fsi}(\mathbf{LC})$ формулой E_n.

Заметим, что действие позитивных твист-операций согласовано с действием соответствующих операций алгебры Гейтинга на первых компонентах элементов твист-структуры. Кроме того, истинность формулы на твист-структуре определяется первой компонентой ее означивания. Поэтому если формула φ языка $\mathscr{L}^{\perp}$ не содержит символа $\sim$, то истинность φ на твист-структуре над алгеброй Гейтинга $\mathscr{B}$ эквивалентна истинности $\mathscr{B} \models \varphi$. В частности, $\mathscr{A} \models E_n$, если и только если $\mathscr{A}_{\bowtie} \models E_n$. Следовательно, конус алгебр с условием $tp_1(\mathscr{A}) \leq n$ соответствует логике $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{E_n\}$. Заметим, что согласно лемме 4.2 этот конус порождается алгеброй $\mathsf{ch}_n(n, +)$, т. е. полной твист-структурой над ch_n.

Конус, порожденный алгеброй $\mathsf{ch}_n(k, +)$, состоит из всех алгебр $\mathsf{ch}_m(s, \epsilon)$, удовлетворяющих условиям $m \leq n$ и $s \leq k$. Поэтому он выделяется в $\mathbf{T}$ формулами $\{E_n, D_k\}$. Алгебры, расположенные над $\mathsf{ch}_n(k, -)$, удовлетворяют также условию $\epsilon = -$, значит, конус, порожденный алгеброй $\mathsf{ch}_n(k, -)$, выделяется в $\mathbf{T}$ формулами $\{E_n, D_k, \neg\neg(p\vee \sim p)\}$.

Отметим, что все логики, соответствующие рассмотренным выше конусам, конечно аксиоматизируемы.

В виду предложения 4.4 каждый конус порядка $(\mathbf{T}, \sqsubseteq)$ представим как конечное объединение ранее рассмотренных конусов. Логика объединения конусов равняется пересечению логик этих конусов. Если $L_1 = L + \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ и $L_2 = L + \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, причем ни одна из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ не содержит пропозициональных переменных, входящих в $\psi_1, \ldots, \psi_n$, то

$$L_1 \cap L_2 := L + \{\varphi_i \vee \psi_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}.$$

В случае, когда L, L_1 и L_2 — промежуточные логики, этот результат установлен в [27]. Однако для его доказательства существенно лишь то, что единственным правилом вывода является *modus ponens* и логики L, L_1, L_2 содержат аксиомы позитивной логики. Поэтому этот результат верен и для расширений логики $\mathbf{N4}^{\perp}$. Тем самым из предложения 4.4 следует, что каждое расширение логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ конечно аксиоматизируемо.

Нам известна аксиоматика любой логики из $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$. Пусть заданы логика $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ с конечным списком аксиом A и формула φ. Будем перечислять формулы, выводимые из множеств A и $A \cup \{\varphi\}$. На некотором конечном шаге будет выведена формула φ из A или аксиома другой логики, не содержащейся в L, из $A \cup \{\varphi\}$. Таким образом, логика L разрешима. $\square$

Заметим, что любая логика $L \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ такая, что $\mathbf{T}^{-} \subseteq \mathrm{Mod}_{fsi}(L)$, не таблична. Поэтому логика $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ не является предтабличной. Более того, она имеет бесконечно много не табличных расширений.

Из доказательства теоремы 4.5 следует, что мы можем построить такую нумерацию $L_0, L_1, \ldots$ всех логик из решетки $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$, что по номеру n эффективно восстанавливается список аксиом логики L_n. Зафиксируем некоторую нумерацию этого вида.

Предложение 4.6. *Существует алгоритм, находящий по произвольной формуле φ логику $L_n \in \mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ такую, что $L_n = \mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{\varphi\}$.*

Доказательство. Пусть $\psi_0, \psi_1, \ldots$ — эффективное перечисление всех формул, выводимых из логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{\varphi\}$. Требуемый алгоритм работает следующим образом.

Шаг n. Для всех $m \leq n$ проверяем, содержатся ли аксиомы логики L_m в списке формул $\psi_0, \ldots, \psi_n$. Если для некоторого $m_0 \leq n$ получен положительный ответ, т. е. установлено включение $L_{m_0} \subseteq \mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{\varphi\}$, то проверяем принадлежность $\varphi \in L_{m_0}$. Если и в этом случае получен положительный ответ, то установлено равенство $L_{m_0} = \mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{\varphi\}$ и алгоритм заканчивает работу. Если ни для какого $m \leq n$ не были получены положительные ответы в обоих случаях, то переходим к следующему шагу.

Поскольку список $L_0, L_1, \ldots$ содержит все логики из $\mathscr{E}\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$, а список $\psi_0, \psi_1, \ldots$ — все формулы логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{\varphi\}$, рано или поздно мы найдем номер n такой, что $L_n = \mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C} + \{\varphi\}$. $\square$

Мы доказали тем самым, что по произвольной формуле можно определить, какое именно расширение логики $\mathbf{N4}^{\perp}\mathbf{C}$ она аксиоматизирует.

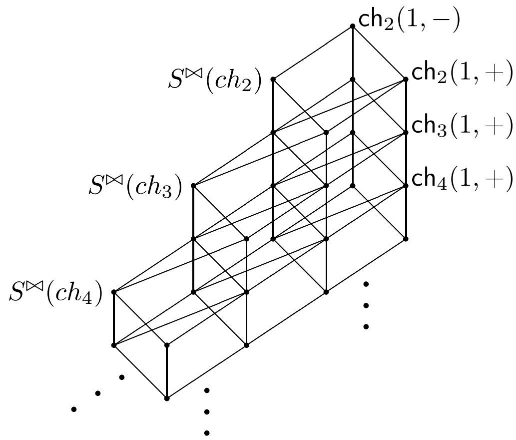

Рис. 4.

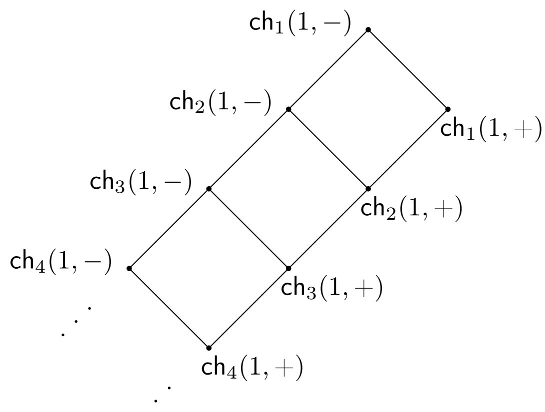

Рис. 5.

§ 5. Решетки расширений логик N4C и N3C

В заключение рассмотрим коротко, как изменится ситуация при переходе к логике **N4C**, рассматриваемой в языке $\langle\vee,\wedge,\to,\sim\rangle$, и к избыточной логике **N3C**.

Рассмотрим логику $\mathbf{LpC} := \mathbf{Lp}+\{(p\to q)\vee(q\to p)\}$. Ее конечно порожденные подпрямо неразложимые модели — это конечные линейно упорядоченные импликативные решетки, редукты алгебр Гейтинга ch_n к языку $\langle\vee,\wedge,\to,1\rangle$. По-прежнему $F_d(\mathsf{ch}_n)=\{1,\ldots,n-1\}$ (напомним, что для импликативных решеток $F_d(\mathscr{A})=\langle\{a\vee(a\to b)\mid a,b\in|\mathscr{A}|\}\rangle$). Решетка $\mathscr{E}\mathbf{LpC}$ так же, как и $\mathscr{E}\mathbf{LC}$, является линейным порядком типа $(\omega+1)^*$. Мы можем отождествить твист-структуры из $\mathrm{Mod}_{fsi}(\mathbf{N4C})$ с элементами $\mathbf{T}$. Как и выше, $\mathsf{ch}_n(k,\epsilon)$ обозначает твист-структуру $\mathscr{A}$ над n-элементной линейно упорядоченной импликативной решеткой с k-элементным идеалом $\Delta(\mathscr{A})$. Кроме того, $\nabla(\mathscr{A})=\mathscr{A}$, если $\epsilon=+$, и $\nabla(\mathscr{A})=F_d(\mathscr{A})$, если $\epsilon=-$.

Оказывается, порядок $\sqsubseteq$ имеет иную структуру в данном случае.

Структуры $\mathsf{ch}_n(k,\epsilon)$ имеют те же самые гомоморфные образы, но отношение вложения изменяется. В языке $\langle\vee,\wedge,\to,\sim\rangle$ условие $h(0)=0$ не должно

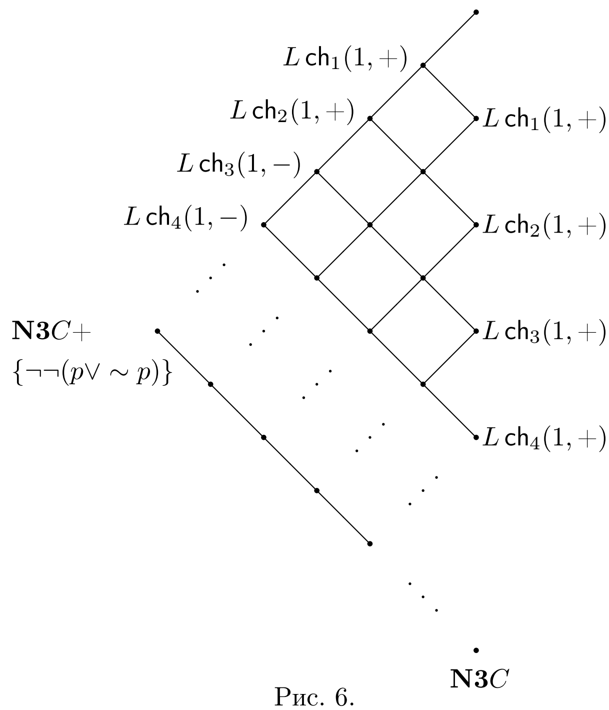

Рис. 6.

выполняться для гомоморфизма **N4**-решеток $h : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Поэтому возможны дополнительные вложения $\mathsf{ch}_n(k,+) \hookrightarrow \mathsf{ch}_{n+1}(k+1,\epsilon)$. По этой причине порядок $(\mathbf{T}, \sqsubseteq)$ имеет структуру, представленную на рис. 4. Этот порядок имеет не так много конусов, как порядок, представленный на рис. 3. Например, в обозначениях предложения 4.4 имеем $\mathbf{T}_k \subseteq \mathbf{T}^-_{k+1}$. Это показывает, что **N4**-решетки $\mathscr{A}$, удовлетворяющие условию $\nabla(\mathscr{A}) = F_d(\mathscr{A})$, не образуют многообразия и мы не можем определить аналоги нормальных логик в классе $\mathscr{E}\mathbf{N4}C$. Подобно теореме 4.5 мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Решетка $\mathscr{E}$**N4C** изоморфна решетке конусов частичного порядка, представленного на рис.* 4. *Все логики решетки $\mathscr{E}$**N4C** конечно аксиоматизируемы и разрешимы.*

Рассмотрим логику **N3C**. Класс $\mathscr{E}\mathbf{N3}$ совпадает с классом Exp, поэтому согласно предложению 3.17 только твист-структуры вида $\mathsf{ch}_n(1,\epsilon)$ являются моделями $\mathbf{N3}C$. Поэтому типы изоморфизма из класса $\mathrm{Mod}_{fsi}(\mathbf{N3}C)$ упорядочены относительно $\sqsubseteq$ так, как это показано на рис. 5.

Согласно теореме 4.5 решетка $\mathscr{E}\mathbf{N3}C$ изоморфна решетке конусов приведенного выше порядка. Как легко видеть, решетка $\mathscr{E}\mathbf{N3}C$ имеет структуру, указанную на рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nelson D.* Constructible falsity // J. Symb. Logic. 1949. V. 14, N 1. P. 16–26.
2. *Thomason R.* A semantical study of constructive falsity // Z. Math. Logik Grundl. Math. 1969. V. 15. P. 247–257.
3. *Routley R.* Semantical analyses of propositional systems of Fitch and Nelson // Stud. Log. 1974. V. 33. P. 283–298.

4. *Rasiowa H.* N-lattices and constructive logic with strong negation // Fund. Math. 1958. V. 46, N 1. P. 61–80.
5. *Vakarelov D.* Notes on N-lattices and constructive logic with strong negation // Stud. Log. 1977. V. 36. P. 109–125.
6. *Fidel M. M.* An algebraic study of a propositional system of Nelson // Math. Logic / Proc. of the First Brasilian Conf., Campinas, 1977. Berlin: Springer, 1978. P. 99–117. (Lect. Notes Pure Appl. Math.; V. 39).
7. *Goranko V.* The Craig interpolation theorem for propositional logics with strong negation // Stud. Log. 1985. V. 44. P. 291–317.
8. *Sendlewski A.* Some investigations of varieties of N-lattices // Stud. Log. 1984. V. 43. P. 257–280.
9. *Sendlewski A.* Nelson algebras through Heyting ones // Stud. Log. 1990. V. 49. P. 106-126.
10. *Sendlewski A.* Axiomatic extensions of the constructive logic with strong negation and disjunction property // Stud. Log. 1995. V. 55. P. 377–388.
11. *Kracht M.* On extensions of intermediate logics by strong negation // J. Philos. Log. 1998. V. 27, N 1. P. 49–73.
12. *Almukdad A., Nelson D.* Constructible falsity and inexact predicates // J. Symb. Log. 1984. V. 49. P. 231–233.
13. *Jaspers J.* Calculi for Constructive Communication: ILLC Dissertation Series 1994-4. Loeven: ILLC, 1994.
14. *Wagner G.* Vivid Logic. Knowledge-based reasoning with two kinds of negation. Berlin: Springer-Verl., 1994.
15. *Wansing H.* The logic of information structures. Berlin: Springer, 1993.
16. *Wansing H.* Semantics-based nonmonotonic inference // Notre Dame J. Formal Logic. 1995. V. 36, N 1. P. 44–54.
17. *Wansing H.* Negation // The Blackwell guide to philosophical logic. Cambridge: Basil Blackwell Publishers, 2001. P. 415–436.
18. *Dunn J. M.* Partiality and its dual // Stud. Log. 2000. V. 66, N 1. P. 5–40.
19. *Odintsov S. P.* Algebraic semantics for paraconsistent Nelson's Logic // J. Logic Comput. 2003. V. 13, N 4. P. 453–468.
20. *Odintsov S. P. On representation of* **N4**-*lattices* // Stud. Log. 2004. V. 76, N 3. P. 385–405.
21. *Odintsov S. P.* On the structure of paraconsistent extensions of Johansson's logic // J. Appl. Log. 2005. V. 5, N 1. P. 43–65.
22. *Odintsov S. P.* The class of extensions of Nelson paraconsistent logic // Stud. Log. 2005. V. 80, N 2. P. 293–322.
23. *Odintsov S. P., Pearce D.* Routley semantics for answer sets // Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning. 8th Intern. Conf., LPNMR 2005, Diamante, Italy, September 5–8, 2005: Proc. Berlin: Springer, 2005. P. 343–355. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 3662).
24. *Dunn J. M., Meyer R. K.* Algebraic completeness results for Dummett's LC and its extensions // Z. Math. Logic Grundl. Math. 1971. V. 17, N 3. P. 225–230.
25. *Rasiowa H.* An algebraic approach to non-classical logics. Amsterdam: North-Holland, 1974.
26. *Burris S., Sankappanavar H. P.* A course in universal algebra. New York: Springer, 1981.
27. *Miura S.* A remark on the intersection of two logics // Nagoja Math. J. 1966. V. 26, N 2. P. 167–171.

Статья поступила 30 ноября 2005 г., окончательный вариант — 12 мая 2006 г.

Одинцов Сергей Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
odintsov@math.nsc.ru