Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 514.76+517.98

ДВОЙНОЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

А. В. Гаврилов

Аннотация: Изучается двойное экспоненциальное отображение, являющееся специального вида композицией двух экспоненциальных отображений на многообразии со связностью. Установлена его связь с композицией ковариантных дифференцирований и с композицией псевдодифференциальных операторов на таком многообразии.

Ключевые слова: многообразие со связностью, ковариантное дифференцирование, псевдодифференциальные операторы.

1. Введение

Пусть (X, ∇) — гладкое многообразие с гладкой связностью, TX — его касательное расслоение. Для $x \in X$ в некоторой окрестности нуля в T_xX определено экспоненциальное отображение $v \mapsto \exp_x(v) \in X$. Пусть $U \subset X$ — выпуклая окрестность точки x. Тогда для $y \in U$ имеется единственная лежащая в U геодезическая, соединяющая x и y, и можно определить оператор параллельного переноса касательных векторов вдоль нее: $\mathrm{I}_y^x : T_xX \to T_yX$. Наряду с обычными мы из соображений удобства будем также использовать «строчные» обозначения:

$$\exp_x(v) = \exp(x, v), \quad \mathrm{I}_y^x(v) = \mathrm{I}(x, y; v).$$

Рассмотрим отображение $T_xX \times T_xX \to X$ следующего вида:

$$\exp_x(v, w) = \exp(\exp(x, v), \mathrm{I}(x, \exp(x, v); w)); \tag{1}$$

его естественно называть *двойным экспоненциальным отображением.* При этом можно считать $\mathrm{I}_{\exp(x,v)}^x$ оператором переноса вдоль геодезической $\exp(x, tv)$, $0 \le t \le 1$. Тогда, например, на полном многообразии $\exp_x(v, w)$ будет определено на всем пространстве $T_xX \times T_xX$. В дальнейшем, однако, нам потребуется лишь локальное определение.

Пусть $h_x : T_xX \times T_xX \to T_xX$ — оператор такой, что

$$\exp_x(h_x(v, w)) = \exp_x(v, w), \quad v, w \in T_xX. \tag{2}$$

Ясно, что (2) однозначно определяет h_x в некоторой окрестности нуля в $T_xX \times T_xX$. Функция $h_x(v, w)$ инвариантно определена, и потому члены ее ряда Тейлора являются инвариантами связности. Такие инварианты должны выражаться через тензоры кривизны и кручения с их производными. Для симметричной связности

$$\begin{aligned} h_x(v, w) = v + w + \frac{1}{6}R(w, v)v + \frac{1}{3}R(w, v)w + \frac{1}{12}\nabla_v R(w, v)v \\ + \frac{1}{24}\nabla_w R(w, v)v + \frac{5}{24}\nabla_v R(w, v)w + \frac{1}{12}\nabla_w R(w, v)w + r(v, w), \end{aligned} \tag{3}$$

где $r(v,w)$ содержит однородные члены степени 5 и выше (здесь $\nabla_u R(v,w) = (\nabla R)(v,w;u)$). Имеется формальная аналогия между (3) и известной формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа.

Для тензора $S \in (T_xX)^{\otimes n}$ мы будем обозначать через $S \cdot \nabla^n$ свертку S со степенью оператора ковариантного дифференцирования. Подразумевается свертка в естественном порядке, например, если $S = S^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$, то $S \cdot \nabla^2 = S^{ij}\nabla_i\nabla_j$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $x \in X$, $v, w \in T_xX$, $h = h_x(v,w)$, $u \in C^\infty(X)$. Тогда имеет место формальное равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}v^{\otimes n}\otimes w^{\otimes m}\cdot\nabla^n\nabla^m u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}h^{\otimes k}\cdot\nabla^k u(x). \tag{4}$$

Равенство (4) нужно понимать следующим образом. Если и многообразие, и связность, и функция u вещественно аналитичны, то ряды в некоторой окрестности нуля в $T_xX \times T_xX$ сходятся и суммы их равны. В общем случае формальный ряд Тейлора правой части (по переменным (v,w)) совпадает с левой частью. Выделив в левой и правой частях слагаемые одинаковой степени N, мы получим эквивалентное (4) операторное равенство

$$\sum_{n+m=N}\binom{N}{n}v^{\otimes n}\otimes w^{\otimes m}\cdot\nabla^N = \sum_{k=0}^{N}H^{(N)}_{(k)}(v,w)\cdot\nabla^k, \tag{5}$$

где

$$H^{(N)}_{(k)}(v,w) = \frac{1}{k!}\frac{d^N}{dt^N}h^{\otimes k}(tv,tw)\Big|_{t=0}.$$

В евклидовом пространстве (с соответствующей, т. е. тривиальной, связностью) имеем $v^{\otimes n}\otimes w^{\otimes m}\cdot\nabla^{n+m} = \partial_v^n\partial_w^m$, где $\partial_v = \sum_i v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ — обычная производная по направлению (постоянного) вектора, так что $\partial_v\partial_w = \partial_w\partial_v$. Кроме того, $h(v,w) = v + w$, и (5) означает просто биномиальное тождество

$$\sum_{n+m=N}\binom{N}{n}\partial_v^n\partial_w^m = (\partial_v + \partial_w)^N.$$

Если же пространство X отлично от евклидова, то вычисление в явном виде левой и правой частей (4) или (5) оказывается затруднительным даже в простейших случаях. Например, из теоремы косинусов следует, что на единичной двумерной сфере длина вектора $h = h(v,w)$ может быть найдена из уравнения

$$\cos(|h|) = \cos(|v|)\cos(|w|) - \sin(|v|)\sin(|w|)\frac{\langle v,w\rangle}{|v|\cdot|w|}.$$

Маловероятно, что в этом случае существует общая формула для $H^{(N)}_{(k)}$ разумной сложности.

Чтобы смысл полученного результата стал более прозрачным, введем в рассмотрение симметризованные степени ковариантного дифференцирования $\nabla^{(n)}$. По определению $\nabla^{(n)} = \sigma_n\nabla^n$, где σ_n — оператор симметризации. Если F — тензорное поле, то $\nabla^{(n)}F$ есть результат симметризации $\nabla^n F$ по всем «новым» индексам. Если тензор S симметричен, то $S\cdot\nabla^n = S\cdot\nabla^{(n)}$ (поэтому в формуле (4) можно заменить обычные степени ∇ симметризованными).

Как известно, альтернирование ковариантных производных может быть выражено через тензор кривизны, поэтому можно показать, что любой дифференциальный оператор на $C^\infty(X)$ представляется суммой вида $\sum\limits_{n=0} S_n(x)\cdot\nabla^{(n)}$, где $S_n(x)$ — симметричные тензоры [1, § 2]. В частности,

$$v_1\otimes v_2\otimes\dots\otimes v_n\cdot\nabla^n=\sum_{k=0}^{n} v_1\otimes v_2\otimes\dots\otimes v_n\cdot R^{(n)}_{(k)}\cdot\nabla^{(k)},$$

где тензоры $R^{(n)}_{(k)}$ имеют соответственно тип (k,n) и симметричны по контравариантным индексам. Эти тензоры являются инвариантами связности и могут быть выражены через тензор кривизны (и в общем случае тензор кручения). Но вычисление их в явном виде — трудная проблема. Насколько известно автору, в настоящее время эта проблема, которую можно назвать *задачей о симметризации ковариантной производной*, далека от решения. Для $n\le 4$ соответствующие вычисления были проделаны и сообщены автору В. А. Шарафутдиновым в виде приложения к статье [1].

Связь нашей теоремы с задачей о симметризации станет очевидна, если мы разложим тензор $h^{\otimes k}$ в ряд Тейлора по двум переменным:

$$\frac{1}{k!}h^{\otimes k}(v,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}H^{(n,m)}_{(k)}(v,w). \tag{6}$$

Тензоры $H^{(n,m)}_{(k)}(v,w)$ в правой части симметричны и являются однородными функциями v и w степеней n и m соответственно. Ели мы подставим (6) в (4), то увидим, что формулу (5) можно уточнить следующим образом:

$$v^{\otimes n}\otimes w^{\otimes m}\cdot\nabla^{n+m}=\sum_{k=0}^{n+m}H^{(n,m)}_{(k)}(v,w)\cdot\nabla^{(k)}; \tag{7}$$

мы имеем право заменить в правой части ∇^k на $\nabla^{(k)}$ благодаря симметричности тензора H. Например, используя (3), можно вычислить $H^{(2,1)}_{(k)}$ и $H^{(1,2)}_{(k)}$ для симметричной связности; отсюда получаем

$$v^{\otimes 2}\otimes w\cdot\nabla^3=\frac{1}{3}(v^{\otimes 2}\otimes w+v\otimes w\otimes v+w\otimes v^{\otimes 2})\cdot\nabla^{(3)}+\frac{1}{3}R(w,v)v\cdot\nabla,$$

$$v\otimes w^{\otimes 2}\cdot\nabla^3=\frac{1}{3}(w^{\otimes 2}\otimes v+w\otimes v\otimes w+v\otimes w^{\otimes 2})\cdot\nabla^{(3)}+\frac{2}{3}R(w,v)w\cdot\nabla,$$

что эквивалентно формулам (2.14) в [1].

Тензоры вида $v^{\otimes n}\otimes w^{\otimes m}$ порождают собственное подпространство в пространстве контравариантных тензоров, поэтому равенство (7) не позволяет свести задачу о симметризации к вычислению ряда Тейлора функции h даже теоретически. Тем не менее его можно использовать в некоторых приложениях. Например, в § 3 мы с его помощью построим производящую функцию для введенных в [1] многочленов $\rho^{\alpha,\beta}$. Интересной проблемой является также вычисление производящей функции для многочленов $P^{(\kappa)}_{\beta,\gamma}$, введенных Сафаровым, которые играют в [2] ту же роль, что и многочлены $\rho^{\alpha,\beta}$ в [1]. Эта задача существенно сложнее из-за неявного характера используемых в [2] определений.

Автор выражает благодарность В. А. Шарафутдинову за поддержку и обсуждение этой работы, а также рецензенту за полезные замечания.

2. Двойное экспоненциальное отображение

Перейдем к доказательству. Нам понадобится следующая простая

Лемма. *Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая и $v = \dot\gamma(t)$ — ее касательный вектор. Тогда в любой точке геодезической*

$$v^{\otimes n} \cdot \nabla^n = \nabla_v^n. \tag{8}$$

Здесь мы использовали стандартное обозначение $\nabla_v = v \cdot \nabla$. При $n = 1$ равенство (8) тривиально. По условию $\nabla_v v = 0$, следовательно, ∇_v коммутирует с оператором свертки с тензором $v^{\otimes n}$. По индукции

$$\nabla_v^{n+1} = \nabla_v v^{\otimes n} \cdot \nabla^n = v^{\otimes n} \cdot \nabla_v \nabla^n = v^{\otimes (n+1)} \cdot \nabla^{n+1},$$

и лемма доказана.

Заметим, что для $x \in X$, $v \in T_x X$ степени ∇_v^n при $n > 1$ не определены. Можно, однако, естественным образом продолжить v вдоль геодезической $\exp(x, tv)$, тогда степени оператора ∇_v будут корректно определены и по доказанной лемме совпадут с левой частью (8). Далее мы будем понимать ∇_v^n именно в этом смысле.

Следствие. *Если $v \in T_x X$, $u \in C^\infty(X)$, то*

$$u(\exp(x, v)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v^{\otimes n} \cdot \nabla^n u(x). \tag{9}$$

Здесь ряд в правой части понимается как формальный ряд Тейлора по переменной v. Эта формула имеется, в частности, в [1, лемма 2.1]. Она сразу следует из (8), поскольку

$$u(\exp(x, v)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} u(\exp(x, tv)) \bigg|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \nabla_v^n u(x).$$

Доказательство теоремы основано на двукратном применении формулы (9). Пусть $w \in T_x X$, $u \in C^\infty(X)$. Построим в окрестности точки $x \in X$ векторное поле

$$W(y) = \mathrm{I}(x, y; w) \in T_y X$$

и введем новую функцию

$$U(y) = u(\exp(y, W(y))).$$

По следствию леммы

$$U(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} W^{\otimes m}(y) \cdot \nabla^m u(y).$$

Далее,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{\otimes k} \cdot \nabla^k u(x) = u(\exp(x, h)) = U(\exp(x, v)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v^{\otimes n} \cdot \nabla^n U(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} v^{\otimes n} \cdot \nabla^n W^{\otimes m}(x) \cdot \nabla^m u(x),$$

где $h = h_x(v, w)$.

По построению векторное поле W ковариантно постоянно вдоль любой геодезической, проходящей через точку x. В частности, оно постоянно вдоль геодезической $\exp(x, tv)$, откуда $\nabla_v^n W(x) = 0$, $n \geq 1$. Поэтому можно переписать операторы в последней сумме следующим образом:

$$v^{\otimes n} \cdot \nabla^n W^{\otimes m}(x) \cdot \nabla^m = \nabla_v^n W^{\otimes m}(x) \cdot \nabla^m = W^{\otimes m}(x) \cdot \nabla_v^n \nabla^m = v^{\otimes n} \otimes w^{\otimes m} \cdot \nabla^n \nabla^m.$$

Мы пользуемся равенством $W(x) = w$ и тем, что ∇_v^n коммутирует с оператором свертки с $W^{\otimes m}$. После подстановки получаем (4), и теорема доказана.

3. Задача о композиции на многообразии со связностью

В этом пункте рассмотрим приложение полученных результатов к задаче о композиции скалярных псевдодифференциальных операторов на многообразии со связностью. При этом будем считать связность симметричной.

Известно, что для псевдодифференциального оператора на многообразии в отличие от евклидова пространства инвариантно определен лишь главный символ. Однако оператору на многообразии со связностью можно поставить в соответствие символ, зависящий как от оператора, так и от связности [1–5]. Мы не будем приводить строгое определение такого символа, которое можно найти в [5] или [1]. Отметим лишь, что оператору $v^{\otimes n} \cdot (-i\nabla)^n$ соответствует символ $\langle v, \xi\rangle^n$, так что согласно (9) $e^{i\langle v,\xi\rangle}$ формально является символом оператора, двойственного к экспоненциальному отображению $x \mapsto \exp_x(v)$.

В теории псевдодифференциальных операторов в евклидовом пространстве большую роль играет следующая известная формула [6, теорема 3.6]:

$$\sigma_{AB}(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} \sigma_A(x, \xi) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \sigma_B(x, \xi), \tag{10}$$

выражающая символ произведения операторов через символы сомножителей (обозначения здесь стандартны [6]). Обобщение этой формулы на случай многообразия со связностью сопряжено с серьезными трудностями, поскольку левая часть зависит не только от σ_A и σ_B, но и от тензора кривизны.

Важный, по мнению автора, результат в этом направлении был получен В. А. Шарафутдиновым [1, теорема 5.1]. Предложенная им формула похожа на (10), но содержит сумму не по одному, а по трем мультииндексам. При этом в правой части присутствуют коэффициенты $\rho^{\alpha,\beta}$, являющиеся многочленами от ξ, зависящими от тензора кривизны. Чтобы получить окончательный результат, нужно найти эти коэффициенты в явном виде, но это нелегкая задача. Аналогичная формула была получена ранее Сафаровым [2, теорема 8.3], но определение символа в [2] отличается от общепринятого.

Нашей целью является вычисление (экспоненциальной) производящей функции для многочленов $\rho^{\alpha,\beta}$. Эта функция, зависящая от трех переменных, выражается, как мы увидим, через функцию h (зависящую от двух переменных), что означает наличие нетривиальных соотношений между многочленами. Таким образом, вычисление $\rho^{\alpha,\beta}$ в принципе сводится к построению ряда Тейлора функции h, что, вероятно, является более простой задачей.

Мы используем ниже стандартные мультииндексные обозначения (как, например, в [6] или [7, гл. II]) наряду с введенными ранее. Везде v и w считаются векторами, а ξ — ковектором. Во избежание путаницы отметим, что мультииндексы рассматриваемых ниже многочленов $R^{\alpha,\beta}$ и $\rho^{\alpha,\beta}$ ковариантные, хотя и пишутся сверху.

Нам понадобятся биномиальные коэффициенты [7]

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, & \alpha - \beta \geq 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и равенство

$$\sum_{\beta} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \binom{\beta}{\gamma} = \begin{cases} (-1)^{|\alpha|}, & \alpha = \gamma, \\ 0, & \alpha \neq \gamma. \end{cases}$$

В [1] через ∇^α обозначается соответствующая мультииндексу компонента симметризованного оператора $\nabla^{(|\alpha|)}$. Связь между мультииндексными и инвариантными обозначениями следующая:

$$\sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} v^\alpha \nabla^\alpha = \frac{1}{n!} v^{\otimes n} \cdot \nabla^{(n)}, \qquad \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} v^\alpha \xi^\alpha = \frac{1}{n!} v^{\otimes n} \cdot \xi^{\otimes n} = \frac{1}{n!} \langle v, \xi \rangle^n.$$

Начнем с определения $R^{\alpha,\beta}(x,\xi)$. Этот многочлен определен в [1] как символ дифференциального оператора

$$R^{\alpha,\beta}(x, -i\nabla) = (-i\nabla)^\alpha (-i\nabla)^\beta.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{|\alpha|=n} \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{\alpha!\beta!} v^\alpha w^\beta R^{\alpha,\beta}(x, -i\nabla) = \frac{(-i)^{n+m}}{n!m!} v^{\otimes n} \otimes w^{\otimes m} \cdot \nabla^{(n)} \nabla^{(m)}$$

$$= \frac{(-i)^{n+m}}{n!m!} \sum_{k=0}^{n+m} H_{(k)}^{(n,m)}(v,w) \cdot \nabla^{(k)},$$

т. е.

$$\sum_{|\alpha|=n} \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{\alpha!\beta!} v^\alpha w^\beta R^{\alpha,\beta}(x,\xi) = \frac{1}{n!m!} \sum_{k=0}^{n+m} (-i)^{n+m-k} H_{(k)}^{(n,m)}(v,w) \cdot \xi^{\otimes k}.$$

Это равенство можно рассматривать как определение многочленов $R^{\alpha,\beta}$, эквивалентное первоначальному. Отсюда легко получить производящую функцию:

$$\sum_{\alpha,\beta} i^{|\alpha|+|\beta|} \frac{v^\alpha w^\beta}{\alpha!\beta!} R^{\alpha,\beta}(x,\xi) = e^{i\langle h(v,w), \xi \rangle}. \tag{11}$$

Многочлены $\rho^{\alpha,\beta} = \rho^{\alpha,\beta}(x,\xi)$ определены следующим равенством [1, формула (2.23)]:

$$\rho^{\alpha,\beta} = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\lambda,\mu} (-1)^{|\lambda|+|\mu|} \binom{\alpha}{\lambda} \binom{\beta}{\mu} \xi^{\alpha+\beta-\lambda-\mu} R^{\lambda,\mu}.$$

Подставим $\rho^{\alpha,\beta}$ вместо $R^{\alpha,\beta}$ в левую часть (11). Проделав вполне стандартные выкладки с биномиальными коэффициентами, мы получим искомую производящую функцию:

$$\sum_{\alpha,\beta} i^{|\alpha|+|\beta|} \frac{v^\alpha w^\beta}{\alpha!\beta!} \rho^{\alpha,\beta}(x,\xi) = e^{i\langle h(v,w)-v-w, \xi \rangle}. \tag{12}$$

Из (12) получается прозрачное доказательство неравенства

$$\deg \rho^{\alpha,\beta} \leq \min \left\{ |\alpha|, |\beta|, \frac{|\alpha| + |\beta|}{3} \right\}. \tag{13}$$

Эта оценка была известна В. А. Шарафутдинову, но его оригинальное доказательство достаточно сложно. Будем обозначать через n, m, k степени по каждой из переменных v, w, ξ соответственно. Ряд Тейлора функции $h(v,w)-v-w$ начинается с членов третьей степени (см. (3)). Кроме того, если $v = 0$ или $w = 0$, то $h - v - w = 0$, следовательно, в каждое однородное слагаемое этого ряда входят обе переменные. Поэтому многогранник Ньютона ряда $\langle h(v,w) - v - w, \xi\rangle$ находится в выпуклом конусе, определяемом неравенствами $n \geq k$, $m \geq k, n+m \geq 3k$ (и на гиперплоскости $k = 1$). Многогранник Ньютона функции $e^{i\langle h(v,w)-v-w,\xi\rangle}$ находится в этом же конусе, откуда следуют нужные оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарафутдинов В. А.* Геометрическое исчисление символов псевдодифференциальных операторов. I // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 159–206.
2. *Safarov Yu. G.* Pseudodifferential operators and linear connections // Proc. London Math. Soc. (3). 1997. V. 74, N 2. P. 379–416.
3. *Widom H.* Families of pseudodifferential operators // Topics in functional analysis. New York: Acad. Press, 1978. P. 345–395.
4. *Widom H.* A complete symbol calculus for pseudodifferential operators // Bull. Sci. Math. (2). 1980. V. 104, N 1. P. 19–63.
5. *Pflaum M. J.* The normal symbol on Riemannian manifolds // New York J. Math. 1998. V. 4. P. 97–125.
6. *Grigis A., Sjostrand J.* Microlocal analysis for differential operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; N 196).
7. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

Статья поступила 1 сентября 2004 г.,
окончательный вариант — 15 февраля 2006 г.

Гаврилов Алексей Владимирович,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
gavrilov@lapasrv.sscc.ru