Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 517.958:531.72+517.958:539.3(4)

МЕТОД ДВУХМАСШТАБНОЙ СХОДИМОСТИ НГУЕТСЕНГА В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ И СЕЙСМОАКУСТИКИ В УПРУГИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

А. М. Мейрманов

Аннотация: Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение упругого пористого тела и жидкости, заполняющей поры. Исследуемая модель, несмотря на ее линейность, очень сложна, так как основные дифференциальные уравнения содержат под знаком производных недифференцируемые быстро осциллирующие малые и большие коэффициенты. На основе метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга предлагается строгий вывод усредненных уравнений (т. е. уравнений, не содержащих быстро осциллирующих коэффициентов), которыми, при различных комбинациях физических параметров задачи, будут уравнения пороупругости Био, система, состоящая из анизотропных уравнений Ламэ для твердой компоненты и уравнений акустики для жидкой компоненты, уравнения вязкоупругости или распадающаяся система, состоящая из уравнений фильтрации Дарси или уравнений акустики для жидкой компоненты (первое приближение) и анизотропных уравнений Ламэ для твердой компоненты (второе приближение).

Ключевые слова: уравнения Стокса, уравнения Ламэ, уравнения Био, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур, пороупругость, вязкоупругость.

Введение

В работе рассматривается задача о моделировании малых возмущений в упругой деформируемой среде, перфорированной системой каналов (пор), заполненных жидкостью или газом. Такие среды называются *упругими пористыми средами* и являются достаточно хорошим приближением реальных консолидированных грунтов. В современной литературе соответствующий раздел механики сплошных сред называется «поромеханикой» [1]. Твердая компонента такой среды называется *скелетом грунта*, а область, занятая жидкостью, — *поровым пространством*. Точная математическая модель упругой пористой среды состоит из классических уравнений баланса импульса и массы, записанных в переменных Эйлера, уравнений, определяющих напряжения в каждой компоненте среды, и замыкающего уравнения, описывающего поведение границы «поровое пространство — твердый скелет». Последнее выражает тот факт, что указанная граница является материальной поверхностью, т. е. во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц. Если ρ — плотность среды,

Работа выполнена при частичной поддержке гранта комиссии по высшему образованию Пакистана, проект «Усреднение в фильтрационных потоках».

$\boldsymbol{v}$ — скорость, $\mathbb{P}^f$ — тензор напряжений в жидкости, $\mathbb{P}^s$ — тензор напряжений в твердом скелете и $\tilde{\chi}$ — характеристическая функция порового пространства, то основные дифференциальные уравнения нелинейной модели имеют вид

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (\mathrm{div}_x)\{\tilde{\chi}\mathbb{P}^f + (1-\tilde{\chi})\mathbb{P}^s\} + \rho\boldsymbol{F}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\cdot\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{v} = 0, \quad \frac{d\tilde{\chi}}{dt} = 0,$$

где d/dt обозначает полную (материальную) производную по времени.

Таким образом, исходная модель является задачей с неизвестной (свободной) границей. Мы не останавливаемся на более точной формулировке нелинейной задачи, поскольку наша цель — линейная модель, получающаяся линеаризацией нелинейной вблизи состояния покоя. Методы линеаризации достаточно хорошо изучены, и полученная линейная модель общепринята (см., например, [2–4]). Она является основной при описании фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах. Для этой модели характеристическая функция порового пространства $\tilde{\chi}$ при $t > 0$ считается известной и совпадает с характеристической функцией порового пространства $\bar{\chi}$ в начальный момент времени. В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w}' = L\boldsymbol{w}, \quad \rho_s' = \rho_0\rho_s, \quad \rho_f' = \rho_0\rho_f, \quad \boldsymbol{F}' = g\boldsymbol{F}$$

дифференциальные уравнения модели для малых отклонений безразмерных перемещений $\boldsymbol{w}$ в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ при $t > 0$ имеют вид

$$\alpha_\tau\bar{\rho}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \mathrm{div}_x\left\{\bar{\chi}\alpha_\mu\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + (1-\bar{\chi})\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - (q+\pi)\mathbb{I}\right\} + \bar{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{0.1}$$

$$p = -\alpha_p\bar{\chi}\,\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{w}, \quad \pi = -\alpha_\eta(1-\bar{\chi})\,\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{w}, \quad q = p + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_p}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{0.2}$$

где $\bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1-\bar{\chi})\rho_s$, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) := (1/2)(\nabla_x\boldsymbol{u} + (\nabla_x\boldsymbol{u})^T)$. Безразмерные постоянные α_i $(i = \tau, \nu, \dots)$ определяются формулами

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \ \alpha_\nu = \frac{\nu}{\tau Lg\rho_0}, \ \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau Lg\rho_0}, \ \alpha_p = \frac{c^2\rho_f}{Lg}, \ \alpha_\eta = \frac{\eta}{Lg\rho_0}, \ \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{Lg\rho_0},$$

где μ — вязкость жидкости (газа), ν — объемная вязкость жидкости (газа), λ и η — постоянные Ламэ, c — скорость звука в жидкости (газе), L — характерный размер рассматриваемой области, τ — характерное время процесса, ρ_f и ρ_s — безразмерные плотности жидкости (газа) и твердого скелета соответственно, отнесенные к плотности воды ρ_0, и g — ускорение силы тяжести.

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{w}|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{0.3}$$

$$\boldsymbol{w} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \quad t \geq 0. \tag{0.4}$$

Математическая модель, описываемая уравнениями (0.1)–(0.4), содержит естественный малый параметр ε, которым служит отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная, и необходимы дополнительные упрощающие предположения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

Предположение 1. *Область $\Omega = (0,1)^3$ есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, $1/\varepsilon$ — целое число, так что Ω всегда содержит целое число элементарных ячеек Y^ε. Пусть Y_s — «твердая» часть Y, ее «жидкая» часть Y_f — открытое дополнение Y_s в Y и $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ — C^1-поверхность.*

Поровое пространство Ω_f^ε — периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет Ω_s^ε — периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, а граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$. Твердый скелет Ω_s^ε является связным множеством.

В этих предположениях
$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\boldsymbol{x}/\varepsilon\right), \quad \bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})\rho_f + (1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))\rho_s,$$
где $\chi(\boldsymbol{y})$ — характеристическая функция Y_f в Y.

Первой попыткой вывода усредненных уравнений в модели, где скелет считался абсолютно твердым телом, было обоснование известного в теории фильтрации закона Дарси. Санчес-Паленсия [3, гл. 7.2] формально обосновал закон Дарси, используя двухмасштабный метод асимптотических разложений. Математически строгий вывод этого же закона принадлежит Тартару (см. приложение в [3]). Используя тот же самый двухмасштабный метод асимптотических разложений, Барридж и Келлер [2] дали формальный вывод системы уравнений Био (см. [5]) на основе уравнений (0.1)–(0.4), где параметр α_μ был величиной порядка квадрата ε, а остальные коэффициенты были фиксированы. Строгое обоснование модели Био при тех же предположениях, что и в [2], было дано Нгуетсенгом в [6] и позже Клопье в соавторстве с Джилбертом, Микеличем и Ферреном [7]. Джилберт с Микеличем [4] также строго вывели систему уравнений вязкоупругости, когда все параметры фиксированы и не зависят от малого параметра ε. В этих работах основным методом исследования был метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга [8, 9].

Пусть безразмерные параметры зависят от малого параметра задачи ε и существуют конечные или бесконечные пределы
$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\tau(\varepsilon) = \tau_0.$$
Мы ограничимся случаями, когда $\tau_0 < \infty$ и

(I) $\mu_0 = 0$, $0 < \lambda_0 < \infty$,

(II) $0 \le \mu_0 < \infty$, $\lambda_0 = \infty$,

(III) $0 < \mu_0$, $\lambda_0 < \infty$.

Если $\tau_0 = \infty$, то перенормировкой перемещений $\boldsymbol{w} \to \alpha_\tau \boldsymbol{w}$ мы сводим задачу к рассмотрению одного из случаев (I)–(III).

Будет показано, что в случае (I) усредненными уравнениями являются либо система уравнений Био пороупругости для двухскоростной среды, либо аналогичная система, состоящая из анизотропных уравнений Ламэ для твердой компоненты и уравнений акустики для жидкой компоненты, либо анизотропные уравнения Ламэ для односкоростной среды (несвязное поровое пространство, см. теорему 2). В случае (II) усредненными уравнениями являются либо уравнения фильтрации Дарси, либо уравнения акустики для скорости жидкой компоненты (при этом твердая компонента в первом приближении считается абсолютно твердым телом) и как второе приближение анизотропные уравнения Ламэ для перенормированных перемещений в твердой компоненте, либо системы уравнений, описанных в теореме 2, для перенормированных перемещений в жидкой и твердой компонентах (теорема 3). Наконец, в случае (III) — нелокальные уравнения вязкоупругости или нелокальные анизотропные уравнения Ламэ для односкоростной среды (теорема 4).

§ 1. Формулировка основных результатов

Как обычно, уравнения (0.1) понимаются в смысле теории распределений. Они включают в себя собственно уравнения (0.1), (0.2) в каждой из областей Ω_f^ε и Ω_s^ε и краевые условия

$$[\boldsymbol{w}] = 0, \quad [\mathbb{P}\cdot\mathbf{n}] = 0, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon,\ t \geq 0, \tag{1.1}$$

на границе Γ^ε, где

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - (q+\pi)\mathbb{I},$$

$\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к границе и

$$[\varphi](\boldsymbol{x}_0) = \varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0) - \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0),\ \varphi_{(s)}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}\in\Omega_s^\varepsilon}\varphi(\boldsymbol{x}),\ \varphi_{(f)}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}\in\Omega_f^\varepsilon}\varphi(\boldsymbol{x}).$$

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (0.1)–(0.4) и краевых условий (1.1). Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

Определение 1. Четыре функции $(\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, q^\varepsilon, \pi^\varepsilon)$ называются *обобщенным решением задачи* (0.1)–(0.4), если они удовлетворяют условиям регулярности $\boldsymbol{w}^\varepsilon, \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon), \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon, q^\varepsilon, p^\varepsilon, \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}, \pi^\varepsilon \in L^2(\Omega_T)$ в области $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$, граничным условиям (0.4) и уравнениям (0.2) почти всюду в области Ω_T и интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T}\left(\alpha_\tau\rho^\varepsilon\boldsymbol{w}^\varepsilon\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} - \chi^\varepsilon\alpha_\mu\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\right) - \rho^\varepsilon\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right.$$
$$\left. + \{(1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon) - (q^\varepsilon+\pi^\varepsilon)\mathbb{I}\} : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\right)dxdt = 0 \tag{1.2}$$

для всех гладких вектор-функций $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ таких, что $\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = \partial\boldsymbol{\varphi}/\partial t|_{t=T} = 0$.

В (1.2) через $A : B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т. е. $A : B = \operatorname{tr}(B^*\circ A) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ji}$.

Пусть дополнительно к сделанным во введении предположениям существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\nu(\varepsilon) = \nu_0$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_p(\varepsilon) = p_*$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\alpha_\eta(\varepsilon) = \eta_0$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\varepsilon^2\alpha_p}{\alpha_\mu} = p_1$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\lambda\varepsilon^2}{\alpha_\mu} = \lambda_1$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\eta\varepsilon^2}{\alpha_\mu} = \eta_1$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_\eta}{\alpha_\lambda} = \eta_2$, $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\alpha_p}{\alpha_\lambda} = p_2$.

В дальнейшем считаем, что выполнено

Предположение 2. 1. $\boldsymbol{F}, \partial\boldsymbol{F}/\partial t \in L^2(\Omega_T)$.

2. *Безразмерные параметры удовлетворяют следующим ограничениям:*

$$p_*^{-1}, \quad \mu_0, \quad \nu_0, \quad \lambda_0^{-1}, \quad \eta_0^{-1} < \infty; \quad 0 < \tau_0 + \mu_1. \tag{1.3}$$

Всюду ниже параметры модели могут принимать все разрешенные условиями теорем значения. Так, например, если $\tau_0 = 0$ или $p_*^{-1} = 0$, то во всех уравнениях слагаемые, содержащие эти величины, пропадают.

Основными результатами настоящей статьи являются следующие теоремы 1–4.

Теорема 1. *При всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0,T]$ существует единственное обобщенное решение задачи (0.1)–(0.4).*

(I) *Если $\lambda_0 < \infty$, то*

$$\max_{0\le t\le T} \| |\boldsymbol{w}^\varepsilon(t)| + \sqrt{\alpha_\mu}\chi^\varepsilon|\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon(t)| + \sqrt{\alpha_\lambda}(1-\chi^\varepsilon)|\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon(t)|\|_{2,\Omega} \le I_F, \tag{1.4}$$

$$\|q^\varepsilon\|_{2,\Omega_T} + \|p^\varepsilon\|_{2,\Omega_T} + \|\pi^\varepsilon\|_{2,\Omega_T} \le I_F, \tag{1.5}$$

где $I_F = C\||\boldsymbol{F}| + |\partial \boldsymbol{F}/\partial t|\|_{2,\Omega_T}$ и C — постоянная, не зависящая от ε.

(II) *Если $\lambda_0 = \infty$, $\mu_1 = \infty$, $0 < \lambda_1 < \infty$, то оценки (1.4), (1.5) справедливы для перенормированных перемещений $w^\varepsilon \to \varepsilon^{-2}\alpha_\mu w^\varepsilon$, для которых в соответствующих уравнениях*

$$\alpha_\mu \to \varepsilon^2, \quad \alpha_\lambda \to \varepsilon^2\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_\mu}, \quad \alpha_\tau \to \varepsilon^2\frac{\alpha_\tau}{\alpha_\mu}, \quad \alpha_\nu \to \varepsilon^2\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\mu}, \quad \alpha_p \to \varepsilon^2\frac{\alpha_p}{\alpha_\mu}.$$

(III) *Если $\lambda_0 = \infty$, $\mu_1 < \infty$, то для перемещений $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ справедливы оценки (1.4), а при выполнении условия*

$$p_* < \infty \tag{1.6}$$

для давлений q^ε и p^ε в жидкой компоненте справедливы оценки (1.5).

Если вместо условия (1.6) выполнены условия

$$0 < p_2; \quad \boldsymbol{F} = \nabla\Phi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \left|\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\right| \in L^2(\Omega_T), \tag{1.7}$$

то справедливы оценки

$$\max_{0\le t\le T}(\|(1-\chi^\varepsilon)\nabla_x(\alpha_\lambda \boldsymbol{w}^\varepsilon(t))\|_{2,\Omega} + \|\chi^\varepsilon \operatorname{div}_x(\alpha_\lambda \boldsymbol{w}^\varepsilon(t))\|_{2,\Omega}) \le I_F^{(1)}, \tag{1.8}$$

где $I_F^{(1)} = C\||\boldsymbol{F}| + |\partial\Phi/\partial t| + |\partial \boldsymbol{F}/\partial t|\|_{2,\Omega_T}$ и C – постоянная, не зависящая от ε. Оценки (1.8) влекут (1.5).

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0 < \infty$, $\mu_0 = 0$. Тогда функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ допускают продолжение $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ из области $\Omega_s^\varepsilon \times (0,T)$ в область Ω_T так, что последовательность $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2\big[(0,T); W_2^1(\Omega)\big]$ к функции $\boldsymbol{u}$. Кроме того, последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$ и $\{\pi^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ соответственно к $\boldsymbol{w}$, p, q и π.*

(I) *Если $\mu_1 = \infty$ или поровое пространство несвязно (изолированные поры при $\gamma \cap \partial Y = \varnothing$), то $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ и функции $\boldsymbol{u}$, p, q и π удовлетворяют в области Ω_T следующей начально-краевой задаче:*

$$\tau_0\hat\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}_x\big\{\lambda_0\mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + B_0^s \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + B_1^s q - (q+\pi)\cdot\mathbb{I}\big\} + \hat\rho \boldsymbol{F}, \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{\eta_0}\pi + C_0^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + a_0^s \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + a_1^s q = 0, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{p_*}p + \frac{1}{\eta_0}\pi + \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = 0, \quad p + \nu_0 p_*^{-1}\frac{\partial p}{\partial t} = q, \tag{1.11}$$

где $\hat\rho = m\rho_f + (1-m)\rho_s$, $m = \int\limits_Y \chi(\boldsymbol{y})\,dy$. Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^s$, матрицы C_0^s, B_0^s и B_1^s и постоянные a_0^s и a_1^s определяются ниже формулами (4.28), (4.30), (4.31).

Дифференциальные уравнения (1.9) замыкаются однородными краевыми и начальными условиями

$$\tau_0 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \tau_0\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0, \ \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0, \ \boldsymbol{x}\in S, \ t > 0. \tag{1.12}$$

(II) *Если $\mu_1 < \infty$, то слабые пределы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}^f$, p, q, π последовательностей $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области Ω_T начально-краевой задаче, состоящей из закона сохранения импульса:*

$$\tau_0\rho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\tau_0\rho_s(1-m)\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}+\nabla(q+\pi)-\hat{\rho}\boldsymbol{F}=\operatorname{div}_x\big\{\lambda_0\mathbb{A}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+B_0^s\operatorname{div}_x\boldsymbol{u}+B_1^s q\big\}, \tag{1.13}$$

и уравнения неразрывности (1.10) для твердой компоненты, уравнения неразрывности и уравнения состояния:

$$\frac{1}{p_*}p+\frac{1}{\eta_0}\pi+\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}^f=(m-1)\operatorname{div}_x\boldsymbol{u},\quad p+\nu_0 p_*^{-1}\frac{\partial p}{\partial t}=q \tag{1.14}$$

для жидкой компоненты и соотношения

$$\boldsymbol{v}=m\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\int_0^t B_1(\mu_1,t-\tau)\cdot\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau, \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{m}\nabla q(\boldsymbol{x},t)+\rho_f\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)-\tau_0\rho_f\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t),$$

если $\tau_0>0$ и $\mu_1>0$, или закона Дарси в форме

$$\boldsymbol{v}=m\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+B_2(\mu_1)\cdot\Big(-\frac{1}{m}\nabla q+\rho_f\boldsymbol{F}\Big), \tag{1.16}$$

если $\tau_0=0$ и $\mu_1>0$, или, наконец, закона сохранения импульса в жидкой компоненте в форме

$$\tau_0\rho_f\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\tau_0\rho_f B_3\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}+(m\mathbb{I}-B_3)\cdot\Big(-\frac{1}{m}\nabla q+\rho_f\boldsymbol{F}\Big), \tag{1.17}$$

если $\tau_0>0$ и $\mu_1=0$.

Здесь $\boldsymbol{v}=\partial\boldsymbol{w}^f/\partial t$ и $\mathbb{A}_0^s$, B_0^s и B_1^s те же самые, что и в (1.9).

Задача замыкается краевыми и начальными условиями (1.12) для перемещений в твердой компоненте и однородным начальным условием и краевым условием

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot n(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{x}\in S,\ t>0, \tag{1.18}$$

для скорости $\boldsymbol{v}$ жидкой компоненты.

В (1.15)–(1.18) $n(\boldsymbol{x})$ — вектор единичной нормали в точке $\boldsymbol{x}\in S$, а матрица $B_1(\mu_1,t)$ и симметричные положительно определенные матрицы $B_2(\mu_1)$ и $(m\mathbb{I}-B_3)$ даются ниже формулами (4.39), (4.41) и (4.43).

Теорема 3. *Пусть $\lambda_0=\infty$.*

(I) *Если $\mu_1<\infty$ и выполнено одно из условий (1.6) или (1.7), то последовательности $\{\chi^\varepsilon\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$ и $\{q^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_T)$ соответственно к $\boldsymbol{w}^f$, p и q. Функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ допускают продолжения $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ из области $\Omega_s^\varepsilon\times(0,T)$ в область Ω_T так, что последовательность $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2\big[(0,T);W_2^1(\Omega)\big]$ к нулю и*

1) *при $\tau_0>0$ и $\mu_1>0$ функции $\boldsymbol{v}=\partial\boldsymbol{w}^f/\partial t$, p и q — решение задачи (F_1) в области Ω_T, в которой*

$$\boldsymbol{v}=\int_0^t B_1(\mu_1,t-\tau)\cdot\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau,\quad \boldsymbol{z}_0=-\frac{1}{m}\nabla q+\rho_f\boldsymbol{F}, \tag{1.19}$$

$$p+\nu_0 p_*^{-1}\frac{\partial p}{\partial t}=q,\quad \frac{1}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}_x\boldsymbol{v}=0; \tag{1.20}$$

2) при $\tau_0 = 0$ и $\mu_1 > 0$ функции $\boldsymbol{v}$, p и q образуют решение задачи (F_2) в области Ω_T, в которой $\boldsymbol{v}$ определяется из закона Дарси

$$\boldsymbol{v} = B_2(\mu_1) \cdot \Big(-\frac{1}{m} \nabla q + \rho_f \boldsymbol{F} \Big), \tag{1.21}$$

а давления p и q — из уравнений (1.20);

3) при $\tau_0 > 0$ и $\mu_1 = 0$ функции $\boldsymbol{v}$, p и q — решение задачи (F_3) в области Ω_T, в которой $\boldsymbol{v}$ определяется из закона сохранения импульса в жидкой компоненте в форме

$$\tau_0 \rho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = (m\mathbb{I} - B_3) \cdot \Big(-\frac{1}{m} \nabla q + \rho_f \boldsymbol{F} \Big), \tag{1.22}$$

а давления p и q — из уравнений (1.20).

Все три задачи замыкаются однородным начальным условием и краевым условием (1.18).

В (1.19), (1.21), (1.22) матрицы $B_1(\mu_1, t)$, $B_2(\mu_1)$ и B_3 те же, что и в теореме 2.

(II) Если $\mu_1 < \infty$ и выполнены условия (1.7), то последовательность $\{\alpha_\lambda \boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ к функции $\boldsymbol{u}$, а последовательность $\{\pi^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функции π. При этом указанные пределы удовлетворяют системе уравнений

$$0 = \operatorname{div}_x \big\{ \mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + B_0^s \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + B_1^s q - (q + \pi) \cdot \mathbb{I} \big\} + \hat{\rho} \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.23}$$

$$\frac{1}{\eta_2} \pi + C_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + a_0^s \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + a_1^s q = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.24}$$

в которой функция q уже найдена как решение одной из задач (F_1)–(F_3) (в зависимости от соотношения параметров τ_0 и μ_1). Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^s$, матрицы C_0^s, B_0^s и B_1^s и постоянные a_0^s и a_1^s определяются ниже формулами (4.28), (4.30), (4.31), в которых $\eta_0 = \eta_2$ и $\lambda_0 = 1$.

Задача замыкается однородными краевыми и начальными условиями.

(III) Если $\mu_1 = \infty$, $p_1^{-1}, \eta_1^{-1} < \infty$ и $0 < \lambda_1 < \infty$, то в $L^2(\Omega_T)$ существуют слабые пределы $\boldsymbol{w}^f$, p и π последовательностей $\{\alpha_\mu \varepsilon^{-2} \chi^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$ и $\{\pi^\varepsilon\}$ и сильный предел $\boldsymbol{u}$ последовательности $\{\alpha_\mu \varepsilon^{-2} \boldsymbol{u}^\varepsilon\}$, которые удовлетворяют в области Ω_T следующей начально-краевой задаче:

$$\operatorname{div}_x \big\{ \lambda_1 \mathbb{A}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + B_0^s \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + B_1^s p - (p + \pi) \cdot \mathbb{I} \big\} + \hat{\rho} \boldsymbol{F} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^f}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + B_2(1) \cdot \Big(-\frac{1}{m} \nabla p + \rho_f \boldsymbol{F} \Big), \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{p_1} p + \frac{1}{\eta_1} \pi + \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^f = (m-1) \operatorname{div}_x \boldsymbol{u}, \quad \frac{1}{\eta_1} \pi + C_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + a_0^s \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + a_1^s p = 0.$$

Здесь симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}_0^s$, матрицы C_0^s, B_0^s и B_1^s и постоянные a_0^s и a_1^s определяются ниже формулами (4.28), (4.30), (4.31), в которых $\eta_0 = \eta_1$ и $\lambda_0 = \lambda_1$.

Задача замыкается однородными краевыми и начальными условиями.

(IV) Если $\mu_1 = \infty$ и $\lambda_1 = \infty$, то соответствующая задача для перемещений $\{\alpha_\mu \varepsilon^{-2} \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ рассмотрена в пп. (I), (II) настоящей теоремы.

Теорема 4. *Пусть $0 < \mu_0; \lambda_0 < \infty$. Тогда слабые пределы $\boldsymbol{w}$, p, q и π последовательностей $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$ и $\{q^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области Ω_T следующей* *системе уравнений:*

$$\tau_0\hat{\rho}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}+\nabla(q+\pi)-\hat{\rho}\boldsymbol{F}=\operatorname{div}_x\Bigg(\mathbb{A}_2:\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+\mathbb{A}_3:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+B_4\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}$$

$$+\int\limits_0^t(\mathbb{A}_4(t-\tau):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))+B_5(t-\tau)\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))\,d\tau\Bigg),\quad(1.26)$$

$$\frac{1}{p_*}p+m\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}=-\int\limits_0^t\big(C_2(t-\tau):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))+a_2(t-\tau)\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)\,d\tau,\quad(1.27)$$

$$\frac{1}{\eta_0}\pi+(1-m)\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}=-\int\limits_0^t\big(C_3(t-\tau):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))+a_3(t-\tau)\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau,\quad(1.28)$$

$$q=p+\frac{\nu_0}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t}.\quad(1.29)$$

Здесь, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{A}_4$ — тензоры четвертого ранга, B_4, B_5, C_2 и C_3 — матрицы, a_2 и a_3 — скаляры. Точные выражения этих объектов даются ниже формулами (6.25)–(6.30).

Задача замыкается соответствующими однородными начальными и краевыми условиями.

Если поровое пространство связное, то симметричный тензор $\mathbb{A}_2$ строго положительно определен. Если поровое пространство несвязное (изолированные поры), то тензор $\mathbb{A}_2$ равен нулю и система уравнений (1.26) *вырождается в анизотропную нелокальную систему уравнений Ламэ с симметричным и строго положительно определенным тензором $\mathbb{A}_3$.*

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Двухмасштабная сходимость. Доказательство теорем 2–4 основано на систематическом применении метода двухмасштабной сходимости, предложенного Нгуетсенгом [8] и получившего широкое применение в теории гомогенизации (см., например, обзор [9]).

Определение 2. Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\}\subset L^2(\Omega_T)$ называется *двухмасштабно сходящейся* к пределу $\varphi\in L^2(\Omega_T\times Y)$ тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-периодической по $\boldsymbol{y}$ функции $\sigma=\sigma(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\searrow0}\int\limits_{\Omega_T}\varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\sigma(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x}/\varepsilon)\,d\boldsymbol{x}dt=\int\limits_{\Omega_T}\int\limits_Y\varphi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}dt.\quad(2.1)$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей утверждаются следующей теоремой [8, 9].

Теорема 5 (теорема Нгуетсенга). 1. *Из любой ограниченной последовательности в $L^2(\Omega_T)$ можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу $\varphi\in L^2(\Omega_T\times Y)$.*

2. *Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Тогда существуют 1-периодическая по $\boldsymbol{y}$ функция $\varphi=\varphi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и*

подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что $\varphi, \nabla_y\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$, φ^ε и $\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_y\varphi$ соответственно.

3. *Если последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L^2(\Omega_T)$, то существуют функции $\varphi \in L^2(\Omega_T)$, $\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что ψ 1-периодична по $\boldsymbol{y}$, $\nabla_y\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$, φ^ε и $\nabla_x\varphi^\varepsilon$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},t) + \nabla_y\psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ соответственно.*

Следствие 2.1. *Пусть $\sigma \in L^2(Y)$, $\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ и последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_T)$ двухмасштабно сходится к некоторому пределу $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$. Тогда последовательность $\sigma^\varepsilon\varphi^\varepsilon$ двухмасштабно сходится к $\sigma\varphi$.*

2.2. Лемма о продолжении. В задачах, аналогичных модели, описываемой системой уравнений (0.1)–(0.4), характерным является следующий факт: оценки на градиент перемещения $\nabla_x\boldsymbol{w}^\varepsilon$ различны в Ω_s и Ω_f (в жидкой и твердой фазах), что не позволяет непосредственно использовать более сильные оценки. Эта сложность преодолевается продолжением поля перемещений, определенного в Ω_s, на всю область Ω с сохранением оценки на норму градиента в Ω_s. Справедлива следующая лемма, которую приведем в удобной для нас формулировке.

Лемма 2.1 [10, 11]. *Пусть выполнено предположение 1 о геометрии области Ω_s^ε, $\psi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega_s^\varepsilon)$ и $\psi^\varepsilon = 0$ на границе $S_s^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega$. Тогда существует функция $\sigma^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ такая, что ее сужение на подобласть Ω_s^ε совпадает с ψ^ε, т. е.*

$$(1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))(\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) - \psi^\varepsilon(\boldsymbol{x})) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{2.2}$$

При этом

$$\|\sigma^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le C\|\psi^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \quad \|\nabla_x\sigma^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le C\|\nabla_x\psi^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \tag{2.3}$$

в которой постоянная C зависит только от геометрии ячейки Y и не зависит от ε.

2.3. Неравенство Фридрихса — Пуанкаре в периодической структуре. Следующая лемма доказана Тартаром в [3, приложение]. Она уточняет постоянную в неравенстве Фридрихса — Пуанкаре в случае ε-периодической геометрической структуры.

Лемма 2.2. *Пусть выполнено предположение 1 относительно геометрии области Ω_f^ε. Тогда для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_f^\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} |\varphi|^2\,dx \le C\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla_x\varphi|^2\,dx$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от ε.

Всюду ниже будем использовать следующие обозначения: $\langle\Phi\rangle_Y = \int\limits_Y \Phi\,dy$, $\langle\Phi\rangle_{Y_f} = \int\limits_Y \chi\Phi\,dy$, $\langle\Phi\rangle_{Y_s} = \int\limits_Y (1-\chi)\Phi\,dy$, $\langle\varphi\rangle_\Omega = \int\limits_\Omega \varphi\,dx$, $\langle\varphi\rangle_{\Omega_T} = \int\limits_{\Omega_T} \varphi\,dxdt$; если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два вектора, то матрица $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ определяется как $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ для произвольного вектора $\mathbf{c}$; если B и C — матрицы, то $B\otimes C$ — тензор четвертого ранга такой, что его свертка с произвольной матрицей A дается формулой $(B\otimes C) : A = B(C : A)$; через $\mathbb{I}^{ij}$ обозначим матрицу, у которой единственный отличный от нуля элемент, равный единице, стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца; наконец, $J^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i)$, где $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — ортонормированный базис.

§ 3. Доказательство теоремы 1

I. Пусть $\lambda_0 < \infty$. При ограничении $\tau_0 > 0$ оценки (1.4) следуют из неравенства

$$\max_{0<t<T}\Big(\sqrt{\alpha_\eta}\Big\|\operatorname{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega_s^\varepsilon} + \sqrt{\alpha_\lambda}\Big\|\nabla_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega_s^\varepsilon} + \sqrt{\alpha_\tau}\Big\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\Big\|_{2,\Omega}$$
$$+\sqrt{\alpha_p}\Big\|\operatorname{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{2,\Omega_f^\varepsilon}\Big) + \sqrt{\alpha_\mu}\Big\|\chi^\varepsilon\nabla_x \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big\|_{2,\Omega_T} + \sqrt{\alpha_\nu}\Big\|\chi^\varepsilon \operatorname{div}_x \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big\|_{2,\Omega_T} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\alpha_\tau}}, \tag{3.1}$$

где C_0 не зависит от ε. Последняя оценка получается после дифференцирования уравнений для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ по времени, умножения на $\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t^2$ и интегрирования по частям. Эта же оценка гарантирует существование и единственность обобщенного решения задачи (0.1)–(0.4).

Если $p_* < \infty$ и $\eta_0 < \infty$, то давления p^ε и π^ε оцениваются из уравнений (0.2) с помощью неравенств (3.1). Давление q^ε оценивается из равенства

$$q^\varepsilon = p^\varepsilon - \alpha_\nu\chi^\varepsilon \operatorname{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \tag{3.2}$$

с помощью (3.1) и соответствующей оценки для давления p^ε.

Если $p_* = \infty$, то оценка (1.5) для суммы давлений $(q^\varepsilon + \pi^\varepsilon)$ вытекает из основного интегрального тождества (1.2) и оценок (3.1) как оценка соответствующего функционала, если мы перенормируем давления так, чтобы

$$\int_\Omega (q^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) + \pi^\varepsilon(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x} = 0.$$

Действительно, из основного интегрального тождества (1.2) и оценок (3.1) следует, что

$$\Big|\int_\Omega (q^\varepsilon + \pi^\varepsilon)\operatorname{div}_x \boldsymbol{\psi}\,d\boldsymbol{x}\Big| \leq C\|\nabla\boldsymbol{\psi}\|_{2,\Omega}.$$

Выбирая теперь $\boldsymbol{\psi}$ так, чтобы $(q^\varepsilon + \pi^\varepsilon) = \operatorname{div}_x\boldsymbol{\psi}$, получим необходимую оценку для суммы давлений $(q^\varepsilon + \pi^\varepsilon)$. Такой выбор всегда возможен (см. [12]), если положить

$$\boldsymbol{\psi} = \nabla\varphi + \boldsymbol{\psi}_0, \quad \operatorname{div}_x\boldsymbol{\psi}_0 = 0, \quad \triangle\varphi = q^\varepsilon + \pi^\varepsilon, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\nabla\varphi + \boldsymbol{\psi}_0)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Заметим, что перенормировка давлений меняет уравнения неразрывности (0.2) для давлений на уравнения

$$\frac{1}{\alpha_p}p^\varepsilon + \chi^\varepsilon \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon = -\frac{1}{m}\beta^\varepsilon\chi^\varepsilon, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{\alpha_\eta}\pi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon = \frac{1}{(1-m)}(1-\chi^\varepsilon)\beta^\varepsilon, \tag{3.4}$$

где $\beta^\varepsilon = \langle(1-\chi^\varepsilon)\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\rangle_\Omega$. Случай $\eta_0 = \infty$ рассматривается аналогично. При этом во всех ситуациях основное интегральное тождество (1.2) позволяет оценить только сумму $q^\varepsilon + \pi^\varepsilon$. Но поскольку произведение функций q^ε и π^ε равно нулю, этого достаточно для оценки каждого слагаемого. Давление p^ε оценивается из уравнения состояния (0.2), если в нем выражение $(\alpha_\nu/\alpha_p)\partial p^\varepsilon/\partial t$ заменить выражением

$$-\chi^\varepsilon\left(\frac{1}{m}\frac{\partial\beta^\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)$$

из уравнения неразрывности (3.3) и воспользоваться оценками (3.1).

Наибольшую трудность представляет оценка $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ в случае, когда $\tau_0 = 0$.

Пусть $\mu_1 > 0$ и $\tau_0 = 0$. Как обычно, основные оценки получаются после умножения уравнений для $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ на $\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ и интегрирования по частям. В полученном выражении только одно слагаемое $\rho^\varepsilon \boldsymbol{F}\cdot\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ требует дополнительных действий. В первую очередь воспользуемся леммой 2.1 и построим продолжение $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ из области Ω_s^ε в область Ω_f^ε так, чтобы $\boldsymbol{u}^\varepsilon = \boldsymbol{w}^\varepsilon$ в Ω_s^ε, $\boldsymbol{u}^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и

$$\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le C\|\nabla_x \boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le \frac{C}{\sqrt{\alpha_\lambda}}\|(1-\chi^\varepsilon)\sqrt{\alpha_\lambda}\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}.$$

После этого оценим $\|\boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}$ с помощью неравенства Пуанкаре (лемма 2.2) для разности $(\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{w}^\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega} &\le \|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + \|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le \|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C\varepsilon\|\chi^\varepsilon\nabla_x(\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{w}^\varepsilon)\|_{2,\Omega}\\
&\le \|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C\varepsilon\|\nabla_x \boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C\bigl(\varepsilon\alpha_\mu^{-\frac12}\bigr)\|\chi^\varepsilon\sqrt{\alpha_\mu}\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}\\
&\le \frac{C}{\sqrt{\alpha_\lambda}}\|(1-\chi^\varepsilon)\sqrt{\alpha_\lambda}\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega} + C\bigl(\varepsilon\alpha_\mu^{-\frac12}\bigr)\|\chi^\varepsilon\sqrt{\alpha_\mu}\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\|_{2,\Omega}.\end{aligned}$$

Далее производная по времени перебрасывается с $\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ на $\rho^\varepsilon \boldsymbol{F}$ и все положительные слагаемые (куда входит и выражение $\alpha_\nu\chi^\varepsilon \operatorname{div}_x \partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$) оцениваются стандартным образом с помощью неравенств Гёльдера и Гроноулла. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассмотренному раннее случаю $\tau_0 > 0$, если воспользоваться следствием неравенств (3.1):

$$\max_{0<t<T} \alpha_\tau \left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{2,\Omega} \le C.$$

II. Доказательство этого утверждения теоремы очевидно, так как перенормировка сводит этот случай к уже рассмотренному случаю $\mu_1 = 1$ и $\tau_0 = 0$ в первой части теоремы.

III. Пусть $\lambda_0 = \infty$, $\mu_1 < \infty$ и выполнены условия (1.7). Очевидно, что оценки (1.4) остаются в силе. Оценки (1.8) следуют из основного интегрального тождества для произведения $\alpha_\lambda \boldsymbol{w}^\varepsilon$ точно так же, как и при выводе оценок (1.4). Только в этом случае слагаемое $\rho^\varepsilon \boldsymbol{F}\cdot\alpha_\lambda\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ преобразуется к виду

$$\Upsilon \equiv \rho_f \boldsymbol{F}\cdot\alpha_\lambda\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} + (\rho_f - \rho_f)(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{F}\cdot\alpha_\lambda\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}.$$

Интеграл от первого слагаемого в Υ преобразуется так:

$$\begin{aligned}\rho_f\int_0^t\int_\Omega \nabla\Phi\cdot\alpha_\lambda\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial \tau}\,d\boldsymbol{x}d\tau &= -\rho_f\int_0^t\int_\Omega \Phi\alpha_\lambda \operatorname{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial \tau}\,d\boldsymbol{x}d\tau\\
&= -\rho_f\int_0^t\int_\Omega\left(\chi^\varepsilon\cdot\Phi\alpha_\lambda\operatorname{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial \tau} + (1-\chi^\varepsilon)\cdot\Phi\alpha_\lambda\operatorname{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial \tau}\right)d\boldsymbol{x}d\tau\\
&= -\rho_f\int_\Omega(\chi^\varepsilon\cdot\Phi\alpha_\lambda\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\cdot\Phi\alpha_\lambda\operatorname{div}_x \boldsymbol{u}^\varepsilon)\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad + \rho_f\int_0^t\int_\Omega(\chi^\varepsilon\cdot\Phi_\tau\alpha_\lambda\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\cdot\Phi_\tau\alpha_\lambda\operatorname{div}_x \boldsymbol{u}^\varepsilon)\,d\boldsymbol{x}d\tau,\end{aligned}$$

и оценивается с помощью слагаемых

$$\int\limits_{\Omega} \big(\chi^{\varepsilon}\big(\alpha_p\alpha_{\lambda}^{-1}\big)(\alpha_{\lambda}\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^{\varepsilon})^2 + (1-\chi^{\varepsilon})|\alpha_{\lambda}\nabla_x \boldsymbol{u}^{\varepsilon}|^2\big)\,d\boldsymbol{x},$$

которые возникают в основном равенстве, если воспользоваться уравнениями неразрывности (0.2).

Интеграл от второго слагаемого в Υ оценивается с помощью положительного слагаемого $\langle(1-\chi^{\varepsilon})|\alpha_{\lambda}\nabla_x\boldsymbol{u}^{\varepsilon}|^2\rangle_{\Omega}$ аналогично предыдущему случаю.

Оценки (1.5) следуют теперь из (1.8). При этом, как и раннее, сумма давлений $q^{\varepsilon}+\pi^{\varepsilon}$ оценивается из интегрального тождества (1.2) как функционал, а давление p^{ε} оценивается из уравнения (3.2) через давление q^{ε} и дивергенцию скорости в жидкой компоненте $\chi^{\varepsilon}\operatorname{div}_x(\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t)$ с помощью (3.1).

Если вместо условия (1.7) выполнено условие (1.6), то оценки (1.5) для давлений p^{ε} и q^{ε} следуют из уравнений (0.2), (3.2) и оценок (3.1). При этом постоянная β^{ε} равна 0. $\square$

§ 4. Доказательство теоремы 2

4.1. Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей перемещений и давлений. При сделанных предположениях выполнены условия теоремы 1. Следовательно, последовательности $\{p^{\varepsilon}\}$, $\{q^{\varepsilon}\}$, $\{\pi^{\varepsilon}\}$ и $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ равномерно по ε ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Но тогда существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ и функции p, π, q и $\boldsymbol{w}$ такие, что при $\varepsilon\searrow 0$

$$p^{\varepsilon}\to p,\quad \pi^{\varepsilon}\to\pi,\quad q^{\varepsilon}\to q,\quad \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\to\boldsymbol{w}\quad \text{слабо в } L^2(\Omega_T). \tag{4.1}$$

Кроме того, последовательность $\{(1-\chi^{\varepsilon})\nabla\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ равномерно по ε ограничена в пространстве $L^2(\Omega_T)$. В силу леммы 2.1 (о продолжении) существует функция $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\in L^{\infty}\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big)$ такая, что $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}=\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ в Ω_s и семейство $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$ равномерно по ε ограничено в $L^{\infty}\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big)$. Тем самым из последовательности $\{\varepsilon>0\}$ можно извлечь подпоследовательность такую, что при $\varepsilon\searrow 0$

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\to\boldsymbol{u} \text{ слабо в } L^2\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big). \tag{4.2}$$

В дополнение к сказанному

$$\chi^{\varepsilon}\alpha_{\mu}\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})\to 0 \tag{4.3}$$

сильно в $L^2(\Omega_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$.

Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

Далее воспользуемся теоремой Нгуетсенга: существуют 1-периодические по $\boldsymbol{y}$ функции $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\Pi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $Q(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ такие, что последовательности $\{p^{\varepsilon}\}$, $\{\pi^{\varepsilon}\}$, $\{q^{\varepsilon}\}$, $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ и $\{\nabla\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$ сходятся двухмасштабно соответственно к $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\Pi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $Q(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\nabla_x\boldsymbol{u}+\nabla_y\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$.

Заметим, что последовательность $\{\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ сходится слабо к функции $\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{u}\in L^2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$. Последнее утверждение для несвязного порового пространства следует из включения $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\in L^2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$. Для связного порового пространства утверждение вытекает из неравенства Фридрихса — Пуанкаре для $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$ в ε-слое границы S и из сходимости последовательности $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}$ к $\boldsymbol{u}$ сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2\big((0,T);W_2^1(\Omega)\big)$.

4.2. Микро- и макроскопические уравнения I.

Лемма 4.1. *Для всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $\boldsymbol{y} \in Y$ слабые и двухмасштабные пределы последовательностей $\{p^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ и $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ удовлетворяют соотношениям*

$$P = p\chi/m, \quad Q = q\chi/m; \tag{4.4}$$

$$\Pi/\eta_0 + (1-\chi)(\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}) = \beta(1-\chi)/(1-m); \tag{4.5}$$

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{W} = 0; \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{W} = \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W} + (1-\chi)\boldsymbol{u}; \tag{4.7}$$

$$q = p + \nu_0 p_*^{-1} \partial p/\partial t; \tag{4.8}$$

$$p/p_* + \operatorname{div}_x \boldsymbol{w} = (1-m)\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}\rangle_{Y_s} - \beta; \tag{4.9}$$

$$\pi/\eta_0 + (1-m)\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}\rangle_{Y_s} = \beta, \tag{4.10}$$

где $\beta = \int\limits_\Omega \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}\rangle_{Y_s} d\boldsymbol{x}$, *если* $p_* + \eta_0 = \infty$, *и* $\beta = 0$, *если* $p_* + \eta_0 < \infty$.

Доказательство. Для доказательства (4.4) подставим в интегральное равенство (1.2) пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ — произвольная 1-периодическая и финитная в Y_f по $\boldsymbol{y}$ функция. Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получим

$$\nabla_y Q(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f. \tag{4.11}$$

Слабый и двухмасштабный предельные переходы в уравнении состояния (0.2) доставляют нам (4.8) и уравнение

$$Q = P + \frac{\nu_0}{p_*}\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{4.12}$$

С учетом (4.11) и (4.12) получим $\nabla_y P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0$, $\boldsymbol{y} \in Y_f$. Применяя далее двухмасштабный предельный переход в равенствах $(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon = 0$, $(1-\chi^\varepsilon)q^\varepsilon = 0$, имеем $(1-\chi)P = 0$, $(1-\chi)Q = 0$, что вместе с (4.11) и (4.12) доказывает (4.4).

Равенства (4.5), (4.6), (4.9), (4.10) — это результат двухмасштабных предельных переходов в (3.3), (3.4) с соответствующими пробными функциями. Так, например, (4.9) получится, если уравнение (3.3) представить в виде

$$\frac{1}{\alpha_p} p^\varepsilon + \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon = (1-\chi^\varepsilon)\operatorname{div}_x \boldsymbol{u}^\varepsilon - \frac{1}{m}\beta^\varepsilon \chi^\varepsilon, \tag{4.13}$$

умножить на произвольную функцию, не зависящую от «быстрой» переменной $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\varepsilon$, и затем перейти к пределу. Аналогично выводится (4.10). Для доказательства (4.6) достаточно рассмотреть двухмасштабные пределы в уравнении (4.13) с пробными функциями вида $\varepsilon\psi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\, h(\boldsymbol{x}, t)$, где ψ и h — произвольные гладкие функции.

Для доказательства (4.7) необходимо рассмотреть двухмасштабные пределы в тождестве $(1-\chi^\varepsilon)(\boldsymbol{w}^\varepsilon - \boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0$. $\square$

Следствие 4.1. *Если $p_* + \eta_0 = \infty$, то слабые пределы p, π и q удовлетворяют равенствам*

$$\langle p\rangle_\Omega = \langle \pi\rangle_\Omega = \langle q\rangle_\Omega = 0. \tag{4.14}$$

Лемма 4.2. *При всех $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ выполняется соотношение*

$$\operatorname{div}_y \left\{ \lambda_0(1-\chi)(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}) + \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u})) - \left(\Pi + \frac{1}{m} q\chi\right) \cdot \mathbb{I} \right\} = 0. \tag{4.15}$$

Доказательство. Подставляя в интегральное тождество (1.2) пробную функцию вида $\boldsymbol{\psi}^\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ — произвольная 1-периодическая по $\boldsymbol{y}$ функция, исчезающая на границе S, и переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получим требуемое микроскопическое уравнение на ячейке Y. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть* $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$, $\boldsymbol{V} = \chi\partial\boldsymbol{w}/\partial t$ *и* $\boldsymbol{v} = \langle\boldsymbol{V}\rangle_Y$. *Тогда функции* $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, q, \pi\}$ *удовлетворяют в области* Ω_T *следующей системе макроскопических уравнений:*

$$\tau_0\rho_f\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\tau_0\rho_s(1-m)\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}_x\{\lambda_0((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s})-(q+\pi)\cdot\mathbb{I}\}+\hat{\rho}\boldsymbol{F}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Уравнения являются результатом предельного перехода в тождестве (1.2), если в качестве пробных функций выбрать финитные в Ω_T функции, не зависящие от «быстрой» переменной $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\varepsilon$. $\square$

4.3. Микро- и макроскопические уравнения II.

Лемма 4.4. *Если* $\mu_1 = \infty$, *то слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ *и* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ *совпадают.*

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно, как и в теореме 1, рассмотреть разность $(\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{w}^\varepsilon)$ и воспользоваться неравенством Фридрихса — Пуанкаре (лемма 2.2). $\square$

Лемма 4.5. *Пусть* $\mu_1 < \infty$. *Тогда слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\{q^\varepsilon\}$ *и* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ *удовлетворяют микроскопическим соотношениям*

$$\tau_0\rho_f\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} = \mu_1\triangle_y\boldsymbol{V} - \nabla_y R - \frac{1}{m}\nabla_x q + \rho_f\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{y}\in Y_f, \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{y}\in\gamma, \tag{4.18}$$

если $\mu_1 > 0$, *и*

$$\tau_0\rho_f\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} = -\nabla_y R - \frac{1}{m}\nabla_x q + \rho_f\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{y}\in Y_f, \tag{4.19}$$

$$\left(\boldsymbol{V} - \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{y}\in\gamma, \tag{4.20}$$

если $\mu_1 = 0$. *В* (4.20) $\boldsymbol{n}$ — *вектор единичной нормали к* γ.

Доказательство. Дифференциальные уравнения (4.17) и (4.19) следуют из интегрального равенства (1.2), если в нем положить $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}(x\varepsilon^{-1})\cdot h(\boldsymbol{x},t)$ с соленоидальной и финитной в Y_f функцией $\boldsymbol{\varphi}$ и перейти к пределу при $\varepsilon\searrow 0$.

Краевые условия (4.18) вытекают из двухмасштабной сходимости последовательности $\{\alpha_\mu^{\frac{1}{2}}\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ к функции $\mu_1^{\frac{1}{2}}\nabla\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, в силу которой функция $\nabla\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ суммируема с квадратом в Y. Краевые условия (4.20) следуют из (4.6). $\square$

Лемма 4.6. *Если поровое пространство несвязно (изолированные поры), то слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ *и* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ *совпадают.*

Доказательство. В самом деле, в каждой из ситуаций $0 < \mu_1 < \infty$ или $\mu_1 = 0$ уравнения (4.6), (4.17), (4.18) или (4.6), (4.19), (4.20) имеют единственное решение $\boldsymbol{V} = \partial\boldsymbol{u}/\partial t$. $\square$

4.4. Усредненные уравнения I.

Лемма 4.7. *Если $\mu_1 = \infty$ или поровое пространство несвязно (изолированные поры), то $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ и слабые пределы $\boldsymbol{u}$, p, q, π последовательностей $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области Ω_T начально-краевой задаче*

$$\tau_0\hat{\rho}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}_x\big\{\lambda_0\mathbb{A}^s_0 : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + B^s_0\operatorname{div}_x\boldsymbol{u} + B^s_1 q - (q+\pi)\cdot\mathbb{I}\big\} + \hat{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{4.21}$$

$$\frac{1}{\eta_0}\pi + C^s_0 : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + a^s_0\operatorname{div}_x\boldsymbol{u} + a^s_1 q = 0, \tag{4.22}$$

$$q = p + \nu_0 p_*^{-1}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{1}{p_*}p + \frac{1}{\eta_0}\pi + \operatorname{div}_x\boldsymbol{u} = 0, \tag{4.23}$$

где симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathbb{A}^s_0$, матрицы C^s_0, B^s_0 и B^s_1 и постоянные a^s_0 и a^s_1 определяется ниже формулами (4.28), (4.30), (4.31).

Дифференциальные уравнения (4.21) *замыкаются однородными краевыми и начальными условиями*

$$\tau_0\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \tau_0\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x}\in S,\ t>0. \tag{4.24}$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что согласно леммам 4.4 и 4.6 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$.

Усредненные уравнения (4.21) получаются из макроскопических уравнений (4.16) после подстановки в них выражения

$$\lambda_0\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s} = \lambda_0\mathbb{A}^s_1 : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}) + B^s_0\operatorname{div}_x\boldsymbol{u} + B^s_1 q.$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (4.5) и (4.15) на элементарной ячейке Y_s. В самом деле, полагая

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{U}^{ij}(\boldsymbol{y})D_{ij} + \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{y})\operatorname{div}_x\boldsymbol{u} + \frac{1}{m}\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{y})q,$$

$$\Pi = \lambda_0\sum_{i,j=1}^{3}\Pi^{ij}(\boldsymbol{y})D_{ij} + \Pi_0(\boldsymbol{y})\operatorname{div}_x\boldsymbol{u} + \frac{1}{m}\Pi_1(\boldsymbol{y})q,$$

где $D_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\big)$, получим следующие периодические краевые задачи в Y_s:

$$\operatorname{div}_y\{(1-\chi)(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{ij}) + J^{ij}) - \Pi^{ij}\cdot\mathbb{I}\} = 0, \quad \frac{\lambda_0}{\eta_0}\Pi^{ij} + (1-\chi)\operatorname{div}_y\boldsymbol{U}^{ij} = 0; \tag{4.25}$$

$$\operatorname{div}_y\{\lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0) - \Pi_0\cdot\mathbb{I}\} = 0, \quad \frac{1}{\eta_0}\Pi_0 + (1-\chi)(\operatorname{div}_y\boldsymbol{U}_0 + 1) = 0; \tag{4.26}$$

$$\operatorname{div}_y\{\lambda_0(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_1) - (\Pi_1+\chi)\cdot\mathbb{I}\} = 0, \quad \frac{1}{\eta_0}\Pi_1 + (1-\chi)\operatorname{div}_y\boldsymbol{U}_1 = 0. \tag{4.27}$$

Заметим, что $\beta = 0$ даже при $p_* + \eta_0 = \infty$ в силу однородного краевого условия для $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ и равенств (4.14).

В принятых в настоящей работе ограничениях на геометрию элементарной ячейки Y_s задачи (4.25)–(4.27) всегда имеют единственное (с точностью до произвольного постоянного вектора) решение. Чтобы не иметь дело с произвольными постоянными, положим $\langle\boldsymbol{U}^{ij}\rangle_{Y_s} = \langle\boldsymbol{U}_0\rangle_{Y_s} = \langle\boldsymbol{U}_1\rangle_{Y_s} = 0$. Таким образом,

$$\mathbb{A}^s_0 = (1-m)\sum_{i,j=1}^{3}J^{ij}\otimes J^{ij} + \mathbb{A}^s_1, \quad \mathbb{A}^s_1 = \sum_{i,j=1}^{3}\langle(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}^{ij})\rangle_Y\otimes J^{ij}. \tag{4.28}$$

Симметричность тензора $\mathbb{A}^s_0$ следует из симметричности тензора $\mathbb{A}^s_1$. Симметричность последнего вытекает из равенства

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}^{ij})\rangle_{Y_s} : J^{kl} = -\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}^{ij}) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}^{kl})\rangle_{Y_s} - \frac{\lambda_0}{\eta_0}\Pi^{ij}\Pi^{kl}, \tag{4.29}$$

которое получается после умножения уравнения (4.25) для $\boldsymbol{U}^{ij}$ на $\boldsymbol{U}^{kl}$ и интегрирования по частям.

Это же равенство доставляет нам положительную определенность тензора $\mathbb{A}^s_0$. В самом деле, пусть $\boldsymbol{\zeta}$ — произвольная симметричная матрица. Полагая

$$\mathbb{Z} = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{U}^{ij}\boldsymbol{\zeta}_{ij}, \quad \widetilde{\Pi} = \sum_{i,j=1}^{3} \Pi^{ij}\boldsymbol{\zeta}_{ij},$$

с учетом (4.29) получим

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbb{Z})\rangle_{Y_s} : \boldsymbol{\zeta} = -\langle \mathbb{D}(y, \mathbb{Z}) : \mathbb{D}(y, \mathbb{Z})\rangle_{Y_s} - \frac{\lambda_0}{\eta_0}\widetilde{\Pi}^2.$$

Последнее равенство и определение тензора $\mathbb{A}^s_0$ дают нам

$$(\mathbb{A}^s_0 : \boldsymbol{\zeta}) : \boldsymbol{\zeta} = \langle (\mathbb{D}(y, \mathbb{Z}) + \boldsymbol{\zeta}) : (\mathbb{D}(y, \mathbb{Z}) + \boldsymbol{\zeta})\rangle_{Y_s} + \frac{\lambda_0}{\eta_0}\widetilde{\Pi}^2.$$

Строгая положительная определенность тензора $\mathbb{A}^s_0$ следует теперь из вышеприведенного равенства и геометрии элементарной ячейки Y_s. А именно, пусть для некоторого $\boldsymbol{\zeta}$ такого, что $\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta} = 1$, будет $(\mathbb{A}^s_0 : \boldsymbol{\zeta}) : \boldsymbol{\zeta} = 0$. Но тогда $(\mathbb{D}(y, \mathbb{Z}) + \boldsymbol{\zeta}) = 0$, что возможно, если и только если $\mathbb{Z}$ — линейная функция переменной $\boldsymbol{y}$. В свою очередь, все линейные периодические функции в Y_s исчерпываются постоянными. Наконец, нормировка $\langle \boldsymbol{U}^{ij}\rangle_{Y_s} = 0$ влечет равенство $\mathbb{Z} = 0$, что невозможно.

Наконец, уравнения для давлений (4.22) и (4.23) — следствие уравнений (4.8)–(4.10). При этом

$$B^s_0 = \lambda_0\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_0)\rangle_{Y_s}, \quad B^s_1 = \frac{\lambda_0}{m}\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_1)\rangle_{Y_s}, \quad a^s_1 = \frac{1}{m}\langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}_1\rangle_{Y_s}, \tag{4.30}$$

$$C^s_0 = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}^{ij}\rangle_{Y_s} J^{ij}, \quad a^s_0 = 1 - m + \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}_0\rangle_{Y_s}. \tag{4.31}$$

4.5. Усредненные уравнения II. Пусть теперь $\mu_1 < \infty$. Как и выше, убеждаемся, что слабый предел $\boldsymbol{u}$ последовательности $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ удовлетворяет начально-краевой задаче, аналогичной (4.21)–(4.23). Основное отличие здесь в том, что слабый предел $\boldsymbol{w}$ последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, вообще говоря, отличен от $\boldsymbol{u}$. А именно, справедлива

Лемма 4.8. *Если $\mu_1 < \infty$, то слабые пределы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}^f$, p, q, π последовательностей $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$ удовлетворяют в Ω_T начально-краевой задаче, состоящей из закона сохранения импульса:*

$$\tau_0\left(\rho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho_s(1-m)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right) + \nabla(q+\pi) - \hat{\rho}\boldsymbol{F} = \operatorname{div}_x\big\{\lambda_0\mathbb{A}^s_0 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) + B^s_0\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} + B^s_1 q\big\}, \tag{4.32}$$

уравнения неразрывности (4.22) для твердой компоненты, где $\boldsymbol{v} = \partial\boldsymbol{w}^f/\partial t$ и $\mathbb{A}^s_0$, B^s_0 и B^s_1 те же самые, что и в (4.21), уравнения состояния и уравнения неразрывности:

$$p + \nu_0 p_*^{-1}\frac{\partial p}{\partial t} = q, \quad \frac{1}{p_*}p + \frac{1}{\eta_0}\pi + \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^f = (m-1)\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} \tag{4.33}$$

для жидкой компоненты, и соотношения

$$\boldsymbol{v} = m\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \int\limits_0^t B_1(\mu_1, t-\tau)\cdot \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau, \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{m}\nabla q(\boldsymbol{x},t) + \rho_f \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) - \tau_0\rho_f\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t),$$

если $\tau_0 > 0$ *и* $\mu_1 > 0$*, или закона Дарси в форме*

$$\boldsymbol{v} = m\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + B_2(\mu_1)\cdot\Big(-\frac{1}{m}\nabla q + \rho_f\boldsymbol{F}\Big), \tag{4.35}$$

если $\tau_0 = 0$ *и* $\mu_1 > 0$*, или, наконец, закона сохранения импульса в жидкой компоненте в форме*

$$\tau_0\rho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \tau_0\rho_f B_3\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} + (m\mathbb{I} - B_3)\cdot\Big(-\frac{1}{m}\nabla q + \rho_f\boldsymbol{F}\Big), \tag{4.36}$$

если $\tau_0 > 0$ *и* $\mu_1 = 0$*. Задача замыкается краевыми и начальными условиями* (4.24) *для перемещений* $\boldsymbol{u}$ *твердой компоненты и краевым условием*

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in S,\ t>0, \tag{4.37}$$

для скорости $\boldsymbol{v}$ *жидкой компоненты. В* (4.34)–(4.37) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ *— вектор единичной нормали в точке* $\boldsymbol{x}\in S$*, а матрицы* $B_1(\mu_1,t)$*,* $B_2(\mu_1)$ *и* B_3 *определяются ниже формулами* (4.39)–(4.43).

Доказательство. Усредненные уравнения, описывающие закон сохранения импульса, и усредненное уравнение неразрывности получаются аналогично (4.21), (4.22). Например, для вывода (4.33) достаточно выразить $\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}$ в сумме уравнений (4.9) и (4.10), используя усреднение в уравнении (4.7): $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^f + (1-m)\boldsymbol{u}$. Поэтому доказательство леммы сводится к выводу усредненных уравнений для скорости $\boldsymbol{v}$ жидкой компоненты. Вывод краевого условия (4.37) стандартный [3].

(а) Если $\mu_1 > 0$ и $\tau_0 > 0$, то решение микроскопических уравнений (4.6), (4.17), (4.18) с однородными начальными условиями дается формулой

$$\boldsymbol{V} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \int\limits_0^t \mathbf{B}_1^f(\boldsymbol{y},t-\tau)\cdot\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau, \quad R = \int\limits_0^t R_f(\boldsymbol{y},t-\tau)\cdot\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau,$$

в которой

$$\mathbf{B}_1^f(\boldsymbol{y},t) = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{V}^i(\boldsymbol{y},t)\otimes\boldsymbol{e}_i, \quad R_f(\boldsymbol{y},t) = \sum_{i=1}^3 R^i(\boldsymbol{y},t)\boldsymbol{e}_i,$$

а функции $\boldsymbol{V}^i(\boldsymbol{y},t)$ и $R^i(\boldsymbol{y},t)$ определяются из решения периодической начально-краевой задачи

$$\begin{gathered}\tau_0\rho_f\frac{\partial \boldsymbol{V}^i}{\partial t} - \mu_1\triangle\boldsymbol{V}^i + \nabla R^i = 0, \quad \operatorname{div}_y\boldsymbol{V}^i = 0, \quad \boldsymbol{y}\in Y_f,\ t>0,\\ \boldsymbol{V}^i = 0, \quad \boldsymbol{y}\in\gamma,\ t>0; \quad \tau_0\rho_f\boldsymbol{V}^i(\boldsymbol{y},0) = \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y}\in Y_f.\end{gathered} \tag{4.38}$$

В (4.38) $\boldsymbol{e}_i$ — единичный вектор координатной оси x_i. Следовательно,

$$B_1(\mu_1,t) = \langle \mathbf{B}_1^f\rangle_{Y_f}(t). \tag{4.39}$$

(б) Если $\tau_0 = 0$ и $\mu_1 > 0$, то решение стационарных микроскопических уравнений (4.6), (4.17), (4.18) дается формулой

$$\boldsymbol{V} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_2^f(\boldsymbol{y})\cdot(-\nabla q + \rho_f\boldsymbol{F}),$$

в которой $\mathbf{B}_2^f(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{3} \boldsymbol{U}^i(\boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{e}_i$, а функции $\boldsymbol{U}^i(\boldsymbol{y})$ определяются из решения периодической краевой задачи

$$-\mu_1 \triangle \boldsymbol{U}^i + \nabla R^i = \boldsymbol{e}_i, \quad \operatorname{div}_y \boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \quad \boldsymbol{U}^i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma. \tag{4.40}$$

Таким образом,

$$B_2(\mu_1) = \big\langle \mathbf{B}_2^f(\boldsymbol{y}) \big\rangle_{Y_f}. \tag{4.41}$$

Матрица $B_2(\mu_1)$ является симметричной и положительно определенной [3, с. 158–190].

(в) Наконец, если $\tau_0 > 0$ и $\mu_1 = 0$, то для решения микроскопических уравнений (4.6), (4.19), (4.20) в первую очередь определим давление $R(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ как решение периодической задачи Неймана для уравнения Лапласа в области Y_f. Если $R(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{3} R_i(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, t)$, где $R^i(\boldsymbol{y})$ — решение задачи

$$\Delta R_i = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f; \quad \nabla R_i \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma, \tag{4.42}$$

то формула (4.36) получается после усреднения уравнений (4.19) и

$$B_3 = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla R_i(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} \otimes \boldsymbol{e}_i, \tag{4.43}$$

где матрица $B = (m\mathbb{I} - B_3)$ симметричная и положительно определенная. Действительно, пусть $\widetilde{R} = \sum\limits_{i=1}^{3} R_i \xi_i$ для всякого единичного вектора ξ. Тогда $(B \cdot \xi) \cdot \xi = \langle (\xi - \nabla \widetilde{R})^2 \rangle_{Y_f} > 0$ в силу тех же самых рассуждений, что и в лемме 4.7. $\square$

§ 5. Доказательство теоремы 3

5.1. Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей перемещений и давлений. I. Пусть $\mu_1 < \infty$ и выполнено одно из условий (1.6) или (1.7). Тогда в силу теорем 1 и 5 заключаем, что последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$ и $\{q^\varepsilon\}$ сходятся двухмаштабно соответственно к функциям $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и $Q(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, p и q, а последовательность $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)\}$, где $\boldsymbol{u}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ — продолжение $\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ из области Ω_s^ε в область Ω, сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ к нулю.

II. Если $\mu_1 < \infty$ и выполнено условие (1.7), то в силу оценок (1.5) и (1.8) последовательность $\{\alpha_\lambda \boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ к функции $\boldsymbol{u}$, а последовательность $\{\pi^\varepsilon\}$ сходится слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функции π.

III. Если $\mu_1 = \infty$, $p_1^{-1}, \eta_1^{-1} < \infty$ и $0 < \lambda_1 < \infty$, то в силу части II теоремы 1 последовательности $\{\alpha_\mu \varepsilon^{-2} \chi^\varepsilon \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$ и $\{q^\varepsilon\}$ сходятся двухмаштабно соответственно к функциям $\chi(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\Pi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и $Q(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}^f$, p, π и q, а последовательность $\{\alpha_\mu \varepsilon^{-2} \boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ сходится сильно в $L^2(\Omega_T)$ и слабо в $L^2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ к функции $\boldsymbol{u}$.

При этом, как и в § 4, заключаем, что $\boldsymbol{u} \in L^2\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$.

5.2. Усредненные уравнения. I. Если $\mu_1 < \infty$ и выполнено одно из условий (1.6) или (1.7), то, как и в случае теоремы 2, для скорости $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{w}^f / \partial t$ жидкой компоненты и давлений p и q получим замкнутую систему (назовем ее *задачей* (F_1)–(F_3) в зависимости от матриц $B_1(\mu_1)$–B_3), состоящую из вариантов закона сохранения импульса (4.34)–(4.36) и краевого условия (4.37), в которых

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=0$, и уравнений

$$p+\nu_0 p_*^{-1}\frac{\partial p}{\partial t}=q,\quad \frac{1}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}_x\boldsymbol{v}=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t>0. \tag{5.1}$$

II. Пусть $\mu_1<\infty$ и выполнено условие (1.7). Мы знаем, что предельные перемещения в твердом скелете равны нулю. Чтобы получить более точную асимптотику для этих перемещений, воспользуемся перенормировкой. А именно, пусть $\boldsymbol{w}^\varepsilon\to\alpha_\lambda\boldsymbol{w}^\varepsilon$. Тогда новые перемещения удовлетворяют той же самой задаче, в которой $\alpha_\eta\to\alpha_\eta\alpha_\lambda^{-1}$, $\alpha_\lambda\to 1$, $\alpha_\tau\to\alpha_\tau\alpha_\lambda^{-1}$. Таким образом, мы попадаем в условия теоремы 2. А именно, сильные, слабые и двухмасштабные пределы $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, π, $\Pi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ удовлетворяют той же самой системе микро- и макроскопических уравнений для соответствующих функций, определяющих поведение твердой компоненты, в которых давление q уже известно из решения задач (F_1)–(F_3). Единственное отличие состоит в микро- и макроскопических уравнениях неразрывности, которые совпадают с (4.5) и (4.10), если η_0 заменить на η_2.

Следовательно, для $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ и $\pi(\boldsymbol{x},t)$ справедливы усредненное уравнение (закон сохранения импульса) в форме

$$0=\operatorname{div}_x\bigl\{\mathbb{A}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+B_0^s\operatorname{div}_x\boldsymbol{u}+B_1^s q-(q+\pi)\cdot\mathbb{I}\bigr\}+\hat{\rho}\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{5.2}$$

макроскопическое уравнение неразрывности (4.22), в котором $\eta_0=\eta_2$, и краевое условие (1.12). Тензор $\mathbb{A}_0^s$, матрицы C_0^s, B_0^s и B_1^s и постоянные a_0^s и a_1^s определяются из формул (4.28), (4.30), (4.31), в которых $\eta_0=\eta_2$ и $\lambda_0=1$.

III. Если $\mu_1=\infty$, $p_1^{-1},\eta_1^{-1}<\infty$ и $0<\lambda_1<\infty$, то, рассматривая перенормированные перемещения $\boldsymbol{w}^\varepsilon\to\alpha_\mu\varepsilon^{-2}\boldsymbol{w}^\varepsilon$, мы попадаем в ситуацию, рассмотренную в теореме 2, когда $\mu_0=0$, $\mu_1=1$, $\tau_0=0$ и $\lambda_0=\lambda_1$, $\nu_0=0$, $p_*=p_1$ и $\eta_0=\eta_1$. А именно, функции $\boldsymbol{w}^f$, p, π и $\boldsymbol{u}$ удовлетворяют следующей начально-краевой задаче в области Ω_T:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}_x\bigl\{\lambda_1\mathbb{A}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+B_0^s\operatorname{div}_x\boldsymbol{u}+B_1^s p-(p+\pi)\cdot\mathbb{I}\bigr\}+\hat{\rho}\boldsymbol{F}=0,\\ \frac{\partial\boldsymbol{w}^f}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+B_2(1)\cdot\left(-\frac{1}{m}\nabla p+\rho_f\boldsymbol{F}\right),\\ \frac{1}{p_1}p+\frac{1}{\eta_1}\pi+\operatorname{div}_x\boldsymbol{w}^f=(m-1)\operatorname{div}_x\boldsymbol{u},\quad \frac{1}{\eta_1}\pi+C_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})+a_0^s\operatorname{div}_x\boldsymbol{u}+a_1^s p=0.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Как и в предыдущем пункте, тензор $\mathbb{A}_0^s$, матрицы C_0^s, B_0^s и B_1^s и постоянные a_0^s и a_1^s определяются из формул (4.28), (4.30), (4.31), в которых $\eta_0=\eta_1$ и $\lambda_0=\lambda_1$.

Заметим, что здесь $\nu_0=0$. Следовательно, уравнение состояния $p+\nu_0p_*^{-1}\frac{\partial p}{\partial t}=q$ переходит в равенство $p=q$.

Задача замыкается соответствующими однородными краевыми и начальными условиями.

§ 6. Доказательство теоремы 4

6.1. Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей перемещения и давлений. В силу сделанных предположений выполнены условия теоремы 1. Тогда последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$ и $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Значит, существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon>0\}$ и функции p, π, q и $\boldsymbol{w}$ такие, что при $\varepsilon\searrow 0$

$$p^\varepsilon\to p,\quad q^\varepsilon\to q,\quad \pi^\varepsilon\to\pi,\quad \boldsymbol{w}^\varepsilon\to\boldsymbol{w}\quad \text{слабо в } L^2(\Omega_T). \tag{6.1}$$

Кроме того, из оценки (3.1) следует, что

$$\nabla_x\boldsymbol{w}^\varepsilon\underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow}\nabla_x\boldsymbol{w}\quad \text{слабо в } L^2(\Omega_T). \tag{6.2}$$

В силу теоремы Нгуетсенга существуют еще одна подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0\}$ и 1-периодические по $\boldsymbol{y}$ функции $P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\Pi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $Q(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ такие, что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$ и $\{\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ при $\varepsilon \searrow 0$ сходятся двухмасштабно соответственно к P, Π, Q и $\nabla_x \boldsymbol{w} + \nabla_y \boldsymbol{W}$.

6.2. Микро- и макроскопические уравнения. В этом пункте мы не будем следить за функциями времени, нормирующими давления. Как показано раннее, в конечном итоге их можно положить равными нулю.

Лемма 6.1. *Двухмасштабные пределы последовательностей $\{p^\varepsilon\}$, $\{\pi^\varepsilon\}$, $\{q^\varepsilon\}$ и $\{\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$ удовлетворяют в $Y_T = Y \times (0, T)$ микроскопическим уравнениям:*

$$\frac{1}{\eta_0}\Pi + (1-\chi)(\operatorname{div}_x \boldsymbol{w} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{W}) = 0; \tag{6.3}$$

$$\frac{1}{p_*}P + \chi(\operatorname{div}_x \boldsymbol{w} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{W}) = 0, \quad Q = P + \frac{\nu_0}{p_*}\frac{\partial P}{\partial t}; \tag{6.4}$$

$$\operatorname{div}_y\left(\chi\mu_0\left(\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right)\right) + (1-\chi)\lambda_0(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}))\right) - \nabla_y(Q + \Pi) = 0. \tag{6.5}$$

Лемма 6.2. *Слабые пределы p, π, q и $\boldsymbol{w}$ удовлетворяют в Ω_T следующей системе макроскопических уравнений:*

$$\frac{1}{\eta_0}\pi + (1-m)\operatorname{div}_x \boldsymbol{w} + \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{W}\rangle_{Y_s} = 0; \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{p_*}p + m\operatorname{div}_x \boldsymbol{w} + \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{W}\rangle_{Y_f} = 0, \quad q = p + \frac{\nu_0}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t}; \tag{6.7}$$

$$\tau_0\hat{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div}_x\left(\mu_0\left(m\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \left\langle \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right)\right\rangle_{Y_f}\right) + \lambda_0(1-m)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})\rangle_{Y_s} - (q+\pi)\mathbb{I}\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F}. \tag{6.8}$$

Доказательства этих утверждений повторяют доказательства соответствующих утверждений в леммах 4.1–4.3.

6.3. Усредненные уравнения.

Лемма 6.3. *Слабые пределы p, π, q и $\boldsymbol{w}$ удовлетворяют в Ω_T следующей усредненной системе уравнений:*

$$\tau_0\hat{\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} + \nabla(q+\pi) - \hat{\rho}\boldsymbol{F} = \operatorname{div}_x\left(\mathbb{A}_2 : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \mathbb{A}_3 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + B_4 \operatorname{div}_x \boldsymbol{w} + \int_0^t (\mathbb{A}_4(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)) + B_5(t-\tau)\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))\, d\tau\right), \tag{6.9}$$

$$\frac{1}{p_*}p + m\operatorname{div}_x \boldsymbol{w} = -\int_0^t (C_2(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)) + a_2(t-\tau)\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))\, d\tau, \tag{6.10}$$

$$\frac{1}{\eta_0}\pi + (1-m)\operatorname{div}_x \boldsymbol{w} = -\int_0^t (C_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)) + a_3(t-\tau)\operatorname{div}_x \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))\, d\tau, \tag{6.11}$$

$$q = p + \frac{\nu_0}{p_*}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{6.12}$$

Здесь, $\mathbb{A}_2$–$\mathbb{A}_4$ — тензоры четвертого ранга, B_4, B_5, C_2, C_3 — матрицы и a_2, a_3 — скаляры. Точные выражения этих объектов даются ниже формулами (6.25)–(6.30).

Доказательство. Пусть

$$Z(\boldsymbol{x},t) = \mu_0\mathbb{D}\biggl(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\biggr) - \lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}), \quad Z_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot(Z\cdot\mathbf{e}_j), \quad z(\boldsymbol{x},t) = \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}.$$

Как обычно, ищем решение системы микроскопических уравнений (6.3)–(6.5) в виде

$$\boldsymbol{W} = \int_0^t \Biggl[\boldsymbol{W}^0(y,t-\tau)z(\boldsymbol{x},\tau) + \sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{W}^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\Biggr]d\tau, \tag{6.13}$$

$$P = \chi\int_0^t \Biggl[P^0(\boldsymbol{y},t-\tau)z(\boldsymbol{x},\tau) + \sum_{i,j=1}^{3}P^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\Biggr]d\tau, \tag{6.14}$$

$$\begin{gathered} Q = \chi\Biggl(Q_0(y)\cdot z(\boldsymbol{x},t) + \sum_{i,j=1}^{3}Q_0^{ij}(\boldsymbol{y})\cdot Z_{ij}(\boldsymbol{x},t) \\ + \int_0^t \Biggl[Q^0(\boldsymbol{y},t-\tau)z(\boldsymbol{x},\tau) + \sum_{i,j=1}^{3}Q^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\Biggr]d\tau\Biggr), \end{gathered} \tag{6.15}$$

$$\Pi = (1-\chi)\Biggl(\int_0^t \Biggl[\Pi^0(\boldsymbol{y},t-\tau)z(\boldsymbol{x},\tau) + \sum_{i,j=1}^{3}\Pi^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\Biggr]d\tau\Biggr), \tag{6.16}$$

где 1-периодические по $\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{W}^0$, $\boldsymbol{W}^{ij}$, P^0, P^{ij}, Q_0, Q^0, Q^{ij}, Q_0^{ij}, Π^0, Π^{ij} удовлетворяют следующим периодическим начально-краевым задачам на элементарной ячейке Y.

Задача (I).

$$\operatorname{div}_y\biggl(\chi\biggl(\mu_0\mathbb{D}\biggl(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}^{ij}}{\partial t}\biggr) + (1-\chi)\lambda_0\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{ij}) - ((1-\chi)\Pi^{ij}+\chi Q^{ij})\mathbb{I}\biggr)\biggr) = 0; \tag{6.17}$$

$$\frac{1}{p_*}P^{ij} + \chi\operatorname{div}_y \boldsymbol{W}^{ij} = 0, \quad Q^{ij} = P^{ij} + \frac{\nu_0}{p_*}\frac{\partial P^{ij}}{\partial t}; \tag{6.18}$$

$$\frac{1}{\eta_0}\Pi^{ij} + (1-\chi)\operatorname{div}_y \boldsymbol{W}^{ij} = 0, \quad \boldsymbol{W}^{ij}(\boldsymbol{y},0) = \boldsymbol{W}_0^{ij}(\boldsymbol{y}); \tag{6.19}$$

$$\operatorname{div}_y\bigl(\chi\bigl(\mu_0\mathbb{D}\bigl(y,\boldsymbol{W}_0^{ij}\bigr) + J^{ij} - Q_0^{ij}\mathbb{I}\bigr)\bigr) = 0, \quad \chi\bigl(Q_0^{ij} + \nu_0\operatorname{div}_y \boldsymbol{W}_0^{ij}\bigr) = 0. \tag{6.20}$$

Задача (II).

$$\operatorname{div}_y\biggl(\chi\biggl(\mu_0\mathbb{D}\biggl(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}^{0}}{\partial t}\biggr) + (1-\chi)\lambda_0\mathbb{D}(y,\mathbf{W}^{0}) - ((1-\chi)\Pi^{0}+\chi Q^{0})\mathbb{I}\biggr)\biggr) = 0; \tag{6.21}$$

$$\frac{1}{p_*}P^{0} + \chi(\operatorname{div}_y \mathbf{W}^{0}+1) = 0, \quad Q^{0} = P^{0} + \frac{\nu_0}{p_*}\frac{\partial P^{0}}{\partial t}; \tag{6.22}$$

$$\frac{1}{\eta_0}\Pi^{0} + (1-\chi)(\operatorname{div}_y \mathbf{W}^{0}+1) = 0, \quad \mathbf{W}^{0}(\boldsymbol{y},0) = \mathbf{W}_0^{0}(\boldsymbol{y}); \tag{6.23}$$

$$\operatorname{div}_y\bigl(\chi\bigl(\mu_0\mathbb{D}\bigl(y,\boldsymbol{W}_0^{0}\bigr) - Q_0\mathbb{I}\bigr)\bigr) = 0, \quad \chi\bigl(Q_0 + \nu_0\bigl(\operatorname{div}_y \mathbf{W}_0^{0}+1\bigr)\bigr) = 0. \tag{6.24}$$

Тогда

$$\mathbb{A}_2 = \mu_0 m \sum_{i,j=1}^{3} J^{ij} \otimes J^{ij} + \mu_0 \mathbb{A}_0^f, \quad \mathbb{A}_0^f = \sum_{i,j=1}^{3} \big\langle \mu_0 \mathbb{D}\big(y, \mathbf{W}_0^{ij}\big) \big\rangle_{Y_f} \otimes J^{ij}; \tag{6.25}$$

$$\mathbb{A}_3 = \lambda_0(1-m) \sum_{i,j=1}^{3} J^{ij} \otimes J^{ij} - \lambda_0 \mathbb{A}_0^f + \mu_0 \mathbb{A}_1^f(0), \quad \mathbb{A}_4(t) = \mu_0 \frac{d}{dt} \mathbb{A}_1^f(t) - \lambda_0 \mathbb{A}_1^f(t); \tag{6.26}$$

$$\mathbb{A}_1^f(t) = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\left\langle \mu_0 \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial\, W^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t)\right) \right\rangle_{Y_f} + \langle \lambda_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{ij}(\boldsymbol{y}, t)) \rangle_{Y_s} \right) \otimes J^{ij}; \tag{6.27}$$

$$B_5(t) = \left\langle \chi \mu_0 \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^0}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t)\right) + (1-\chi) \lambda_0 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^0(\boldsymbol{y}, t)) \right\rangle_Y; \tag{6.28}$$

$$C_2(t) = -C_3(t) = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \chi \operatorname{div}_y \boldsymbol{W}^{ij}(\boldsymbol{y}, t) \rangle_Y J^{ij}; \tag{6.29}$$

$$a_2(t) = -a_3(t) = \langle \chi \operatorname{div}_y \boldsymbol{W}^0(\boldsymbol{y}, t) \rangle_Y, \quad B_4 = \big\langle \chi \mu_0 \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^0(\boldsymbol{y})\big) \big\rangle_Y. \qquad \square \tag{6.30}$$

Лемма 6.4. *Тензоры $\mathbb{A}_2$–$\mathbb{A}_4$, матрицы B_4, B_5, C_2 и C_3 и скаляры a_2 и a_3 корректно определены и являются бесконечно дифференцируемыми функциями времени.*

Если поровое пространство связное, то симметричный тензор $\mathbb{A}_2$ строго положительно определен. В случае изолированных пор $\mathbb{A}_2 = 0$ и симметричный тензор $\mathbb{A}_3$ строго положительно определен.

Доказательство корректности определения указанных объектов есть просто доказательство корректной разрешимости задач (I) и (II). Разрешимость последних следует в силу их линейности из стандартных априорных оценок (умножение уравнения на решение и интегрирование результата умножения по частям). Заметим, что решения этих задач определены с точностью до вектор-функции времени. Поэтому потребуем, чтобы среднее по элементарной ячейке от решения было нулем. Гладкость по времени следует из оценок производных по времени в начальный момент. Так, например, в задаче (I) в первую очередь оценивается $\chi \boldsymbol{W}_0^{ij}$ как решение задачи (6.20). Далее, решая (6.17) совместно с уравнением неразрывности (6.19) при $t = 0$ и используя непрерывность перемещений на границе γ, определим и оценим $(1-\chi)\boldsymbol{W}_0^{ij}$. После этого из (6.17) при $t = 0$ определим и оценим $\chi(\partial \boldsymbol{W}^{ij}/\partial t)(\boldsymbol{y}, 0)$. Аналогично оцениваются вторые производные по времени после дифференцирования всех уравнений задачи по времени.

Симметричность и положительная определенность тензора $\mathbb{A}_2$ доказываются точно так же, как и для тензора $\mathbb{A}_0^s$. Если поровое пространство несвязно, то краевая задача (6.20) имеет единственное решение, линейное по переменным $\boldsymbol{y}$, так, что

$$\chi\big(\mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{ij}\big) + J^{ij}\big) = 0. \tag{6.31}$$

Последнее эквивалентно равенству $\mathbb{A}_2 = 0$.

В этом случае тензор $\mathbb{A}_3$ становится строго положительно определенным. В самом деле,

$$\mathbb{A}_3 = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{3} J^{ij} \otimes J^{ij} + \mu_0 \mathbb{A}_1^f(0)$$
$$= \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{3} J^{ij} \otimes J^{ij} + \sum_{i,j=1}^{3} \left\langle \chi\mu_0 \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0)\right) + \frac{\lambda_0}{\mu_0} J^{ij} \right\rangle_Y \otimes J^{ij}.$$

С другой стороны, обращаясь к уравнениям (6.17) в начальный момент времени, видим, что

$$\left\langle \chi\mu_0 \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0)\right) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{kl}\big) \right\rangle_Y$$
$$= -\lambda_0 \big\langle \chi \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{ij}\big) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{kl}\big)\big\rangle - \left\langle \frac{1}{\eta_0} \Pi^{ij} \cdot \Pi^{kl} \right\rangle_Y \bigg|_{t=0}.$$

Кроме того, в силу (6.31)

$$\left\langle \chi\mu_0 \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial W^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0)\right) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{kl}\big) \right\rangle_Y = -\left\langle \chi \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0)\right) : J^{kl} \right\rangle_Y,$$

что и доказывает наше утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coussy O.* Poromechanics. Chichester: John Wiley and Sons, 2002.

2. *Burridge R., Keller J. B.* Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70, N 4. P. 1140–1146.

3. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория вибраций. М.: Мир, 1984.

4. *Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed. I // Nonlinear Anal. 2000. V. 40. P. 185–212.

5. *Biot M.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. V. 34, N 9. P. 1256–1264.

6. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21, N 6. P. 1394–1414.

7. *Clopeau Th., Ferrin J. L., Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed. II // Math. and Comput. Modelling. 2001. V. 33. P. 821–841.

8. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20, N 3. P. 608–623.

9. *Lukkassen, D., Nguetseng, G., Wall P.* Two-scale convergence // Int. J. Pure Appl. Math. 2002. V. 2, N 1. P. 35–86.

10. *Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D.* An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. 1992. V. 18, N 5. P. 481–496.

11. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.

12. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 22 февраля 2006г., окончательный вариант — 11 января 2007 г.

Мейрманов Анварбек Мукатович
Белгородский гос. университет, физико-математический факультет,
кафедра прикладной математики и механики,
ул. Победы 85, Белгород 308015
meirmanov@bsu.edu.ru