Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 512.664.4

РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ МОНОИДОВ

Л. Ю. Полякова

Аннотация. Строится свободная резольвента для свободных частично коммутативных моноидов и с ее помощью оценивается гомологическая размерность этих моноидов.

Ключевые слова: гомологии моноидов, свободный частично коммутативный моноид, свободная резольвента, гомологическая размерность.

Свободный частично коммутативный моноид — это моноид, заданный образующими, из которых какие-то коммутируют (см. строгое определение в § 1). Гомологии этих моноидов возникли в связи с построением групп гомологий асинхронных систем переходов в работе А. А. Хусаинова и В. В. Ткаченко [1]. В [2] А. А. Хусаинов высказывает следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть M — свободный частично коммутативный моноид, множеством образующих которого является конечное множество Σ. Гомологическая размерность M не превосходит натурального n, если не существует различных образующих $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \Sigma$, для которых $a_i a_j = a_j a_i$ при всех $1 \le i < j \le n+1$.*

В настоящей работе мы строим свободную резольвенту для свободного частично коммутативного моноида и с ее помощью доказываем гипотезу Хусаинова. Мы будем следовать идеям Коэна, который в [3] построил резольвенту граф-произведения групп, исходя из резольвент для групп-сомножителей. Главную роль при этом сыграло представление граф-произведения групп с помощью прямых и свободных амальгамированных произведений групп-сомножителей. Однако при использовании этого метода для моноидов возникают дополнительные трудности.

В § 1 даны основные определения и факты, связанные со свободными частично коммутативными моноидами и свободными амальгамированными произведениями моноидов. В § 2 строится искомая резольвента. Примем соглашение, что все рассматриваемые модули, если не указано противное, правые.

§ 1. Вспомогательные сведения

В изложении основных понятий и свойств свободных частично коммутативных моноидов мы следуем, в основном, [4], а в изложении определений и свойств свободных амальгамированных произведений моноидов — [5].

Пусть Σ — конечное множество, называемое *алфавитом.* Через Σ^* будем обозначать свободный моноид, порожденный множеством Σ, а его элементы будем называть *словами.* Обозначение $\mathrm{alph}(x)$ используется для множества букв алфавита Σ, встречающихся в слове $x \in \Sigma^*$.

Пусть $I \subseteq \Sigma \times \Sigma$ — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на алфавите Σ, называемое *отношением коммутативности*. Дополнение к I обозначим через $D = \Sigma \times \Sigma \setminus I$.

Моноид $M(\Sigma, I)$, задаваемый копредставлением $\langle \Sigma \mid \{ab = ba, (a, b) \in I\}\rangle$, называется *свободным частично коммутативным моноидом.*

Каждому свободному частично коммутативному моноиду $M(\Sigma, I)$ может быть однозначно сопоставлен неориентированный граф без петель $\Gamma(M)$ следующим образом: множеством вершин $\Gamma(M)$ является Σ, а ребра соединяют коммутирующие вершины.

Важными инструментами для работы со свободными частично коммутативными моноидами являются лемма проектирования и лемма Леви (см. [4]). Для формулировки первой нам потребуется одно определение. Пусть $A \subseteq \Sigma$ и $I_A = (A \times A) \cap I$ — индуцированное отношение коммутативности. Назовем *проекцией* гомоморфизм $\pi_A : M(\Sigma, I) \to M(A, I_A)$, вычеркивающий все буквы слова, не принадлежащие множеству A. Другими словами, для $a \in \Sigma$

$$\pi_A(a) = \begin{cases} a, & a \in A, \\ 1, & a \notin A. \end{cases}$$

Если $I_A = \varnothing$, то π_A действует из $M(\Sigma, I)$ в свободный моноид A^*. Если $A = \{a, b\}$, то пишем $\pi_{a,b}$ вместо $\pi_{\{a,b\}}$.

Лемма 1.1 (проектирования [4]). *Элементы $u, v \in M(\Sigma, I)$ равны тогда и только тогда, когда $\pi_{a,b}(u) = \pi_{a,b}(v)$ для всех $(a, b) \in D$.*

Лемма 1.2 (Леви [4]). *Пусть $t, u, v, w \in M(\Sigma, I)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$tu = vw$;*

2) *существуют такие $p, q, r, s \in M(\Sigma, I)$, что $t = pr$, $u = sq$, $v = ps$, $w = rq$, причем $rs = sr$ и $\mathrm{alph}(r) \cap \mathrm{alph}(s) = \varnothing$.*

Для записи элементов свободного частично коммутативного моноида используется так называемая нормальная форма Фоата, которая определяется следующим образом. Пусть Σ упорядочено. Слово $x \in M(\Sigma, I)$ находится в нормальной форме Фоата, если оно пустое либо если существуют такие натуральное n и непустые слова x_i $(1 \leq i \leq n)$, что

1) $x = x_1 x_2 \dots x_n$;

2) для каждого i слово x_i — произведение различных попарно коммутирующих букв, причем буквы из x_i идут в порядке возрастания относительно упорядочения, введенного на Σ;

3) для каждого $1 \leq i < n$ и для каждой буквы a из x_{i+1} существует такая буква b из x_i, что $(a, b) \in D$.

Имеет место

Теорема 1.3 [4, 6]. *Каждый элемент моноида $M(\Sigma, I)$ имеет единственную нормальную форму Фоата.*

Например, нормальная форма Фоата степени a^n $(a \in \Sigma)$ состоит из n сомножителей, равных a.

Рассмотрим кратко понятия свободного произведения и свободного амальгамированного произведения моноидов.

Свободное произведение моноидов $\Pi^*\{M_j, j \in J\}$ или просто $\Pi^* M_j$ строится для семейства моноидов $\{M_j, j \in J\}$ при условии, что $M_i \cap M_j = 1$, $i \neq j$ (см., например, [5, т. 2, § 9.4]). Его элементами являются одноэлементная последовательность (1) и все такие непустые последовательности неединичных элементов $(a_1, \dots, a_k)$, что если $a_j \in M_{i(j)}$, то $i(j) \neq i(j+1)$, $j = 1, \dots, k-1$.

Для каждого $j \in J$ можно определить каноническое изоморфное вложение $\chi_j : M_j \to \Pi^* M_j$ по правилу $\chi_j(a) = a$ и отождествить моноид M_j с его каноническим образом. Тогда можно считать, что $\Pi^* M_j$ порождается своими подмоноидами M_j. При этом элемент $(a_1, \dots, a_k) \in \Pi^* M_j$ можно записывать в виде $a_1 \dots a_k$.

Свободное амальгамированное произведение моноидов строится для семейства $[\{M_j, j \in J\}; U; \{\varphi_j, j \in J\}]$, называемого *моноидной амальгамой*, где $\{M_j, j \in J\}$, U — моноиды. Мы опять предполагаем, что $M_i \cap M_j = 1$, $i \neq j$, и что в свободном произведении $\Pi^* M_j$ каждый моноид M_j отождествлен со своим каноническим образом. Гомоморфизмы φ_j, $j \in J$, — это вложения моноида U в моноиды M_j, причем единица моноида U переходит при этих отображениях в общую единицу моноидов M_j.

Определим отношение ν на $\Pi^* M_j$, полагая

$$\nu = \{(u_i, u_j) \mid u_i = \varphi_i(u), u_j = \varphi_j(u) \text{ для некоторых } i, j \in J,\ u \in U\}.$$

Пусть $\sim_\nu$ — наименьшая конгруэнция, содержащая ν. Моноид $\Pi^*\{M_j, j \in J\}/\sim_\nu$ называется *свободным амальгамированным произведением*, определенным амальгамой $[\{M_j, j \in J\}; U; \{\varphi_j, j \in J\}]$, или свободным произведением моноидов $\{M_j, j \in J\}$ с объединенным подмоноидом U и обозначается через $\Pi^*_U M_j$.

Свободное амальгамированное произведение может быть описано в терминах образующих и определяющих соотношений, а именно верно следующее

Предложение 1.4 [5]. *Пусть $[M_j; U; \varphi_j]$ — моноидная амальгама и моноид U имеет копредставление $\langle Y \mid \pi \rangle$, где $\pi \subset Y^* \times Y^*$. Тогда существуют такие множества X_j, что $Y \subseteq X_j$, $X_i \cap X_j = Y$, если $i \neq j$, и существуют такие отношения $\sigma_j \subset X_j^* \times X_j^*$, для которых $M_j = \langle X_j \mid \sigma_j \rangle$, $\sim_\pi = \sim_{\sigma_j} \cap (Y^* \times Y^*)$ при каждом j. Положим $X = \bigcup\limits_{j \in J} X_j$, $\sigma = \bigcup\limits_{j \in J} \sigma_j$, тогда свободное амальгамированное произведение $\Pi^*_U M_j$ имеет копредставление $\langle X \mid \sigma \rangle$.*

§ 2. Построение резольвент

Примем соглашение, что если не указано, над каким кольцом берется тензорное произведение, то это кольцо $\mathbb{Z}$. Также для моноида M мы пишем просто «M-модуль» вместо «$\mathbb{Z}M$-модуль» и $\otimes_M$ означает, что тензорное произведение берется над $\mathbb{Z}M$.

Вначале обсудим, как выглядит резольвента для свободного коммутативного моноида. Свободный коммутативный моноид M с n образующими $a_1, a_2, \dots, a_n$ является прямым произведением n бесконечных циклических моноидов $M^1, M^2, \dots, M^n$ с образующими $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно. Для каждого M^j резольвента выглядит так:

$$0 \to [a_j]\mathbb{Z}M^j \xrightarrow{\partial^j} \mathbb{Z}M^j \xrightarrow{\varepsilon^j} \mathbb{Z} \to 0,$$

где $[a_j]\mathbb{Z}M^j$ — свободный M^j-модуль с одной образующей $[a_j]$ и $\partial^j[a_j] = a_j - 1$.

Обозначим через X^j комплекс $0 \to [a_j]\mathbb{Z}M^j \to \mathbb{Z}M^j$. Повторяя для моноидов рассуждения, проведенные в [7, гл. IV, § 6], получаем резольвенту для

M как тензорное произведение комплексов X^j с гомоморфизмом пополнения $\varepsilon = \varepsilon^1 \otimes \dots \otimes \varepsilon^n$:

$$0 \to X_n \xrightarrow{\delta_n} \dots \to X_2 \xrightarrow{\delta_2} X_1 \xrightarrow{\delta_1} X_0 = \mathbb{Z}M \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0, \qquad (*)$$

где

$$X_k = \sum_{m_1+\dots+m_n=k} X^1_{m_1} \otimes \dots \otimes X^n_{m_n}.$$

Число слагаемых в этой сумме равно C_n^k, и каждое из них может быть отождествлено со свободным M-модулем с одной образующей $[a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}]$, где $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ и $X^{i_j}_{m_{i_j}} = [a_j]\mathbb{Z}M^{i_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Граничные гомоморфизмы δ_k имеют вид

$$\delta_k[a_{i_1}\dots a_{i_k}] = \sum_{j=1}^{k} [a_{i_1}\dots \widehat{a_{i_j}} \dots a_{i_k}](a_{i_j} - 1)(-1)^{j-1}.$$

Прежде чем перейти к основной теореме, докажем две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $M = M(\Sigma, I)$ — свободный частично коммутативный моноид, $\Sigma_0 \subset \Sigma$, $I_0 = (\Sigma_0 \times \Sigma_0) \cap I$ и $M_0 = M(\Sigma_0, I_0)$. Тогда моноидное кольцо $\mathbb{Z}M$ является свободным (левым) $\mathbb{Z}M_0$-модулем.*

Доказательство. Покажем, что M_0 в действительности является подмоноидом M. Для этого построим вложение $i : M_0 \to M$. Через $[x]_{M_0}$ будем обозначать элемент моноида M_0, задаваемый $x \in \Sigma_0^*$, а через $[y]_M$ — элемент M, задаваемый $y \in \Sigma^*$. Положим $i([x]_{M_0}) = [x]_M$.

Это отображение корректно и является гомоморфизмом в силу, например, [5, т. 1, § 1.12, следствие 1.29]. Покажем, что i — инъекция. Если $x, y \in \Sigma_0^*$ и $i([x]_{M_0}) = [x]_M = [y]_M = i([y]_{M_0})$, то x получается из y последовательными перестановками соседних коммутирующих в смысле отношения I, а значит, и в смысле отношения I_0 букв, так как $x, y \in \Sigma_0^*$. Следовательно, $[x]_{M_0} = [y]_{M_0}$.

Упорядочим элементы множества Σ так, чтобы все элементы множества Σ_0 при этом упорядочении не превосходили элементов из $\Sigma \setminus \Sigma_0$.

Для доказательства того, что $\mathbb{Z}M$ свободен, построим в нем базис. Рассмотрим множество B, состоящее из единицы моноида, а также всех таких элементов $t \in M$, что представление t в нормальной форме Фоата $t = w_1w_2\dots w_n$ обладает следующим свойством: w_1 состоит только из букв, принадлежащих множеству $\Sigma \setminus \Sigma_0$.

Заметим, что если $u \in B$, то он не может быть представлен в виде $u = su_0$, где $s \in M_0 \setminus 1$. Действительно, предположим, что такое представление существует. Рассмотрим представление u в нормальной форме Фоата: $u = u_1u_2\dots u_n$, и первую букву слова s — букву x. Первое вхождение x в слово $u_1u_2\dots u_n$ принадлежит некоторому u_j, $j > 1$, тогда по определению нормальной формы Фоата существует такая буква y из u_{j-1}, что $(x, y) \in D$. Если мы теперь рассмотрим результаты проектирования $\pi_{x,y}(u_1u_2\dots u_n)$ и $\pi_{x,y}(su_0)$, то они не совпадают в свободном моноиде $\{x, y\}^*$, так как $\pi_{x,y}(u_1u_2\dots u_n)$ начинается с буквы y, а $\pi_{x,y}(su_0)$ — с буквы x. В силу леммы 1.1 получаем противоречие.

Покажем, что каждый элемент моноида $w \in M$ может быть представлен в виде $w = au$, где $a \in M_0$, $u \in B$. Для нахождения такого представления достаточно рассмотреть следующую процедуру. Представим w в нормальной форме Фоата: $w = w_1w_2\dots w_n$. Если в слове w_1 не присутствуют буквы алфавита Σ_0, то $w = 1 \cdot w$, где $w \in B$. В противном случае $w_1 = a_1 u_1$, где в силу введенного упорядочения на Σ слова a_1 и u_1 могут быть выбраны так, что $a_1 \in M_0$ и u_1 не содержит букв алфавита Σ_0. Рассмотрим слово $u_1 w_2 \dots w_n$, представим его в нормальной форме Фоата $u_1 w_2 \dots w_n = w_1^1 w_2^1 \dots w_n^1$ и снова «отщепим» от w_1^1 элемент моноида M_0: $w_1^1 = a_2 u_2$. Далее будем поступать аналогично. Процесс конечен, поэтому мы получим в конце концов разложение вида $w = a_1 \dots a_k u_k w_1^k w_2^k \dots w_{n_k}^k = au$, где $a = a_1 \dots a_n \in M_0$, $u = u_k w_1^k w_2^k \dots w_{n_k}^k$ — элемент множества B.

Зная, как разложить по элементам из B элементы моноида M, мы можем, очевидно, разложить по элементам из B элементы кольца $\mathbb{Z}M$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}M_0$.

Покажем, что разложение по элементам из B единственно. Для этого достаточно проверить, что элемент w моноида M не может иметь двух различных разложений. Предположим, что $w = au = bv$, где $a, b \in M_0$, $u, v \in B$. Тогда по лемме 1.2 существуют $p, q, r, s \in M$ такие, что $a = pr$, $b = ps$, $u = sq$, $v = rq$. Из того, что $a = pr$, $b = ps$, в частности, следует, что $r, s \in M_0$. Тогда представления $u = sq$ и $v = rq$ противоречат тому, что u и v — элементы B, если только не выполнено $r = s = 1$. В этом случае $a = b = p$, $u = v = q$ и разложения $a \cdot u = b \cdot v$ совпадают.

Итак, множество B является базисом, что доказывает лемму. $\square$

Замечание. Отметим, что лемма 2.1 всегда верна для групп, т. е. если G — произвольная группа, а G_0 — ее подгруппа, то групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ является свободным $\mathbb{Z}G_0$-модулем (см., например, [8, гл. I, § 3]). В то же время если мы выберем в качестве подмоноида моноида $M(\Sigma, I)$ не свободный частично коммутативный моноид, то утверждение леммы, вообще говоря, нарушается.

Пример. Пусть $M = \langle a \rangle$ — бесконечный циклический моноид, а $M_0 = \{1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots\}$ — подмоноид M. Тогда $\mathbb{Z}M$ не является свободным M_0-модулем. Предположим, что это не так, тогда в $\mathbb{Z}M$ существует базис B и каждый элемент $\mathbb{Z}M$ единственным образом разлагается по этому базису над кольцом $\mathbb{Z}M_0$. Пусть $u_1, \dots, u_n \in B$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}M_0$, $j = 1, \dots, n$, и

$$1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n, \quad a = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$$

— разложения элементов 1 и a по базису (некоторые α_j или β_j могут быть равны 0). Из того, что $a^3 = a^3 \cdot 1 = a^2 \cdot a$, и единственности разложения по базису следует, что для всех $j = 1, \dots, n$

$$a^3 \alpha_j = a^2 \beta_j.$$

Поскольку α_j, β_j принадлежат $\mathbb{Z}M_0$, они представляются в виде

$$\alpha_j = n_0^j + \sum_{k \geq 2} n_k^j a^k, \quad \beta_j = m_0^j + \sum_{k \geq 2} m_k^j a^k,$$

где $n_k^j, m_k^j \in \mathbb{Z}$. В силу предыдущего равенства, в частности, $n_0^j = 0$, так как выражение $a^2 \beta_j$ не содержит слагаемых с a^3. Но тогда степень по a всех слагаемых выражения $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ отлична от 0 и, следовательно, само выражение не может быть равным 1; противоречие.

Отметим, что кольцо $\mathbb{Z}$ можно наделить структурой M_0-модуля тривиальным образом, положив $n \cdot a = n$ для всех $a \in M_0$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда тензорное произведение $\mathbb{Z} \otimes_{M_0} \mathbb{Z}M$ существует и является M-модулем, так как $\mathbb{Z}M$ является M-модулем. Это замечание делает формулировку следующей леммы корректной.

Лемма 2.2. *Пусть M — моноид, M_0, M_1, M_2 — его подмоноиды и $M = M_1 *_{M_0} M_2$. Тогда имеет место точная последовательность M-модулей:*

$$0 \to \mathbb{Z} \otimes_{M_0} \mathbb{Z}M \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \otimes_{M_1} \mathbb{Z}M \oplus \mathbb{Z} \otimes_{M_2} \mathbb{Z}M \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to 0.$$

Доказательство. Определим гомоморфизмы i и p следующим образом. Для произвольных $w, u, v \in M$ положим $i(1 \otimes_{M_0} w) = 1 \otimes_{M_1} w + 1 \otimes_{M_2} w$, $p(1 \otimes_{M_1} v) = 1$, $p(1 \otimes_{M_2} u) = -1$ и продолжим действие гомоморфизмов по линейности. Легко убедиться, что в членах $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \otimes_{M_0} \mathbb{Z}M$ последовательность точна. Проверим, что точность имеется и в среднем члене. Поскольку

$$pi\Big(1 \otimes_{M_0} \sum_{w \in M} l_w w\Big) = \sum_{w \in M} l_w - \sum_{w \in M} l_w = 0,$$

то $\operatorname{Im} i \subseteq \operatorname{Ker} p$.

Докажем обратное включение. Элемент $1 \otimes_{M_1} \sum n_u u + 1 \otimes_{M_2} \sum m_v v$ принадлежит $\operatorname{Ker} p$ в точности тогда, когда $\sum n_u = \sum m_v$. Представим эти суммы в виде

$$\sum n_u = n_+ - n_-, \quad \sum m_v = m_+ - m_-,$$

где n_+, m_+ — суммы всех положительных, а n_-, m_- — модули сумм всех отрицательных коэффициентов соответственно. Если $n_+ = m_+$, то $n_- = m_-$, и это значит, что в сумму $1 \otimes_{M_1} \sum n_u u$ входит со знаком плюс столько же слагаемых вида $1 \otimes_{M_1} a$, где $a \in M$, сколько и в сумму $1 \otimes_{M_2} \sum m_v v$. Аналогично со знаком минус. Если же $n_+ \neq m_+$, к примеру, $n_+ > m_+$, то к сумме $1 \otimes_{M_2} \sum m_v v$ прибавим $n_+ - m_+$ слагаемых вида $1 \otimes_{M_2} b$ для некоторого $b \in M$ и их же вычтем. Тогда числа слагаемых с плюсом будут совпадать в обеих суммах, и также будут совпадать числа слагаемых с минусом в силу равенства $m_+ + (n_+ - m_+) - (m_- + (n_+ - m_+)) = n_+ - n_-$.

Следующим шагом является построение прообраза под действием i для элемента вида $1 \otimes_{M_1} u + 1 \otimes_{M_2} v$, где $u, v \in M$. После решения этой задачи в силу рассуждений, приведенных выше, мы сможем найти прообраз для каждого элемента из $\operatorname{Ker} p$, т. е. доказать, что $\operatorname{Ker} \subseteq \operatorname{Im} i$, и завершить доказательство леммы.

Для нахождения прообраза представим u и v в виде

$$u = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_l b_l, \quad v = c_1 d_1 c_2 d_2 \dots c_s d_s,$$

где $a_i, c_j \in M_1$, $b_i, d_j \in M_2$, $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, s$. Тогда элемент

$$1 \otimes_{M_0} w = 1 \otimes_{M_0} \Bigg[\sum_{k=1}^{l-1} (b_k a_{k+1} b_{k+1} \dots a_l b_l - a_{k+1} b_{k+1} \dots a_l b_l) + b_l + \sum_{j=1}^{s} (c_j d_j c_{j+1} d_{j+1} \dots c_s d_s - d_j c_{j+1} d_{j+1} \dots c_s d_s)\Bigg]$$

будет прообразом $1 \otimes_{M_1} u + 1 \otimes_{M_2} v$ под действием i. В самом деле,

$$\begin{aligned}
&i(1 \otimes_{M_0} w) \\
&= 1 \otimes_{M_1} \Bigg[b_1a_2b_2 \dots a_lb_l + \sum_{k=1}^{l-1}(-a_{k+1}b_{k+1}\dots a_lb_l + b_{k+1}a_{k+2}b_{k+2}\dots a_lb_l) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{s}(c_jd_jc_{j+1}d_{j+1}\dots c_sd_s - d_jc_{j+1}d_{j+1}\dots c_sd_s)\Bigg] \\
&\quad + 1 \otimes_{M_2} \Bigg[\sum_{k=1}^{l-1}(b_ka_{k+1}b_{k+1}\dots a_lb_l - a_{k+1}b_{k+1}\dots a_lb_l) + b_l \\
&\quad + c_1d_1c_2d_2\dots c_sd_s + \sum_{j=1}^{s-1}(-d_jc_{j+1}d_{j+1}\dots c_sd_s + c_{j+1}d_{j+1}\dots c_sd_s) - d_s\Bigg] \\
&= 1 \otimes_{M_1} b_1a_2b_2\dots a_lb_l + 1 \otimes_{M_2} (b_l + c_1d_1c_2d_2\dots c_sd_s - d_s) \\
&= 1 \otimes_{M_1} a_1b_1a_2b_2\dots a_lb_l + 1 \otimes_{M_2} c_1d_1c_2d_2\dots c_sd_s = 1 \otimes_{M_1} u + 1 \otimes_{M_2} v,
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Теперь мы готовы доказать основную теорему. Пусть $M(\Sigma, I)$ — свободный частично коммутативный моноид, у которого множество Σ упорядочено. Пусть $\Gamma(M)$ — его граф и r_k ($k \geq 1$) — число полных подграфов с k вершинами в графе $\Gamma(M)$. Пусть F_k — свободный M-модуль с r_k образующими. Каждую такую образующую мы можем обозначить через $[a_1 \dots a_k]$, перечислив в порядке возрастания вершины соответствующего полного подграфа. Определим M-модульные гомоморфизмы $\delta_k : F_k \to F_{k-1}$, $k > 1$, положив на образующих

$$\delta_k[a_1 \dots a_k] = \sum_{j=1}^{k}[a_1 \dots \widehat{a_j} \dots a_k](a_j - 1)(-1)^{j-1}.$$

Кроме того, положим $\delta_1[a] = a - 1$ и $\varepsilon(v) = 1$ для всех $a \in \Sigma$, $v \in M$ и тем самым определим модульные гомоморфизмы $\delta_1 : F_1 \to \mathbb{Z}M$ и $\varepsilon : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}$. Имеет место следующая

Теорема 2.3. *Последовательность M-модулей и их гомоморфизмов*

$$\dots \to F_n \xrightarrow{\delta_n} \dots \to F_2 \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 = \mathbb{Z}M \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \qquad (**)$$

является свободной резольвентой модуля $\mathbb{Z}$ над моноидным кольцом $\mathbb{Z}M$.

Доказательство. В проверке нуждается лишь точность этой последовательности. Используем индукцию по числу образующих моноида M.

Если M — свободный коммутативный моноид (т. е. его граф полный), то резольвента $(*)$ совпадает с последовательностью $(**)$ для этого моноида в силу того, что образующие $[a_{i_1} \dots a_{i_k}]$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, модулей X_k взаимно однозначно соответствуют полным подграфам с вершинами $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$. В частности, когда у M одна образующая, мы получаем базу индукции.

Предположим, что граф $\Gamma(M)$ не полный. Тогда найдутся две несмежные вершины x и y. Рассмотрим подграфы $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \{x, y\}$, $\Gamma_1 = \Gamma \setminus x$, $\Gamma_2 = \Gamma \setminus y$ и соответствующие им подмоноиды моноида M: $M_0(\Sigma_0, I_0)$, $M_1(\Sigma_1, I_1)$ и $M_2(\Sigma_2, I_2)$. Для них

$$\Sigma_0 = \Sigma \setminus \{x, y\}; \quad \Sigma_1 = \Sigma \setminus x; \quad \Sigma_2 = \Sigma \setminus y; \quad I_j = (\Sigma_j \times \Sigma_j) \cap I, \quad j = 0, 1, 2.$$

Поскольку для моноидов M_0, M_1, M_2 имеют место соотношения $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_0$, $I_0 = I_1 \cap (\Sigma_0 \times \Sigma_0) = I_2 \cap (\Sigma_0 \times \Sigma_0)$, то в силу предложения 1.4 свободное амальгамированное произведение $M_1 *_{M_0} M_2$ имеет копредставление $\langle \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \mid \{ab = ba, (a,b) \in I_1 \cup I_2\}\rangle = \langle \Sigma, \{ab = ba, (a,b) \in I\}\rangle$, т. е. совпадает с моноидом M.

Применим к подмоноидам M_0, M_1, M_2 предположение индукции. Пусть

$$\cdots \to F_2^j \xrightarrow{\delta_2^j} F_1^j \xrightarrow{\delta_1^j} \mathbb{Z}M_j \xrightarrow{\varepsilon^j} \mathbb{Z} \to 0, \quad j = 0,1,2,$$

— резольвенты этих моноидов. Домножим их справа тензорно на $\mathbb{Z}M$ над $\mathbb{Z}M_j$, $j = 0,1,2$, соответственно. По лемме 2.1 $\mathbb{Z}M$ — свободный M_j-модуль ($j = 0,1,2$), поэтому функторы $\otimes_{M_j}\mathbb{Z}M$ точны, значит, точность рассматриваемых последовательностей сохранится, причем модули $F_k^j \otimes_{M_j} \mathbb{Z}M$ являются свободными M-модулями. Далее, рассмотрим коммутативную диаграмму, состоящую из свободных M-модулей:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_2^0 \otimes_{M_0} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{i_2} & F_2^1 \otimes_{M_1} \mathbb{Z}M \oplus F_2^2 \otimes_{M_2} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{p_2} & F_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_1^0 \otimes_{M_0} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{i_1} & F_1^1 \otimes_{M_1} \mathbb{Z}M \oplus F_1^2 \otimes_{M_2} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{p_1} & F_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}M_0 \otimes_{M_0} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{i_0} & \mathbb{Z}M_1 \otimes_{M_1} \mathbb{Z}M \oplus \mathbb{Z}M_2 \otimes_{M_2} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{p_0} & \mathbb{Z}M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes_{M_0} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} \otimes_{M_1} \mathbb{Z}M \oplus \mathbb{Z} \otimes_{M_2} \mathbb{Z}M & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Как мы только что заметили, левый и средний столбцы точны. Нижняя строка точна в силу леммы 2.2. Вторая снизу строка представляет собой последовательность модулей

$$0 \to \mathbb{Z}M \xrightarrow{i_0} \mathbb{Z}M \oplus \mathbb{Z}M \xrightarrow{p_0} \mathbb{Z}M \to 0,$$

причем $i_0(a) = a \oplus a$, $p_0(b \oplus c) = b - c$ для всех $a, b, c \in M$, откуда легко заметить, что эта строка также точна.

Для доказательства точности остальных строк заметим, что каждый полный подграф, содержащийся в Γ_0, содержится в Γ_1 и в Γ_2 одновременно, а всякий полный подграф, содержащийся в Γ, содержится либо в Γ_1, либо в Γ_2, так как вершины x и y несмежны.

Пусть элементы $[c_1], \dots, [c_l]$ — образующие F_n^0; $[a_1], \dots, [a_m], [c_1'], \dots, [c_l']$ — образующие F_n^1; $[b_1], \dots, [b_k], [c_1''], \dots, [c_l'']$ — образующие F_n^2 (для простоты мы обозначаем образующие одной буквой и ставим штрихи, чтобы не перепутать, к какому из слагаемых прямой суммы будут относиться соответствующие элементы). Тогда образующими F_n будут $[a_1], \dots, [a_m]$, $[b_1], \dots, [b_k]$, $[c_1], \dots, [c_l]$. Гомоморфизмы i_n и p_n устроены так:

$$i_n\left(\sum_{j=1}^{l} [c_j] \otimes_{M_0} \gamma_j\right) = \sum_{j=1}^{l} [c_j'] \otimes_{M_1} \gamma_j + \sum_{j=1}^{l} [c_j''] \otimes_{M_2} \gamma_j,$$

где $\gamma_j \in \mathbb{Z}M$, $j = 1, 2, \dots l$,

$$p_n\left(\sum_{i=1}^{m}[a_i] \otimes_{M_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{l}[c'_j] \otimes_{M_1} \delta'_j + \sum_{i=1}^{k}[b_i] \otimes_{M_2} \beta_i + \sum_{j=1}^{l}[c''_j] \otimes_{M_2} \delta''_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m}[a_i]\alpha_i - \sum_{i=1}^{k}[b_i]\beta_i + \sum_{j=1}^{l}[c_j](\delta'_j - \delta''_j),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{Z}M$, $i = 1, 2, \dots m$, $\beta_i \in \mathbb{Z}M$, $i = 1, 2, \dots k$, $\delta'_j, \delta''_j \in \mathbb{Z}M$, $j = 1, 2, \dots l$.

Очевидно, для всех n выполнено равенство $p_n i_n = 0$. Кроме того, элемент

$$x = \sum_{i=1}^{m}[a_i] \otimes_{M_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{l}[c'_j] \otimes_{M_1} \delta'_j + \sum_{i=1}^{k}[b_i] \otimes_{M_2} \beta_i + \sum_{j=1}^{l}[c''_j] \otimes_{M_2} \delta''_j$$

принадлежит $\operatorname{Ker} p_n$ в точности тогда, когда $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \dots, m)$, $\beta_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$ и $\delta'_j = \delta''_j$ $(j = 1, \dots, l)$, т. е. когда $x = i_n\left(\sum\limits_{j=1}^{l}[c_j] \otimes_{M_0} \delta'_j\right)$. Следовательно, имеет место $\operatorname{Im} i_n = \operatorname{Ker} p_n$.

Из точности всех строк диаграммы, а также левого и среднего столбцов, следует точность правого столбца (см. [9, добавление Д. А. Буксбаума, часть I, добавление редактора, диаграмма 3]). $\square$

Следствие 2.4. *Если граф $\Gamma(M)$ свободного частично коммутативного моноида M не содержит полных подграфов с более чем n вершинами, то гомологическая размерность M не превышает n.*

Заметим, что следствие 2.4 означает справедливость гипотезы Хусаинова, сформулированной во введении.

Следствие 2.5. *Если M — свободный частично коммутативный моноид, A — тривиальный левый M-модуль, то для $n \geq 1$ группы гомологий $H_n(M, A)$ изоморфны $\underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_{r_n}$, где r_n — число полных подграфов с n вершинами в графе $\Gamma(M)$.*

Доказательство. Обозначим $C_n = \underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_{r_n}$. Заметим, что имеет место изоморфизм $F_n \otimes A \cong C_n$. Действительно, построим отображение φ : $F_n \times A \to C_n$ следующим образом. Пусть $[x_1], \dots, [x_{r_n}]$ — образующие F_n. Для всех $j = 1, \dots, r_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}M$, $a \in A$ положим $\varphi([x_j]\alpha, a) = (0, \dots, \alpha a, \dots, 0)$, где αa стоит на j-м месте, и продолжим по линейности. Несложно убедиться, что абелева группа C_n вместе с отображением φ удовлетворяет универсальному свойству тензорного произведения $F_n \otimes_M A$ и, следовательно, изоморфна ему.

Группы $H_n(M, A)$ являются группами гомологий комплекса

$$\dots \to C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} A,$$

где $\partial_n = \delta_n \otimes_M A$. Поскольку M-модуль A тривиален, то для всех $k \geq 1$

$$\partial_k([a_1 a_2 \dots a_k] \otimes_M 1) = \sum_{j=1}^{k}[a_1 \dots \widehat{a_j} \dots a_k](a_j - 1)(-1)^{j-1} \otimes_M 1 = 0.$$

Отсюда $H_n(M, A) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1} \cong C_n$. $\square$

Частным случаем этого следствия является

Следствие 2.6. *Если M — свободный частично коммутативный моноид, то группы гомологий $H_n(M,\mathbb{Z})$, $n \geq 1$, — это свободные абелевы группы ранга r_n, где r_n — число полных подграфов с n вершинами в графе $\Gamma(M)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хусаинов А. А., Ткаченко В. В.* Группы гомологий асинхронных систем переходов // Математическое моделирование и близкие вопросы математики. Хабаровск: ХГПУ, 2003. С. 23–33.
2. *Husainov A. A.* On the homology of monoids and distributed systems // 5th International Algebraic Conf. in Ukraine: Abstracts. Odessa, 2005. P. 88.
3. *Cohen D. E.* Projective resolutions for graph products // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1995. V. 38. P. 185–188.
4. *Diekert V., Métivier Y.* Partial commutation and traces // Handbook of formal languages. Berlin: Springer-Verl., 1997. V. 3. P. 457–533.
5. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1, 2.
6. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
7. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.
8. *Браун К. С.* Когомологии групп. М.: Наука, 1987.
9. *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

Статья поступила 24 июня 2006 г.

Полякова Людмила Юрьевна
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
механико-математический факультет,
пл. Свободы, 4, Харьков 61077, Украина.
tyutryumova@univer.kharkov.ua