Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 519.237.5

АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ДРОБНО–ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Ю. Ю. Линке, А. И. Саханенко

Аннотация. Рассмотрена задача оценивания неизвестного параметра одномерного аналога уравнения Михаэлиса — Ментен в ситуации, когда независимые переменные измерены со случайными ошибками. Изучено поведение явных оценок, которые были найдены авторами ранее в случае известных независимых переменных. Установлены близкие к необходимым условия, при которых наличие указанных случайных ошибок не влияет на асимптотическую нормальность этих явных оценок.

Ключевые слова: нелинейная регрессия, уравнение Михаэлиса — Ментен, случайные ошибки в независимых переменных, асимптотически нормальные оценки.

§ 1. Введение

1.1. Пусть переменные $\{y_i\}$, $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ связаны следующими дробно-линейными соотношениями:

$$y_i = \frac{a_i}{1+b_i\theta} \quad \text{при } \theta > 0,\ a_i > 0,\ b_i > 0,\ i = 1,\dots,n, \tag{1}$$

при этом значение параметра θ неизвестно, а значения числовых последовательностей $\{y_i\}$, $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ «известны лишь приближенно». Последнее означает, что точные значения этих величин неизвестны, однако даны наблюдения Y_i, X_{ai}, X_{bi}, представимые в следующем виде:

$$Y_i = y_i + \epsilon_{yi}, \quad X_{ai} = a_i + \epsilon_{ai}, \quad X_{bi} = b_i + \epsilon_{bi}, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2}$$

где $\{\epsilon_{yi}\}$, $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$ — ненаблюдаемые случайные ошибки.

Величины a_i и b_i будем называть *коэффициентами*, а описанную модель регрессии — моделью *со случайными ошибками в коэффициентах.* Задача состоит в том, чтобы в модели дробно-линейной регрессии (1), (2), являющейся частным случаем модели нелинейной регрессии, оценить неизвестный параметр θ.

Наш интерес к описанной модели регрессии вызван тем, что соотношения (1) определяют одномерный аналог известного в естественных науках уравнения Михаэлиса — Ментен, которое изучалось во многих работах (см., например, [1–7]). При этом в ряде работ особое внимание уделяется задаче нахождения

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект РНП.2.1.1.1379), Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00962), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3695.2008.1).

явных оценок неизвестных параметров этого уравнения, для построения которых не использовались бы сложные конструкции и процессы последовательного приближения. Однако до появления наших работ [8, 9] все известные нам явные оценки этих параметров при естественных предположениях оказывались смещенными. И только в [8] нам удалось решить задачу явного оценивания для модели (1), (2) при отсутствии случайных ошибок в независимых переменных, т. е. когда $\epsilon_{ai} = \epsilon_{bi} = 0$ при всех i и n. Оказалось, что при достаточно широких предположениях простая оценка

$$\theta^* = \sum_{i=1}^{n} c_i(X_{ai} - Y_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_i X_{bi} Y_i \tag{3}$$

является состоятельной и асимптотически нормальной; здесь $\{c_i \geq 0\}$ — некоторые выбираемые статистиком постоянные. Кроме того, в [8] мы ввели класс «улучшенных» оценок θ^{**}, который содержит асимптотически нормальные оценки с минимальной асимптотической дисперсией. В [9, 10] мы эти результаты распространили на общий многомерный случай уравнений дробно-линейной регрессии, который содержит уравнение Михаэлиса — Ментен.

Первая цель настоящей работы — получить аналоги основных результатов работы [8] для модели (1), (2) при ненулевых ошибках в коэффициентах.

Отметим, что наличие случайных ошибок в коэффициентах существенно усложняет оценивание даже в задаче линейной регрессии (см. [11–13]). В нашей же задаче это усложнение по сравнению с [8] будет еще более существенным. Анализу некоторых регрессионных моделей с ошибками в коэффициентах посвящен ряд публикаций. Читатель может обратиться за ссылками, например, к [14]. Там же можно найти систематизированные ссылки по другим направлениям регрессионного анализа.

1.2. Прежде чем привести формулировки ключевых результатов, полученных в работе, введем ряд необходимых соглашений и условий. Мы допускаем, что все изучаемые и вводимые нами величины могут зависеть от числа наблюдений n. Таким образом, мы предполагаем, что на самом деле

$$Y_i = Y_i^{(n)},\ X_{ai} = X_{ai}^{(n)},\ X_{bi} = X_{bi}^{(n)},\ \epsilon_{yi} = \epsilon_{yi}^{(n)},\ \epsilon_{ai} = \epsilon_{ai}^{(n)},\ \epsilon_{bi} = \epsilon_{bi}^{(n)},$$

где верхний индекс n подчеркивает указанную возможную зависимость этих случайных величин от числа наблюдений. От n могут зависеть также числа $a_i = a_i^{(n)} > 0$, $b_i = b_i^{(n)} > 0$ и параметр $\theta = \theta^{(n)} > 0$. Понятно, что от n могут зависеть и все величины, являющиеся функциями от перечисленных. В дальнейшем, чтобы не загромождать обозначения, мы этот дополнительный индекс $^{(n)}$ будем в большинстве случаев опускать.

Всюду в работе предполагается выполненным следующее

Предположение 1.1. *При каждом n случайные векторы $(\epsilon_{yi}, \epsilon_{ai}, \epsilon_{bi})$, $i = 1, \ldots, n$, независимы в совокупности и состоят из независимых компонент. Кроме того, для любых i, n*

$$\mathbf{E}\epsilon_{yi} = \mathbf{E}\epsilon_{ai} = \mathbf{E}\epsilon_{bi} = 0,\ \sigma_{yi}^2 = \mathbf{D}\epsilon_{yi} < \infty,\ \sigma_{ai}^2 = \mathbf{D}\epsilon_{ai} < \infty,\ \sigma_{bi}^2 = \mathbf{D}\epsilon_{bi} < \infty.$$

Во введении и некоторых примерах мы для наглядности предполагаем выполненным следующее более простое, но и более жесткое

Предположение 1.2. *Справедливы представления*

$$\epsilon_{yi} = \sigma_{yi}\xi_{yi}, \quad \epsilon_{ai} = \sigma_{ai}\xi_{ai}, \quad \epsilon_{bi} = \sigma_{bi}\xi_{bi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем при каждом n случайные векторы $(\xi_{yi}, \xi_{ai}, \xi_{bi})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, независимы в совокупности и состоят из независимых компонент с нулевыми средними и единичными дисперсиями, а распределения этих величин не зависят от значений индексов i и n.

Отметим, что предположение 1.2 — это более общее допущение, чем стандартное предположение о нормальном распределении ошибок.

Условимся использовать символ $\sum$ без индексов вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$, т. е. только тогда, когда суммирование ведется по переменной i от 1 до n. Далее все пределы берутся при $n \to \infty$, а сходимость $\eta \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ означает, что распределение случайной величины $\eta = \eta^{(n)}$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению.

Отметим еще, что в случае практического применения утверждений, полученных в данной работе, мы должны проверять выполнение условий этих утверждений *при всех возможных значениях всех неизвестных параметров*, т. е. так же, как это всегда делается в математической статистике (см., например, [15]).

1.3. В [8] установлено, что если справедливо предположение 1.2 и

$$\begin{aligned} c &:= \inf_{n,i} \min\{a_i, b_i, c_i, \sigma_{yi}, \theta\} > 0, \\ C &:= \sup_{n,i} \max\{a_i, b_i, c_i, \sigma_{yi}, \sigma_{ai}, \sigma_{bi}, \theta\} < \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

то при отсутствии случайных ошибок в коэффициентах для определенной в (3) оценки θ^* имеет место сходимость

$$(\theta^* - \theta)/d(c_\bullet) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d(c_\bullet) = B_c/A_c. \tag{5}$$

Здесь и далее мы полагаем, что

$$A_c := \sum c_i b_i y_i > 0 \quad \text{и} \quad B_c^2 := \sum c_i^2 \sigma_i^2 > 0 \quad \text{при } \sigma_i := (1 + b_i\theta)\sigma_{yi}. \tag{6}$$

В начале § 4 данной работы исследованы свойства оценки θ^* при отказе от предположения, что $\epsilon_{ai} = \epsilon_{bi} = 0$ при всех n и i. Выделим один частный случай следствия 8 из § 4 настоящей работы.

Следствие 1. *Пусть справедливы предположение* 1.2 *и условие* (4). *Тогда $d^2(c_\bullet) = O(1/n)$, а для сходимости* (5) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\bar\sigma_a^2 := n^{-1} \sum \sigma_{ai}^2 \to 0 \quad \text{и} \quad \bar\sigma_b^2 := n^{-1} \sum \sigma_{bi}^2 \to 0. \tag{7}$$

Тем самым мы нашли необходимые и достаточные условия, при которых наличие случайных ошибок в коэффициентах не влияет на интересующие нас свойства оценки θ^*.

1.4. Теперь по аналогии с [8] введем в рассмотрение следующий, более широкий, чем (3), класс «улучшенных» оценок:

$$\theta^{**} = \sum \gamma_i(\theta^*, X_{ai}, X_{bi})(X_{ai} - Y_i) \Big/ \sum \gamma_i(\theta^*, X_{ai}, X_{bi}) X_{bi} Y_i, \tag{8}$$

где $\{\gamma_i(\cdot,\,\cdot,\,\cdot)\}$ — некоторые функции, вопрос о выборе которых мы обсудим в замечании 1.5. Далее будем полагать, что

$$\gamma_{\theta i} := \gamma_i(\theta, a_i, b_i) \geq 0, \quad A_\gamma := \sum \gamma_{\theta i} b_i y_i > 0, \quad B_\gamma^2 := \sum \gamma_{\theta i}^2 \sigma_i^2 > 0, \tag{9}$$

и использовать упрощенные обозначения $\gamma'_{ti}(t,\cdot,\cdot) = \partial\gamma_i(t,\cdot,\cdot)/\partial t$, $\gamma'_{ai}(\cdot,a,\cdot) = \partial\gamma_i(\cdot,a,\cdot)/\partial a$ и $\gamma'_{bi}(\cdot,\cdot,b) = \partial\gamma_i(\cdot,\cdot,b)/\partial b$ в случаях, когда соответствующие частные производные существуют.

По аналогии с [8] нас интересует вопрос о том, когда оценка θ^{**} будет асимптотически нормальной в следующем смысле:

$$(\theta^{**} - \theta)/d(\gamma_\bullet) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d(\gamma_\bullet) := B_\gamma/A_\gamma. \tag{10}$$

В § 2, 3 данной работы этот вопрос изучен в более общем случае. Приведем один частный случай следствия 5 из § 3. Нам потребуется

Предположение 1.3. *Функции $\{\gamma_i(t,a,b)\}$ дифференцируемы по всем своим аргументам, $c_\gamma := \inf_{n,i} \gamma_{\theta i} > 0$ и*

$$C_\gamma := \sup_{n,i}\biggl(\gamma_{\theta i} + \mathbf{E} \sup_{\theta/2 \leq t \leq 3\theta/2} (\gamma'_{ti}(t, X_{ai}, X_{bi}))^2 + \sup_{a\in\mathscr{A}}\sup_{b\in\mathscr{B}}\biggl(\frac{|\gamma'_{ai}(\theta,a,b)|}{1+|b|} + \frac{|\gamma'_{bi}(\theta,a,b)|}{1+|a|}\biggr)\biggr) < \infty,$$

где $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — некоторые промежутки такие, что $\mathbf{P}(X_{ai}\in\mathscr{A}) = 1 = \mathbf{P}(X_{bi}\in\mathscr{B})$ при всех i.

Следствие 2. *Пусть верны предположения 1.2 и 1.3, условие (4) и*

$$\bar\sigma_a = o(n^{-1/4}) \quad \text{и} \quad \bar\sigma_b = o(n^{-1/4}). \tag{11}$$

Тогда имеет место сходимость (10) и, кроме того, $d^2(\gamma_\bullet) = O(1/n)$.

1.5. Таким образом, при выполнении достаточно широких условий оценка θ^{**} является асимптотически нормальной с дисперсией $d^2(\gamma_\bullet)$. Естественным образом возникает вопрос о минимизации этой дисперсии. Но эта задача уже решена в [8]. Усилим полученный там результат. Будем предполагать, что дисперсии σ_{yi}^2 представимы в виде

$$\sigma_{yi}^2 = \sigma_y^2 w_i^2(\theta, a_i, b_i), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{12}$$

где $w_i(\cdot,\cdot,\cdot) > 0$ — известная функция, а параметр $\sigma_y^2 > 0$ может быть неизвестным. Введем в рассмотрение функции

$$\gamma_{i,w}(t,a,b) := \frac{w_o(t,a,b)}{w_i^2(t,a,b)}, \quad \text{где } w_o(t,a,b) := \frac{ab}{(1+bt)^3}. \tag{13}$$

Предложение 1.4. *Справедливо соотношение*

$$1 \leq \frac{d^2(\gamma_\bullet)}{d^2(\gamma_{\bullet,w})} \leq 1 + \frac{(H/h-1)^2}{4H/h}, \quad \text{если } 0 < h \leq \frac{\gamma_i(\theta,a_i,b_i)}{\gamma_{i,w}(\theta,a_i,b_i)} \leq H \quad \forall\, i. \tag{14}$$

В частности, неравенство $d(\gamma_{\bullet,w}) \leq d(\gamma_\bullet)$ имеет место для всех функций $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ таких, что верны условия (9).

Таким образом, чем «лучше» выбранные функции $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ приближают оптимальные функции $\{\gamma_{i,w}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$, тем меньше асимптотическая дисперсия

$d^2(\gamma_\bullet)$ отличается от $d^2(\gamma_{\bullet,w})$. В частности, при $H = 2 = 1/h$ из (14) вытекает, что

$$1 \le d(\gamma_\bullet)/d(\gamma_{\bullet,w}) \le 1.25, \quad \text{если } 1/2 \le \gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)/\gamma_{i,w}(\cdot,\cdot,\cdot) \le 2.$$

Этот числовой пример показывает, что мы немного теряем, когда используем функции, которые повторяют поведение оптимальных функций лишь с точностью до константы.

Неравенство (14) можно интерпретировать как некоторое свойство устойчивости оценок θ^{**} как функционалов, зависящих от функций $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$.

Замечание 1.5. Таким образом, если при $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot) = \gamma_{i,w}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ и некоторых $\{c_i\}$ выполнены все условия следствия 2, то оценка θ^{**} будет асимптотически нормальной с минимальной асимптотической дисперсией $d^2(\gamma_{\bullet,w})$ и именно такую оценку θ^{**} мы и рекомендуем использовать в этом случае. Если эти условия не выполнены, то нам придется ограничиться использованием более простой оценки θ^*. При этом во всех случаях проще всего оценку θ^* использовать при $c_i \equiv 1$, т. е. когда она имеет особенно простой вид.

1.6. С теоретической точки зрения среди условий следствия 2 наиболее жестким является предположение (11), в котором налагаются требования на точность, с которой необходимо измерять коэффициенты $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. В § 2, 3 работы проведено более тонкое исследование свойств оценок θ^{**} и получены необходимые и достаточные условия для их асимптотической нормальности. При этом выяснилось, что, приближенно говоря, только в специально подобранных случаях условие (11) не является необходимым или близким к необходимому для сходимости (10).

Пример 1.6. Рассмотрим «классический» случай, когда

$$\forall\, n,i \quad \sigma_{yi}^2 = \sigma_y^2 \quad \text{и} \quad \gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi}) = w_o(t, X_{ai}, X_{bi}) \equiv X_{ai}X_{bi}/(1 + X_{bi}t)^3,$$

т. е. когда дисперсии «основных» наблюдений постоянны, а функции $\{\gamma_i\}$ выбраны в соответствии с рекомендациями, приведенными в замечании 1.5. Предположим еще, что выполнены условия (4) и (7), предположение 1.2 и

$$\forall\, n,i \quad X_{bi} \ge 1/2, \quad b_i \ge 1, \quad \theta \ge 1, \quad \mathbf{E}\xi_{a1}^4 + \mathbf{E}\xi_{b1}^4 < \infty.$$

Пусть используется оценка θ^* при $c_i \equiv 1$. Из следствия 7 вытекает, что в этом случае условие (11) является необходимым и достаточным для сходимости (10).

1.7. Вторая цель настоящей работы — найти необходимые и достаточные условия для асимптотической нормальности оценок θ^{**} при по возможности минимальных предположениях на неизвестные распределения наблюдений. Дело в том, что наличие таких результатов позволяет максимально расширить область возможного практического применения этих оценок. Весьма общее решение этой задачи дано нами в теореме, приводимой в п. 2.2. В этой теореме мы покажем, что задача об асимптотической нормальности оценок θ^{**} эквивалентна в некотором смысле вопросу об асимптотической нормальности суммы $\sum \zeta_i$ специально подобранных независимых случайных величин. Такая форма записи условий асимптотической нормальности оценок позволяет нам, исходя из явного вида этих величин $\{\zeta_i\}$, удобнее всего решать вопрос о том, какие характеристики распределений ошибок и в какой степени влияют на поведение оценок θ^{**}.

В § 2, 3 будет приведено несколько следствий из этой общей теоремы и примеров ее применения, очень частными случаями которых являются следствие 2 и пример 1.6. В начале § 4 изучаются свойства оценок θ^* и рассматривается тот частный случай оценок θ^{**}, который был введен в работе [8]. В конце § 4 обсуждается вопрос о том, почему в данной работе мы ограничиваемся изучением лишь оценок вида (3) и (8). В частности, в п. 4.4 приведен частный случай модели (1), (2), в котором оценки метода максимального правдоподобия и метода наименьших квадратов найдены в явном виде и не являются состоятельными. В то же время в этом частном случае даже наша самая простая оценка (3) является не только состоятельной, но и асимптотически нормальной.

Отметим, что асимптотическая нормальность оценок в § 2 получена при очень слабых предположениях, поэтому доказательства этих результатов представляют значительную техническую трудность и будут проведены в два этапа. Сначала в § 5 мы установим основную теорему, остальные утверждения § 2 докажем в § 6. В § 7 проведены доказательства результатов из § 3, а в § 8 — доказательства утверждений § 4 и предложения 1.4 из § 1.

О структуре работы. Все следствия и формулы имеют в работе *сплошную* нумерацию, а предположения, замечания, примеры, предложения, определения и леммы для удобства их поиска читателем имеют *общую* двойную нумерацию, первая цифра в которой означает номер параграфа, где надо искать данное утверждение. При определении некоторых величин нам иногда удобнее вместо привычного равенства использовать символ :=, подчеркивающий, что слева от этого символа стоит обозначение для выражения, стоящего справа от него.

Пользуясь случаем, с большой признательностью хотим поблагодарить уважаемого Рецензента работы за все замечания, вопросы и комментарии.

§ 2. Общий подход к изучению оценок θ^{**}

2.1. Главная цель данного параграфа — найти необходимые и довольно широкие достаточные условия, при которых имеет место следующая сходимость:

$$W(B) := (\theta^{**} - \theta)/d \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d = B/A_\gamma > 0, \tag{15}$$

где $B > 0$ — некоторые числа, вопрос о выборе которых мы и должны решить в этом параграфе. Кроме того нас интересуют достаточные условия для сходимости

$$W^{**} := \frac{\theta^{**} - \theta}{d^{**}} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d^{**} := \frac{\left(\sum(\gamma_i^* \epsilon_{ui}^{**})^2\right)^{1/2}}{\sum \gamma_i^* X_{bi} Y_i}, \tag{16}$$

где

$$\gamma_i^* = \gamma_i(\theta^*, X_{ai}, X_{bi}) \quad \text{и} \quad \epsilon_{ui}^{**} := X_{ai} - Y_i - \theta^{**} X_{bi} Y_i. \tag{17}$$

Подчеркнем, что величина d^{**} является статистикой, т. е. в левой части первого соотношения в (16) имеется ровно один неизвестный параметр θ, а потому эта сходимость может быть особенно полезна при построении доверительных интервалов для этого параметра θ и при проверке гипотез.

Введем обозначения, которые используются в работе очень часто:

$$\begin{gathered}\epsilon_i := -(1+\theta b_i)\epsilon_{yi}, \quad \epsilon_{abi} := \epsilon_{ai} - \theta Y_i \epsilon_{bi}, \quad \epsilon_{ui} := \epsilon_i + \epsilon_{abi}, \\ \gamma_{xi} := \gamma_i(\theta, X_{ai}, X_{bi}), \quad \zeta_i := \gamma_{xi}\epsilon_{ui}, \quad \sigma_{abi}^2 := \mathbf{D}\epsilon_{abi},\end{gathered} \tag{18}$$

$$\rho_{xi} := \gamma_{xi} - \gamma_{\theta i} \equiv \gamma_i(\theta, a_i + \epsilon_{ai}, b_i + \epsilon_{bi}) - \gamma_i(\theta, a_i, b_i), \quad \rho_{oi}^2 := \mathbf{E}\rho_{xi}^2. \tag{19}$$

Мы также постоянно будем использовать обозначения, введенные в (6) и (9). Отметим, что в (18), (19) и всюду далее наличие у некоторых величин первого нижнего индекса x и последнего нижнего индекса i означает, что данные случайные величины являются функциями от X_{ai} и X_{bi}.

Замечание 2.1. Из определений (2), (18) и (17) вытекают равенства

$$\epsilon_{ui} = (\epsilon_{ai}-\theta y_i\epsilon_{bi})-\epsilon_{yi}(1+\theta b_i+\theta\epsilon_{bi}) = X_{ai}-Y_i-\theta X_{bi}Y_i = \epsilon_{ui}^{**}+(\theta^{**}-\theta)X_{bi}Y_i. \quad (20)$$

Отсюда и из определения (8) имеем

$$\theta^{**} - \theta = \sum \gamma_i^* \epsilon_{ui} \Big/ \sum \gamma_i^* X_{bi} Y_i. \quad (21)$$

Подчеркнем, что представление (21) лежит в основе изучения оценок θ^{**}.

2.2. Введем основные предположения, которые постоянно используются в работе. На числа $\{c_i\}$, участвующие в определении (3) оценки θ^*, мы постоянно будем налагать следующие ограничения: $A_c > 0$ и

$$d_{uc}/\theta \to 0, \quad \text{где } d_{uc} = B_{uc}/A_c \text{ при } B_{uc}^2 := \sum c_i^2 \mathbf{D}\epsilon_{ui} > 0. \quad (22)$$

От функций $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ всюду будем требовать, что справедливо

Предположение 2.2. *При всех n и i существуют случайные величины K_{xi} такие, что $K_{oi}^2 := \mathbf{E}K_{xi}^2 < \infty$ и*

$$|\gamma_i(t_1, X_{ai}, X_{bi}) - \gamma_i(t_2, X_{ai}, X_{bi})| \le K_{xi}|t_1 - t_2| \quad \forall\, t_1, t_2 \in [\theta/2, 3\theta/2].$$

Самым важным условием в работе является следующее

Предположение 2.3. *Верны предположения* 1.1 *и* 2.2, *условие* (22) *и, кроме того,*

$$\begin{gathered} \alpha_1 := \sum (d_{uc}K_{oi} + \rho_{oi})(b_i + \sigma_{bi})(y_i + \sigma_{yi})/A_\gamma \to 0, \\ \alpha_2^2 := \sum \gamma_{\theta i}^2 \mathbf{D}(X_{bi}Y_i)/A_\gamma^2 \to 0, \end{gathered} \quad (23)$$

$$B > 0, \quad \beta_1^2 := d_{uc}^2 \sum K_{oi}^2 \sigma_i^2/B^2 \to 0, \quad \beta_2 := d_{uc} \sum K_{oi}\sigma_{abi}/B \to 0. \quad (24)$$

Введем еще два ограничения:

$$\alpha_3^2 := \sum \gamma_{\theta i}^2 b_i^2 y_i^2/A_\gamma^2 \to 0, \quad (25)$$

$$\overline{W}_\zeta^2(B) := \sum \zeta_i^2/B^2 \xrightarrow{p} 1. \quad (26)$$

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение работы.

Теорема. *Если верно предположение* 2.3, *то условие*

$$W_\zeta(B) := \sum \zeta_i/B \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad (27)$$

является необходимым и достаточным для сходимости (15). *Кроме того, если предположение* 2.3 *выполнено вместе с условиями* (25)–(27), *то имеют место сходимости* (16) *и* (15).

Замечание 2.4. Отметим, что в приведенной теореме труднее всего проверять условия (26) и (27). Дело в том, что проверка остальных условий теоремы сводится к вычислениям некоторых числовых характеристик случайных величин, участвующих в определении оценок θ^{**}, и только в условиях (26) и (27) ограничения накладываются непосредственно на поведение некоторых случайных величин. Но, с другой стороны, сходимости (26) и (27) представляют собой хорошо изученный объект. Действительно, условие (27) — это предположение о том, что сумма независимых случайных величин $\{\zeta_i\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме при соответственно подобранной нормировке, а условие (26) требует, чтобы квадраты этих величин удовлетворяли закону больших чисел.

2.3. При изучении асимптотической нормальности оценок мы постоянно будем использовать классическое условие Линдеберга. Для удобства читателя напомним это условие в начале § 6. Нам потребуется

Предположение 2.5. *Случайные величины $\{\zeta_i - \mathbf{E}\zeta_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 2.3 *выполнено при $B^2 = B_\zeta^2 := \sum \mathbf{D}\zeta_i$.*

Следствие 3. *Пусть выполнено предположение* 2.5. *Тогда*

(A) *для справедливости* (15) *необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

$$\Delta_0(B) := \sum \mathbf{E}\zeta_i/B \to 0 \quad \textit{и} \quad B_\zeta^2/B^2 \to 1; \tag{28}$$

(A$'$) *в частности, условие $\Delta_0(B_\zeta) \to 0$ является необходимым и достаточным для выполнения* (15) *при $B = B_\zeta$;*

(Б) *если верны ограничения*

$$\Delta_0(B_\zeta) \to 0, \quad \alpha_3 \to 0 \quad \textit{и} \quad \beta_3^2 := \sum (\mathbf{E}\zeta_i)^2/B_\zeta^2 \to 0, \tag{29}$$

то имеет место сходимость (16).

2.4. Предположим теперь, что функции $\gamma_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ дифференцируемы по второму и третьему аргументам. В этом случае оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях простое условие

$$\Delta_{00}(B) := \sum \bigl(\sigma_{ai}^2 \gamma_{ai}'(\theta, a_i, b_i) - \theta y_i \sigma_{bi}^2 \gamma_{bi}'(\theta, a_i, b_i)\bigr)/B \to 0 \tag{30}$$

будет необходимым и достаточным для сходимости $\Delta_0(B) \to 0$. Мы сейчас приведем соответствующее утверждение. Положим

$$\rho_{xabi} := \gamma_i(\theta, X_{ai}, X_{bi}) - \gamma_i(\theta, a_i, b_i) - \gamma_{bi}'(\theta, a_i, b_i)\epsilon_{ai} - \gamma_{ai}'(\theta, a_i, b_i)\epsilon_{bi}. \tag{31}$$

Предложение 2.6. *Пусть выполнено предположение* 1.1 *и*

$$\Delta_{ab}(B) := \sum \mathbf{E}(\rho_{xabi}\epsilon_{abi})/B \to 0. \tag{32}$$

В этом случае ограничение (30) *является необходимым и достаточным для справедливости первого условия в* (28).

Это утверждение вытекает из равенства $\Delta_0(B) - \Delta_{00}(B) = \Delta_{ab}(B)$, которое верно, поскольку $\rho_{xi} - \rho_{xabi} = \gamma_{bi}'(\theta, a_i, b_i)\epsilon_{ai} + \gamma_{ai}'(\theta, a_i, b_i)\epsilon_{bi}$ ввиду (19) и (31).

2.5. Рассмотрим теперь вопрос об условиях для сходимости (10). Введем

Предположение 2.7. *Случайные величины $\{\gamma_{\theta i}\epsilon_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, предположение* 2.3 *выполнено при $B = B_\gamma$, а кроме того,*

$$\beta_{\gamma 1}^2 := \sum \gamma_{\theta i}^2 \sigma_{abi}^2/B_\gamma^2 \to 0 \quad \textit{и} \quad \beta_{\gamma 2}^2 := \sum \rho_{oi}^2 \sigma_i^2/B_\gamma^2 \to 0. \tag{33}$$

Следствие 4. *Пусть справедливо предположение* 2.7. *В этом случае*
(А) *для сходимости* (10) *достаточным является следующее условие:*

$$\beta_{\gamma 0} := \sum \rho_{oi}\sigma_{abi}/B_\gamma \to 0; \tag{34}$$

(Б) *если* $\beta_{\gamma 0} \to 0$ *и* $\alpha_3 \to 0$, *то верно также* (16);
(В) *если выполнено предположение*

$$\Delta_{\rho\epsilon} := \sum (\rho_{xi}\epsilon_{abi} - \mathbf{E}(\rho_{xi}\epsilon_{abi}))/B_\gamma \xrightarrow{p} 0, \tag{35}$$

то условие $\Delta_0(B_\gamma) \to 0$ *необходимо и достаточно для сходимости* (10).

Замечание 2.8. Следующее простое условие (при неслучайном q):

$$\mu_{\rho\epsilon}(q, B_\gamma) := \sum \mathbf{E}|\rho_{xi}\epsilon_{abi} - \mathbf{E}(\rho_{xi}\epsilon_{abi})|^q/B_\gamma^q \to 0, \quad 1 \le q \le 2, \tag{36}$$

достаточно для справедливости (35). Этот факт вытекает из неравенства Бара — Эссеена (см., например, [16, с. 79]), в силу которого $\mathbf{E}|\Delta_{\rho\epsilon}|^q \le 2\mu_{\rho\epsilon}(q, B_\gamma)$.

Для полноты картины отметим еще, что простейшее необходимое и достаточное условие для сходимости (10) легко извлекается из следствия 3 при $B = B_\gamma$. Однако в некоторых случаях такое условие может содержать излишние ограничения по сравнению с условиями из следствия 4. Простейший пример такой ситуации будет приведен в п. 3.4.

2.6. Если в следствиях 4–10 мы решим предположение 1.1 заменить более простым предположением 1.2, которое использовалось во введении, то нам будет полезным следующее утверждение.

Предложение 2.9. *Пусть верно предположение* 1.2 *и или* $\eta_i = c_i\epsilon_{ui}$, *или* $\eta_i = c_i\epsilon_i$, *или* $\eta_i = \gamma_{\theta i}\epsilon_{ui}$, *или* $\eta_i = \gamma_{\theta i}\epsilon_i$. *Пусть* $\lambda(\eta_\bullet) := \max_i \mathbf{D}\eta_i / \sum \mathbf{D}\eta_i \to 0$. *Тогда в каждом из четырех перечисленных случаев величины* $\{\eta_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга.*

Замечание 2.10. Если выполнено предположение 1.1, то из формул (6) и (18) немедленно вытекают следующие полезные соотношения:

$$\sigma_i^2 = \mathbf{D}\epsilon_i, \quad \sigma_{abi}^2 = \sigma_{ai}^2 + \theta^2 y_i^2 \sigma_{bi}^2 + \theta^2 \sigma_{yi}^2 \sigma_{bi}^2, \quad \mathbf{D}\epsilon_{ui} = \sigma_i^2 + \sigma_{abi}^2, \tag{37}$$
$$\mathbf{E}\epsilon_{ui} = \mathbf{E}\epsilon_{abi} = 0,\ \mathbf{E}(X_{bi}Y_i) = b_i y_i,\ \mathbf{D}(X_{bi}Y_i) = y_i^2\sigma_{bi}^2 + b_i^2\sigma_{yi}^2 + \sigma_{yi}^2\sigma_{bi}^2 \le \mathbf{D}\epsilon_{ui}/\theta^2.$$

Из (18)–(20) имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\zeta_i = \mathbf{E}(\rho_{xi}\epsilon_{abi}) = \mathbf{E}(\rho_{xi}\epsilon_{ai}) - \theta y_i \mathbf{E}(\rho_{xi}\epsilon_{bi}),\\ B_\zeta^2 = \sum \sigma_{yi}^2 \mathbf{E}\big(\gamma_{xi}^2(1+\theta X_{bi})^2\big) + \sum \mathbf{D}(\gamma_{xi}(\epsilon_{ai} - \theta y_i \epsilon_{bi})),\end{gathered} \tag{38}$$

если соответствующие математические ожидания существуют.

§ 3. Условия для асимптотической нормальности оценок θ^{**} в регулярных случаях

3.1. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда выполнено

Предположение 3.1. *Пусть случайные величины* $\{\gamma_{\theta i}\epsilon_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, выполнены предположения* 1.1, 1.3 *и условия* (4) *и* (7).

Случаи, когда выполнено предположение 3.1, естественно назвать *регулярными*. Отметим, что в этих случаях

$$d_{uc}^2 + d^2(c_\bullet) + d^2(\gamma_\bullet) = O(1/n), \quad \inf_n d(\gamma_\bullet) > 0.$$

Следствие 5. *Если выполнены предположение* 3.1 *и условие* (11), *то имеют место сходимости* (10) *и* (16).

Замечание 3.2. Если выполнены предположения 1.2 и 3.1, то в силу предложения 2.9 случайные величины $\{\eta_i = \gamma_{\theta i}\epsilon_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, т. е. следствие 2 из введения является частным случаем следствия 5.

3.2. Рассмотрим теперь более трудный вопрос о необходимых условиях для сходимости (10) в регулярном случае. Нам потребуется

Предположение 3.3. *Функции $\{\gamma_i(t,a,b)\}$ дважды дифференцируемы по второму и третьему аргументам, причем*

$$C_{ab} := \sup_{n,i}\sup_{a\in\mathscr{A}}\sup_{b\in\mathscr{B}}\left(\frac{|\gamma''_{ai}(\theta,a,b)|}{(1+|b|)^2}+\frac{|\gamma''_{abi}(\theta,a,b)|}{(1+|a|)(1+|b|)}+\frac{|\gamma''_{bi}(\theta,a,b)|}{(1+|a|)^2}\right)<\infty, \quad (39)$$

где множества $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ введены в предположении 1.3 *и где мы использовали следующие обозначения: $f''_{ai}(t,a,b) := \partial^2 f_i(t,a,b)/\partial a^2$, $f''_{bi}(t,a,b) := \partial^2 f_i(t,a,b)/\partial b^2$, $f''_{abi}(t,a,b) := \partial^2 f_i(t,a,b)/\partial a\partial b$.*

Следствие 6. *Пусть верно предположение* 3.1. *В этом случае справедливы следующие три утверждения:*

(А) *если при неслучайном r*

$$\mu(r) := \sum(\mathbf{E}|\epsilon_{ai}|^r + \mathbf{E}|\epsilon_{bi}|^r)/n^{r/4} \to 0, \quad 2\le r\le 4, \quad (40)$$

то условие $\Delta_0(\sqrt{n})\to 0$ необходимо и достаточно для сходимости (10);

(Б) *если выполнено предположение* 3.3 *и*

$$\mu_0 := \sum(\mathbf{E}|\epsilon_{ai}|^3 + \mathbf{E}|\epsilon_{bi}|^3)/\sqrt{n} \to 0, \quad (41)$$

то ограничение $\Delta_{00}(\sqrt{n})\to 0$ будет необходимым и достаточным для (10);

(В) *если верно предположение* 3.3 *и дополнительно*

$$\mu_0\to 0, \quad \inf_{n,i}\gamma'_{ai}(\theta,a_i,b_i)>0, \quad \inf_{n,i}\theta y_i(-\gamma'_{bi}(\theta,a_i,b_i))>0, \quad (42)$$

то необходимым и достаточным для (10) *будет условие* (11).

3.3. В этом пункте изучим случай, который является естественным обобщением примера 1.6 из введения.

Предположение 3.4. *Функции $\{\gamma_i(t,a,b)\}$ имеют вид*

$$\forall\, n,\ i \quad \gamma_i(t,X_{ai},X_{bi}) = X_{ai}X_{bi}/(1+X_{bi}t)^k, \quad k\ge 0, \quad (43)$$

причем все случайные величины $\{X_{bi}\}$ неотрицательны, а параметр $k\ge 0$ неслучаен и не зависит от номера серии n. Предполагается еще, что используется оценка θ^* при $c_i\equiv 1$ и выполнены условия (4) *и предположение* 1.1.

В этом случае

$$\gamma_{\theta i} = a_ib_i/(1+b_i\theta)^k,\ A_\gamma = \sum a_i^2b_i^2/(1+b_i\theta)^{k+1},\ B_\gamma^2 = \sum a_i^2b_i^2\sigma_i^2/(1+b_i\theta)^{2k}, \quad (44)$$

и мы покажем в лемме 7.5, что введенные в (28) и (30) величины $\Delta_0(\cdot)$ и $\Delta_{00}(\cdot)$ примут следующий вид:

$$\Delta_0(\sqrt{n}) = \sum\left(\sigma_{ai}^2\mathbf{E}\frac{X_{bi}}{(1+\theta X_{bi})^k} - a_i\theta y_i\mathbf{E}\frac{X_{bi}\epsilon_{bi}}{(1+\theta X_{bi})^k}\right)\Big/\sqrt{n}\to 0, \quad (45)$$

$$\Delta_{00}(\sqrt{n}) = \sum\left(\frac{\sigma_{ai}^2b_i}{(1+b_i\theta)^k}+\frac{\sigma_{bi}^2\theta a_i^2(kb_i\theta-b_i\theta-1)}{(1+b_i\theta)^{k+2}}\right)\Big/\sqrt{n}\to 0. \quad (46)$$

Понятно, что условие (46) проверять легче, чем (45).

Следствие 7. *Пусть выполнено предположение* 3.4. *В этом случае справедливы следующие пять утверждений:*

(А) *если случайные величины* $\{\gamma_{\theta i}\epsilon_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга и выполнено условие* (11), *то имеют место сходимости* (10) *и* (16);

(Б) *если верны предположение* 1.2 *и*

$$\mathbf{E}|\xi_{a1}|^r + \mathbf{E}|\xi_{b1}|^r < \infty, \quad \sum\bigl(\sigma_{ai}^r + \sigma_{bi}^r\bigr)/n^{r/4} \to 0, \quad 2 \le r \le 4, \tag{47}$$

то условие (45) *является необходимым и достаточным для справедливости* (10);

(В) *если справедливы предположение* 1.2 *и*

$$\mathbf{E}|\xi_{a1}|^3 + \mathbf{E}|\xi_{b1}|^3 < \infty, \quad \sum\bigl(\sigma_{ai}^3 + \sigma_{bi}^3\bigr)/\sqrt{n} \to 0, \tag{48}$$

то (46) *будет необходимым и достаточным для сходимости* (10);

(Г) *если одновременно верны предположение* 1.2, *условие* (48) *и*

$$k > 1, \quad (k-1)\inf_{n,i} b_i\theta = 1 + \bar{c} > 1, \tag{49}$$

то необходимым и достаточным для сходимости (10) *будет условие* (11);

(Д) *условие* (11) *является необходимым и достаточным для сходимости* (10) *также и в случае, когда выполнены условия* (47), (49), *предположение* 1.2 *и дополнительно* $(k-1)\theta X_{bi} \ge 1$ *п. н. при всех* i *и* n.

Подчеркнем, что при $r = 3$ условие (47) слабее, чем (48).

Отметим, что пример 1.6 из введения является очевидным частным случаем утверждения (Д) из следствия 7, если заметим, что условие (47) при $r = 4$ очевидным образом вытекает из (7).

Замечание 3.5. Если условие (12) верно при $w_i^2(\theta, a_i, b_i) = (1 + b_i\theta)^{k-3}$, то замечание 1.5 рекомендует нам использовать изучаемую в данном пункте оценку θ^{**}. Однако при изучении этой оценки мы не использовали предположения вида (12), чтобы не исключать возможность использовать исследуемые оценки в случаях, когда мы не имеем надежной информации о точном виде дисперсий наблюдений.

Аналогичным образом мы поступаем во всех утверждениях данной работы.

3.4. Приведенное в предыдущем пункте утверждение дает нам возможность сделать несколько полезных замечаний.

Замечание 3.6. Пусть выполнены все условия п. (В) следствия 7. Поскольку соотношение (46) имеет достаточно простой вид, из условия (4) и указанного утверждения легко извлекаются следующие факты:

(А) если дополнительно $\sigma_{bi} \equiv 0$ при всех i и n, то первое условие в (11) является необходимым для справедливости (10);

(Б) если $\sigma_{ai} \equiv 0$ при всех i и n и либо $0 \le k \le 1$, либо $(k-1)\inf\limits_{n,i} b_i\theta > 1$, то второе условие в (11) необходимо для (10);

(В) если $n^{1/4}\min\limits_i \sigma_{bi} \to \infty$ и

$$\forall\ n, i \quad b_i\sigma_{ai}^2(1 + b_i\theta)^2 = \sigma_{bi}^2 a_i^2\theta(1 + b_i\theta - kb_i\theta),$$

то $\Delta_{00}(\sqrt{n}) \equiv 0$ и справедливо (10), но ни одна из сходимостей в (11) не имеет места.

Таким образом, даже в регулярных случаях, когда не выполнено условие (42), иногда можно так подобрать связи между неизвестными параметрами изучаемой нами задачи, что условия (11) можно ослабить. Однако в данной работе мы не ставили своей задачей изучение таких специально подобранных случаев.

Замечание 3.7. При $k = 0$ из (43) и определений (18) и (20) вытекает простое представление $\zeta_i = (a_i + \epsilon_{ai})(b_i + \epsilon_{bi})((\epsilon_{ai} - \theta y_i \epsilon_{bi}) - \epsilon_{yi}(1 + \theta b_i + \theta \epsilon_{bi}))$. Отсюда нетрудно извлечь следующее утверждение:

$$\text{если} \quad \mathbf{D}\zeta_i < \infty, \quad \text{то} \quad \mathbf{E}\epsilon_{ai}^4 + \mathbf{E}\epsilon_{bi}^4 < \infty.$$

Таким образом, при доказательстве следствия 7 мы не можем воспользоваться относительно простым следствием 3, основанным на стандартном условии Линдеберга, поскольку в данной ситуации у нас могут не существовать моменты четвертого порядка. Мы вынуждены для доказательства следствия 7 применять более тонкий результат из основной теоремы.

Аналогичным образом обстоит дело и в следствиях 4–6.

§ 4. Специальные случаи

4.1. Мы уже отмечали, что оценки θ^* являются частным случаем оценок θ^{**} при постоянных функциях γ_i, т. е. в случае $\gamma_i \equiv c_i$. Приведем для полноты картины соответствующие результаты об условиях для асимптотической нормальности оценок θ^*. Мы будем использовать обозначения A_c, B_c и B_{uc}, введенные в (6) и (22). Нам потребуется

Предположение 4.1. *Случайные величины $\{c_i\epsilon_{ui}\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, верно предположение* 1.1 *и*

$$A_c > 0, \quad d_{vc}^2 := \sum c_i^2 \mathbf{D}(X_{bi}Y_i)/A_c^2 \to 0. \tag{50}$$

Следствие 8. *Пусть верно предположение* 4.1. *В этом случае справедливы следующие три утверждения:*

(А) *имеет место сходимость*

$$(\theta^* - \theta)/d_{uc} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d_{uc} = B_{uc}/A_c; \tag{51}$$

(Б) *если выполнено условие*

$$\sum c_i^2 b_i^2 y_i^2 / A_c^2 \to 0, \tag{52}$$

то при $\epsilon_{ui}^* := X_{ai} - Y_i - \theta^* X_{bi} Y_i$ *справедлива также сходимость*

$$(\theta^* - \theta)/d^* \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \quad \text{где } d^* = \Big(\sum (c_i \epsilon_{ui}^*)^2\Big)^{1/2} \Big/ \sum c_i X_{bi} Y_i; \tag{53}$$

(В) *сходимость* (5) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\big(B_{uc}^2 - B_c^2\big)/B_c^2 \equiv \sum c_i^2 \sigma_{abi}^2 / B_c^2 \to 0. \tag{54}$$

Отметим, что следующее утверждение содержит более простые, чем в следствии 8, достаточные условия для справедливости (5).

Следствие 9. *Пусть верно предположение* 1.1, *случайные величины* $\{c_i\epsilon_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга и выполнены условия* (50) *и* (54). *В этом случае имеет место сходимость* (5). *Если дополнительно выполнено условие* (52), *то справедливо и* (53).

Замечание 4.2. Нетрудно понять, что следствие 1 из введения является частным случаем предложения 2.9 и утверждения (B) следствия 8. Дело в том, что при справедливости достаточно жесткого ограничения (4) автоматически выполнено условие (50), а предположение (54) оказывается эквивалентным более простому условию (7).

Замечание 4.3. Из равенства (21) при $\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot) \equiv c_i$ получаем следующее представление для величины θ^*:

$$\theta^* = \theta + U/(1+V) \text{ при } U = \sum c_i\epsilon_{ui}/A_c \text{ и } V = \sum c_i(X_{bi}Y_i - b_iy_i)/A_c. \qquad (55)$$

Можно, следуя [8], доказывать свойства оценки θ^* непосредственно, основываясь на представлении (55), т. е. повторяя вывод свойств оценки θ^{**}, но со значительными упрощениями. Этот более простой и несколько более долгий путь приводит, однако, к тем же оценкам. Этот факт показывает, что ограничения, наложенные в § 2 на оценки θ^{**}, нельзя существенно ослабить по крайней мере для достаточно гладких функций $\{\gamma_i(\cdot,\,\cdot,\,\cdot)\}$.

4.2. Для полноты картины изучим вопрос о состоятельности оценки θ^*.

Предложение 4.4. *Пусть справедливы предположение* 1.1 *и условие* (6). *Тогда если* $d_{uc} + d_{vc} \to 0$, *то* $\theta^* - \theta \xrightarrow{p} 0$. *Кроме того, если выполнено условие* (22), *то имеет место следующая сходимость:* $\theta^*/\theta \xrightarrow{p} 1$.

Подчеркнем, что в этом предложении не исключаются возможности, когда $\theta \to 0$ или $\theta \to \infty$ при $n \to \infty$. Если θ не зависит от n, то каждая из сходимостей в предложении 4.4 означает обычную состоятельность оценки θ^*. Отметим, однако, что при изучении «улучшенных» оценок θ^{**} нам было удобнее иметь дело со сходимостью $\theta^*/\theta \xrightarrow{p} 1$.

Замечание 4.5. Как следует из примера в замечании 6 из [8], при выполнении всех условий п. (A) следствия 8 асимптотически нормальная оценка θ^* может тем не менее не быть состоятельной. Дело в том, что наблюдения неодинаково распределены и выполнение указанных условий не влечет сходимость $d_{uc} \to 0$, которая является существенным требованием для состоятельности оценки θ^* в случае, когда асимптотическая нормальность (51) уже доказана.

Замечание 4.6. Подчеркнем, что приведенные выше в этом параграфе и в предложении 2.9 утверждения содержат все результаты из [8], касающиеся условий для состоятельности и асимптотической нормальности оценок θ^*, которые были там получены в частном случае $\epsilon_{ai} = \epsilon_{bi} = 0$ при всех n и i.

4.3. Рассмотрим возможность, когда все функции $\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi}) \equiv \gamma_{oi}(t)$ являются функциями только от своего первого аргумента. В этом случае, очевидно,

$$\theta^{**} = \sum \gamma_{oi}(\theta^*)(X_{ai} - Y_i) \Big/ \sum \gamma_{oi}(\theta^*)X_{bi}Y_i, \quad \mathbf{E}\zeta_i \equiv 0,$$

$$A_\gamma = \sum \gamma_{oi}(\theta)b_iy_i, \quad B_\gamma^2 = \sum \gamma_{oi}^2(\theta)\sigma_i^2, \quad B_\zeta^2 = \sum \gamma_{oi}^2(\theta)\mathbf{D}\epsilon_{ui}.$$

Если эти функции удовлетворяют предположению 2.2, то ясно, что величины $K_{xi} \equiv K_{oi}$ будут неслучайными. В рассматриваемом случае из следствия 3 при $B = B_\zeta$ очевидным образом вытекает

Следствие 10. *Пусть $\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi}) \equiv \gamma_{oi}(t)$, и предположим, что случайные величины $\{\gamma_{oi}(\theta)\epsilon_{ui}\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 2.3 *справедливо при $\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi}) \equiv \gamma_{oi}(t)$, $K_{xi} \equiv K_{oi}$, $\rho_{xi} = \rho_{oi} = 0$ и $B = B_\zeta$. В этом случае верно* (15) *при $B = B_\zeta$. Если еще $\alpha_3 \to 0$, то справедливо и* (16).

Замечание 4.7. Если в следствии 10 положить $\epsilon_{ai} = \epsilon_{bi} = 0$, то мы получим условия для сходимости (10), аналогичные приведенным в [8, теорема 9], где рассматривался этот случай. Количество же условий для сходимости (16) при $\epsilon_{ai} = \epsilon_{bi} = 0$, вытекающих из следствия 10, существенно меньше числа предположений, приведенных в [8, теорема 10] для аналогичной сходимости. Последний факт происходит за счет более удачного выбора оценки d^{**} в настоящей работе.

Замечание 4.8. Отметим, что в нашей работе [8] (когда величины a_i и b_i измерялись точно, без случайных погрешностей) частный случай функций $\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi})$ из следствия 10 являлся основным, поскольку в [8] мы могли считать, что $\gamma_i(t) = \gamma_i(t, a_i, b_i)$. Теперь, когда значения a_i и b_i нам неизвестны, у нас нет такой возможности.

4.4. В этом пункте на примерах сравним наши оценки с оценками максимального правдоподобия (ОМП) и с оценками по методу наименьших квадратов (НМК-оценками), поскольку эти оценки очень часто выступают в качестве эталона точности. Введем

Предположение 4.9. *Пусть при каждом n наблюдения $\{Y_i\}$ и $\{X_{ai}\}$ имеют нормальные распределения и выполнено предположение* 1.2, *причем*

$$\sigma_{yi}^2 = \sigma^2/(1 + b\theta), \quad \sigma_{ai}^2 = \sigma^2 w(1 + b\theta), \quad \inf_n \sigma > 0 \quad \text{и} \quad X_{bi} = b_i = b, \tag{56}$$

где числа $b > 0$ и $w > 0$ всегда предполагаются известными.

Наш интерес к этому частному случаю объясняется достаточно просто: в рассматриваемой задаче это один из немногих случаев, когда ОМП удается найти в явном виде.

Предложение 4.10. *Пусть предположение* 4.9 *верно при $w > 0$, причем параметры $a_1, \dots, a_n$ и θ предполагаются неизвестными. В этом случае оценка максимального правдоподобия $\hat\theta$ для параметра θ совпадает с оценкой по методу наименьших квадратов и удовлетворяет уравнению*

$$\widehat{T}^2 \sum Y_i^2 = \sum X_{ai}^2 \quad \text{при } \widehat{T} = 1 + b\hat\theta. \tag{57}$$

Если дополнительно $w \to 0$, выполнено условие (4), *а параметр θ не зависит от номера серии n, то существуют числа $Q > 0$ такие, что*

$$\sup_n Q < \infty \quad \text{и} \quad Q(T^2 - \widehat{T}^2) \to 1 \quad \text{при } T = 1 + b\theta. \tag{58}$$

Таким образом, если бы оценка $\hat\theta$ была состоятельной, то в этом случае с необходимостью одновременно должны были бы выполняться следующие соотношения:

$$\hat\theta \xrightarrow{p} \theta, \quad \widehat{T}^2 - T^2 \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad Q(T^2 - \widehat{T}^2) \xrightarrow{p} 0. \tag{59}$$

Однако последняя сходимость в (59) невозможна ввиду (58). Следовательно, оценка $\hat\theta$ не является состоятельной.

Напомним, что в этом случае самая простая оценка из (3) не только состоятельна, но и асимптотически нормальна в силу следствия 1, причем при более слабых предположениях.

Замечание 4.11. Пусть известны точные значения величин $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, а наблюдения $\{Y_i\}$ имеют нормальные распределения со средними $\{y_i\}$ и с дисперсиями $\{\sigma^2_{yi}\}$, которые не зависят от параметра θ. В этом случае, как отмечено авторами в [8, замечание 2], величина $1/d^2(\gamma_{\bullet,w})$ совпадает с суммарной информацией Фишера для выборки $\{Y_i\}$. Тем самым ввиду неравенства Рао — Крамера в описанной ситуации несмещенные оценки не могут иметь дисперсии, меньшие, чем $d^2(\gamma_{\bullet,w})$.

В работе [8] приведенные выше аргументы признаны достаточным основанием для того, чтобы не пытаться выходить за класс введенных в (8) оценок θ^{**}. При наличии случайных ошибок в коэффициентах ситуация может еще больше стать в пользу наших оценок, как следует из предложения 4.10.

§ 5. Доказательство теоремы

5.1. Важную роль в работе будет играть следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Пусть выполнены предположения* 1.1 *и* 2.2. *В этом случае существует такая случайная величина* $\tilde\theta$, *что одновременно верны следующие неравенства:*

$$\mathbf{P}(\tilde\theta \neq \theta^*) \le 4d^2_{vc} + 16d^2_{uc}/\theta^2, \quad |\tilde\theta - \theta| \le \theta/2, \quad \mathbf{E}|\tilde\theta - \theta|^2 \le 4d^2_{uc}, \tag{60}$$

$$\mathbf{E}\,|\Delta| \le 8(1 + 2d_{vc})d_{uc}\Big(\sum K^2_{oi}\sigma^2_i\Big)^{1/2} \equiv 8(1 + 2d_{vc})\beta_1 B, \tag{61}$$

где

$$\Delta := \sum \delta_i\epsilon_i \quad \textit{при } \delta_i := \tilde\gamma_i - \gamma_{xi} \textit{ и } \tilde\gamma_i := \gamma_i(\tilde\theta, X_{ai}, X_{bi}). \tag{62}$$

Ввиду представления (55) это предложение является частным случаем теоремы 5 из [17] при $r = 1$, $g_i(t) = (\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi}) - \gamma_{xi})\epsilon_i$, $\bar g_i = K_{xi}\epsilon_i$, $G_i = K_{oi}\sigma_i$.

Замечание 5.2. Пользуясь случаем, исправим одну неточность, допущенную авторами в [8]. Там вместо оценки $\tilde\theta$, определенной в формуле (5.3), нужно положить

$$\tilde\theta = \min\{|Z_1|, \theta/2\}\,\mathrm{sign}\,Z_1/\max\{1/2, 1 + Z_2\},$$

где Z_1 и Z_2 определены в [8]. При написании работы [8] авторы ошибочно полагали, что в формуле (5.3) используется более компактная форма записи для $\tilde\theta$.

Далее в работе для любой последовательности $\{a_i\}$ и для случайной величины ξ будем использовать обозначения

$$\|a_\bullet\| := \Big(\sum a^2_i\Big)^{1/2}, \quad \|\xi\|_2 := (\mathbf{E}\xi^2)^{1/2}. \tag{63}$$

В частности, эти нормы обладают следующими известными свойствами:

$$\|a_\bullet + b_\bullet\| \le \|a_\bullet\| + \|b_\bullet\|, \quad \big|\|a_\bullet\| - \|b_\bullet\|\big| \le \|a_\bullet - b_\bullet\|, \tag{64}$$

$$\sum a_ib_i \le \|a_\bullet\|\cdot\|b_\bullet\|, \quad \|a_\bullet\| \le \sum |a_i|, \quad \|\xi\eta\|_2 \le \|\xi\|_2\cdot\|\eta\|_2, \tag{65}$$

которыми мы будем пользоваться, часто этого не оговаривая.

5.2. Доказательство теоремы базируется на следующем утверждении, в котором мы используем величину $\tilde\theta$, введенную в предложении 5.1.

Предложение 5.3. *Если верно предположение* 2.3, *то*

$$\tilde{\rho}_u := \sum \tilde{\gamma}_i \epsilon_{ui}/B - W_\zeta(B) \xrightarrow{p} 0, \quad \tilde{\rho}_v := \sum \tilde{\gamma}_i X_{bi} Y_i / A_\gamma - 1 \xrightarrow{p} 0. \tag{66}$$

Кроме того, если предположение 2.3 *выполнено вместе с условиями* (25) *и* (26), *то*

$$\tilde{\rho}_{uu} := \|\tilde{\gamma}_\bullet \epsilon_{u\bullet}\|/B - 1 \xrightarrow{p} 0, \quad \tilde{\rho}_{vv} := \|\tilde{\gamma}_\bullet X_{b\bullet} Y_\bullet\|/A_\gamma \xrightarrow{p} 0. \tag{67}$$

Доказательство этого утверждения будет проведено в несколько этапов в следующих пунктах этого параграфа. А здесь мы покажем, как из этого предложения извлекаются нужные нам утверждения теоремы.

Доказательство теоремы. Если выполнено предположение 2.3, то верны соотношения (22) и (60), тем самым $\mathbf{P}(\tilde{\theta} \neq \theta^*) \le 20 d_{uc}^2/\theta^2 \to 0$. Но это означает, что

$$\mathbf{P}\big(\rho_u^* \neq \tilde{\rho}_u\big) + \mathbf{P}\big(\rho_v^* \neq \tilde{\rho}_v\big) + \mathbf{P}\big(\rho_{uu}^* \neq \tilde{\rho}_{uu}\big) + \mathbf{P}\big(\rho_{vv}^* \neq \tilde{\rho}_{vv}\big) \to 0, \tag{68}$$

где через $\rho_\bullet^*$ и $\rho_{\bullet\bullet}^*$ обозначены величины, которые получатся, если заменить $\tilde{\theta}$ на θ^* в определениях (66) и (67) величин $\tilde{\rho}_\bullet$ и $\tilde{\rho}_{\bullet\bullet}$. Учитывая (66), из (68) получаем, что

$$\rho_u^* \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad \rho_v^* \xrightarrow{p} 0. \tag{69}$$

Из (15), (21) и (66) находим, что

$$W(B) = \frac{\theta^{**} - \theta}{d} = \frac{\sum \gamma_i^* \epsilon_{ui}/B}{\sum \gamma_i^* X_{bi} Y_i / A_\gamma} = \frac{W_\zeta(B) + \rho_u^*}{1 + \rho_v^*}. \tag{70}$$

Таким образом, если $W_\zeta(B) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, то $W(B) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ в силу (69) и (70). Если, обратно, $W(B) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, то $W_\zeta(B) = (1+\rho_v^*)W(B) - \rho_u^* \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Тем самым мы доказали первое утверждение теоремы.

Если кроме предположения 2.3 выполнены еще условия (25)–(27), то с учетом (67)–(70) имеем

$$W_\zeta(B) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad W(B) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \quad \rho_{uu}^* \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad \rho_{vv}^* \xrightarrow{p} 0. \tag{71}$$

Введем обозначения

$$B^{**} = \|\gamma_\bullet^* \epsilon_{u\bullet}^{**}\|, \quad \rho_{uv}^* := B^{**}/B - \|\gamma_\bullet^* \epsilon_{u\bullet}\|/B. \tag{72}$$

Из (20) имеем $\gamma_i^* \epsilon_{ui}^{**} - \gamma_i^* \epsilon_{ui} = -(\theta^{**} - \theta)\gamma_i^* X_{bi} Y_i$. Из этого равенства и (72) с учетом второго свойства норм в (64) находим

$$|\rho_{uv}^*| = \big|\|\gamma_\bullet^* \epsilon_{u\bullet}^{**}\| - \|\gamma_\bullet^* \epsilon_{u\bullet}\|\big|/B \le \| - (\theta^{**} - \theta)\gamma_\bullet^* X_{b\bullet} Y_\bullet\|/B = |W(B)|\rho_{vv}^* \xrightarrow{p} 0. \tag{73}$$

Отметим, что последняя сходимость в (73) вытекает из (71). Наконец, из определений (16) и (72) получаем, что $d^{**} = B^{**}/\sum \gamma_i^* X_{bi} Y_i$ и

$$W^{**} = \frac{\theta^{**} - \theta}{d^{**}} = \frac{\sum \gamma_i^* \epsilon_{ui}}{B^{**}} = \frac{W_\zeta(B) + \rho_u^*}{1 + \rho_{uv}^* + \rho_{uu}^*} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1).$$

При выводе последней сходимости мы использовали (69), (71) и (73).

Теперь теорема доказана полностью. □

5.3. Из леммы 5.9 в [17] при $r = 1$ нетрудно извлечь следующее утверждение.

Лемма 5.4. *Пусть выполнены предположения* 2.2 *и* 1.1, $m > 0$ — *произвольное неслучайное число, а* $\{Z_i\}$ — *некоторые случайные величины. В этом случае справедливо следующее утверждение:*

$$\text{если}\quad \alpha := d_{uc}^m \sum \mathbf{E}|K_{xi}Z_i|^m \to 0, \quad \text{то}\quad \rho := \sum |\delta_i Z_i|^m \xrightarrow{p} 0.$$

Установим теперь справедливость первых соотношений в (66) и (67). Нам потребуется вспомогательная

Лемма 5.5. *Пусть выполнены условия* (22), (24) *и предположения* 1.1, 2.2. *Тогда*

$$\Delta/B \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_\delta := \|\delta_\bullet \epsilon_\bullet\|/B \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_{\delta ab} := \sum |\delta_i \epsilon_{abi}|/B \xrightarrow{p} 0.$$

Доказательство. В силу центральной оценки (61) предложения 5.1 и неравенства $d_{vc} \le d_{uc}/\theta$ имеем $\mathbf{E}|\Delta|/B \le 8(1+2d_{uc}/\theta)\beta_1 \to 0$. Тем самым мы доказали первое утверждение леммы. Второе утверждение вытекает из леммы 5.4 при

$$m = 2, \quad Z_i = \epsilon_i/B, \quad \alpha = d_{uc}^2 \sum \mathbf{E}K_{xi}^2 \mathbf{E}\epsilon_i^2/B^2 = \beta_1^2 \to 0,$$

поскольку в данном случае величины K_{xi} и ϵ_i независимы. Наконец, используя лемму 5.4 еще раз при

$$m = 1, \quad Z_i = \epsilon_{abi}/B, \quad \mathbf{E}|K_{xi}\epsilon_{abi}| \le \|K_{xi}\|_2 \|\epsilon_{abi}\|_2 = K_{oi}\sigma_{abi}, \quad \alpha \le \beta_2 \to 0,$$

приходим к последнему утверждению леммы. $\square$

Лемма 5.6. *Если выполнены условия леммы* 5.5, *то* $\tilde\rho_u \xrightarrow{p} 0$. *Если, кроме того, верно условие* (26), *то* $\tilde\rho_{uu} \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Поскольку $\epsilon_{ui} = \epsilon_i + \epsilon_{abi}$ ввиду (18), то с учетом определений (62) и (66) имеем $B\tilde\rho_u \equiv \sum \delta_i \epsilon_{ui} = \Delta + \sum \delta_i \epsilon_{abi}$ и $|\tilde\rho_u| \le |\Delta|/B + \rho_{\delta ab} \xrightarrow{p} 0$ в силу леммы 5.5. Значит, мы доказали первую сходимость в (66).

При выводе первого соотношения в (67) нам потребуется обозначение

$$\rho'_{uu} := \tilde\rho_{uu} + 1 - \overline{W}_\zeta(B) \equiv \frac{\|\tilde\gamma_\bullet \epsilon_{u\bullet}\| - \|\zeta_\bullet\|}{B} \equiv \frac{\|\zeta_\bullet + \delta_\bullet\epsilon_\bullet + \delta_\bullet\epsilon_{ab\bullet}\| - \|\zeta_\bullet\|}{B}. \tag{74}$$

Отметим, что в (74) мы использовали представление

$$\tilde\gamma_i \epsilon_{ui} - \zeta_i = \tilde\gamma_i \epsilon_{ui} - \gamma_{xi}\epsilon_{ui} = \delta_i \epsilon_{ui} = \delta_i\epsilon_i + \delta_i \epsilon_{abi},$$

которое вытекает из определений (18) и (62). В силу свойств нормы (64) и (65)

$$|\rho'_{uu}| \le \|\delta_\bullet\epsilon_\bullet + \delta_\bullet\epsilon_{ab\bullet}\|/B \le \|\delta_\bullet\epsilon_\bullet\|/B + \|\delta_\bullet\epsilon_{ab\bullet}\|/B \le \rho_\delta + \rho_{\delta ab} \xrightarrow{p} 0.$$

Из этого соотношения, (74) и (26) имеем $\tilde\rho_{uu} \le \rho'_{uu} + |\overline{W}_\zeta(B) - 1| \xrightarrow{p} 0$, что доказывает первую сходимость в (67). $\square$

5.4. В этом пункте докажем вторые соотношения в (66) и (67). Положим

$$\zeta_{vi} := X_{bi}Y_i/A_\gamma, \quad \bar\zeta_{vi} := \zeta_{vi} - b_i y_i/A_\gamma \equiv \zeta_{vi} - \mathbf{E}\zeta_{vi}. \tag{75}$$

Лемма 5.7. *Пусть выполнено условие* (23) *и предположения* 2.2 *и* 1.1. *Тогда*

$$\rho_{v1} := \sum |\delta_i \zeta_{vi}| \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_{v2} := \sum |\rho_{xi}\zeta_{vi}| \xrightarrow{p} 0,$$

$$\rho_{v3} := \sum \gamma_{\theta i}\bar{\zeta}_{vi} \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_{v4} := \|\gamma_{\theta\bullet}\bar{\zeta}_{v\bullet}\| \xrightarrow{p} 0.$$

Доказательство. Первая сходимость следует из леммы 5.4 при $m = 1$, $Z_i = \zeta_{vi}$ и $\alpha \le \alpha_1 \to 0$, поскольку

$$\begin{aligned} A_\gamma \mathbf{E}|K_{xi}\zeta_{vi}| = \mathbf{E}|K_{xi}X_{bi}|\mathbf{E}|Y_i| &\le \|K_{xi}\|_2\|X_{bi}\|_2\|Y_i\|_2 \\ &= \big(K_{oi}^2\big(b_i^2+\sigma_{bi}^2\big)\big(y_i^2+\sigma_{yi}^2\big)\big)^{1/2} \le K_{oi}(b_i+\sigma_{bi})(y_i+\sigma_{yi}). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается вторая сходимость:

$$\mathbf{E}\rho_{v2} \le \sum \|\rho_{xi}\|_2\|\zeta_{vi}\|_2 = \sum \frac{\rho_{oi}\|X_{bi}\|_2\|Y_i\|_2}{A_\gamma} \le \sum \frac{\rho_{oi}(b_i+\sigma_{bi})(y_i+\sigma_{yi})}{A_\gamma} \le \alpha_1 \to 0.$$

Наконец, поскольку $\mathbf{E}\bar{\zeta}_{vi} = 0$ ввиду (75), то

$$\mathbf{E}\rho_{v3}^2 = \mathbf{D}\rho_{v3} = \sum \gamma_{\theta i}^2 \mathbf{E}\bar{\zeta}_{vi}^2 = \mathbf{E}\rho_{v4}^2 = \sum \gamma_{\theta i}^2 \mathbf{D}(X_{bi}Y_i)/A_\gamma^2 = \alpha_2^2 \to 0,$$

что доказывает два последних утверждения леммы. $\square$

Лемма 5.8. *Если выполнены условия леммы* 5.7, *то* $\tilde{\rho}_v \xrightarrow{p} 0$. *Если, кроме того, верно условие* (25), *то* $\tilde{\rho}_{vv} \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Из определений (19), (62) и (75) вытекает представление $\tilde{\gamma}_i X_{bi} Y_i / A_\gamma = \tilde{\gamma}_i \zeta_{vi} = \gamma_{\theta i} b_i y_i / A_\gamma + \delta_i \zeta_{vi} + \rho_{xi}\zeta_{vi} + \gamma_{\theta i}\bar{\zeta}_{vi}$. Следовательно, учитывая определения из (9), (66) и (67), имеем

$$|\tilde{\rho}_v| = \Big|\sum \tilde{\gamma}_i\zeta_{vi} - 1\Big| = \Big|\sum \tilde{\gamma}_i\zeta_{vi} - \sum \gamma_{\theta i} b_i y_i / A_\gamma\Big| \le \rho_{v1} + \rho_{v2} + |\rho_{v3}| \xrightarrow{p} 0,$$

$$\tilde{\rho}_{vv} = \|\gamma_{\theta i} b_i y_i + \delta_i\zeta_{vi} + \rho_{xi}\zeta_{vi} + \gamma_{\theta i}\bar{\zeta}_{vi}\|/A_\gamma \le \alpha_3 + \rho_{v1} + \rho_{v2} + \rho_{v4} \xrightarrow{p} 0.$$

При выводе последнего неравенства мы использовали еще условие (25). $\square$

§ 6. Условие Линдеберга и вывод утверждений § 2

6.1. При проверке условий об асимптотической нормальности мы часто используем классическое условие Линдеберга. Для удобства читателя в этом пункте мы приведем сведения об этом условии, которые мы будем неоднократно использовать в доказательствах.

Определение 6.1. Будем говорить, что случайные величины $\{\eta_i = \eta_i^{(n)}\}$, где $i = 1, \dots, n$ и $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют *условию Линдеберга*, если при каждом n величины $\{\eta_1^{(n)}, \dots, \eta_n^{(n)}\}$ независимы в совокупности,

$$\forall i \quad \mathbf{E}\eta_i^{(n)} = 0, \quad \mathbf{D}\eta_i^{(n)} < \infty, \quad \sum \mathbf{D}\eta_i^{(n)} > 0 \quad \text{начиная с некоторого} \quad n,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \Lambda(\varepsilon, \eta_\bullet^{(n)}) := \sum \mathbf{E}\left\{\big(\eta_i^{(n)}\big)^2;\ \big(\eta_i^{(n)}\big)^2 > \varepsilon^2 \sum \mathbf{D}\eta_i^{(n)}\right\} \Big/ \sum \mathbf{D}\eta_i^{(n)} \to 0.$$

Нам потребуется также следующее известное свойство условия Линдеберга.

Лемма 6.2. *Если случайные величины $\{\eta_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, то*

$$\sum \eta_i \Big/ \sqrt{\sum \mathbf{D}\eta_i} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \textit{и} \quad \sum \eta_i^2 \Big/ \sum \mathbf{D}\eta_i \xrightarrow{p} 1.$$

Первая сходимость в этом утверждении справедлива в силу центральной предельной теоремы Линдеберга — Феллера. Вторая сходимость является частным случаем закона больших чисел для схемы серий $\big(\eta_i^2 - \mathbf{D}\eta_i\big)\big/\sum \mathbf{D}\eta_i$. Доказательство леммы 6.2 и подробные комментарии об условии Линдеберга можно найти, например, в [18, гл. 8].

При изучении сходимости к нормальному распределению нам также будет полезным следующее простое утверждение.

Лемма 6.3. *Если $a \xrightarrow{p} 0$, $b \xrightarrow{p} 1$ и $Z \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, то $a + bZ \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$. В дополнение если $Z \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ и $a+bZ \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ при $b > 0$, причем величины $b > 0$ и a неслучайны, то с необходимостью $a \to 0$ и $b \to 1$.*

В этой лемме первое утверждение очевидно, а второе доказано, например, в [19, п. 13.2].

6.2. Доказательство предложения 2.9. Пусть $\eta_i = c_i\epsilon_{ui}$. В этом случае $\sum \mathbf{D}\eta_i = \sum c_i^2 \mathbf{D}\epsilon_{ui} \equiv B_{uc}^2$ ввиду (22). Используя представления (20) и (37) и применяя неравенство Коши — Буняковского, нетрудно убедиться, что

$$\frac{\epsilon_{ui}^2}{\mathbf{D}\epsilon_{ui}} \equiv \frac{(\sigma_{ai}\xi_{ai} - (1+b_i\theta)\sigma_{yi}\xi_{yi} - \theta y_i\sigma_{bi}\xi_{bi} - \theta\sigma_{yi}\sigma_{bi}\xi_{yi}\xi_{bi})^2}{\sigma_{ai}^2 + (1+b_i\theta)^2\sigma_{yi}^2 + \theta^2 y_i^2\sigma_{bi}^2 + \theta^2\sigma_{yi}^2\sigma_{bi}^2} \le \xi_i^2$$
$$:= \xi_{ai}^2 + \xi_{yi}^2 + \xi_{bi}^2 + \xi_{yi}^2\xi_{bi}^2,$$

где $\mathbf{E}\xi_1^2 = 4 < \infty$ ввиду предположения 1.2. Значит, при $\sigma_{ci}^2 := c_i^2\mathbf{D}\epsilon_{ui}/B_{uc}^2$

$$\Lambda(\varepsilon, c_\bullet\epsilon_{u\bullet}) = \sum \mathbf{E}\big\{c_i^2\epsilon_{ui}^2; c_i^2\epsilon_{ui}^2/B_{uc}^2 > \varepsilon^2\big\}/B_{uc}^2 = \sum \mathbf{E}\big\{\sigma_{ci}^2\xi_i^2; \sigma_{ci}^2\xi_i^2 > \varepsilon^2\big\}$$
$$\le \sum \sigma_{ci}^2 \mathbf{E}\big\{\xi_i^2; \big(\max_i \sigma_{ci}^2\big)\xi_i^2 > \varepsilon^2\big\} = \mathbf{E}\big\{\xi_1^2; \xi_1^2 > \varepsilon^2/\max_i \sigma_{ci}^2\big\} \to 0,$$

поскольку $\sum \sigma_{ci}^2 = 1$ и $\max_i \sigma_{ci}^2 \equiv \lambda(c_\bullet\epsilon_{u\bullet}) \to 0$, так что $\varepsilon^2/\max_i \sigma_{ci}^2 \to \infty$.

Таким образом, мы доказали, что при сделанных в предложении 2.9 ограничениях случайные величины $\eta_i = c_i\epsilon_{ui}$ удовлетворяют условию Линдеберга. Утверждение предложения 2.9 при $\eta_i = c_i\epsilon_i$ следует из приведенного доказательства, если в последнем положить $\epsilon_{ai} = \epsilon_{bi} = 0$. Непосредственное доказательство этого факта можно найти также в [8]. Заменяя теперь в проведенных выше рассуждениях величины $\{c_i\}$ на $\{\gamma_{\theta i}\}$, получим два оставшихся утверждения предложения 2.9. $\square$

6.3. В этом пункте выведем следствие 3. Нам понадобится

Лемма 6.4. *Пусть случайные величины $\{\zeta_i - \mathbf{E}\zeta_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга и $B = B_\zeta$. Тогда условие $\Delta_0(B_\zeta) \to 0$ необходимо и достаточно для сходимости* (27). *Кроме того, в этом случае условие $\beta_3 \to 0$ достаточно для справедливости* (26).

Доказательство. Из леммы 6.2 при $\eta_i = \zeta_i - \mathbf{E}\zeta_i$ вытекает, что имеют место следующие две сходимости:

$$W_0 := \sum(\zeta_i - \mathbf{E}\zeta_i)/B_\zeta \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad \overline{W}_0 := \|\zeta_\bullet - \mathbf{E}\zeta_\bullet\|/B_\zeta \xrightarrow{p} 1. \tag{76}$$

Однако $W_\zeta(B_\zeta) = \Delta_0(B_\zeta) + W_0$ ввиду (27) и (28). Следовательно, в силу леммы 6.3 сходимости $W_0 \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ и $W_\zeta(B_\zeta) = \Delta_0(B_\zeta) + W_0 \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ могут иметь место одновременно тогда и только тогда, когда $\Delta_0(B_\zeta) \to 0$.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Из второго свойства нормы в (64) имеем

$$|\overline{W}_\zeta(B_\zeta) - \overline{W}_0| \equiv |\|\zeta_\bullet\| - \|\zeta_\bullet - \mathbf{E}\zeta_\bullet\||/B_\zeta \le \|\mathbf{E}\zeta_\bullet\|/B_\zeta = \beta_3 \to 0. \tag{77}$$

Таким образом, из (76) и (77) вытекает нужная нам сходимость $\overline{W}_\zeta(B_\zeta) \xrightarrow{p} 1$. $\square$

Доказательство следствия 3. Утверждение (А$'$) немедленно вытекает из первых утверждений теоремы и леммы 6.4, поскольку предположение 2.5 следствия 3 включает в себя предположение 2.3 теоремы при $B = B_\zeta$. Аналогично утверждение (Б) следует из вторых утверждений теоремы и леммы 6.4, так как (29) включает в себя условия (25) и требование $\Delta_0(B_\zeta) \to 0$.

Заметим теперь, что $W(B) = (B_\zeta/B)W(B_\zeta)$ ввиду (15), причем $B_\zeta/B > 0$. Значит, ввиду леммы 6.3 сходимости $W(B) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ и $W(B_\zeta) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ одновременно могут быть справедливыми тогда и только тогда, когда выполнено второе условие в (28). Таким образом, сходимость (15) имеет место в том и только в том случае, когда $\Delta_0(B_\zeta) \to 0$ и одновременно $B_\zeta/B \to 0$. Но при последнем предположении условие $\Delta_0(B_\zeta) \to 0$ можно переписать в эквивалентном виде, как первое ограничение в (28). $\square$

6.4. В этом пункте докажем ряд вспомогательных утверждений, которые необходимы для вывода следствия 4.

Лемма 6.5. *Если выполнено предположение* (2.7), *то*

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma 1} &:= \sum \gamma_{\theta i}\epsilon_{abi}/B_\gamma \xrightarrow{p} 0, \quad \overline{\Delta}_{\gamma 1} := \|\gamma_{\theta\bullet}\epsilon_{ab\bullet}\|/B_\gamma \xrightarrow{p} 0, \\ \Delta_{\gamma 2} &:= \sum \rho_{xi}\epsilon_i/B_\gamma \xrightarrow{p} 0, \quad \overline{\Delta}_{\gamma 2} := \|\rho_{x\bullet}\epsilon_\bullet\|/B_\gamma \xrightarrow{p} 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Если к тому же справедливо условие (34), *то*

$$\Delta_{\gamma 3} := \sum \rho_{xi}\epsilon_{abi}/B_\gamma \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad \overline{\Delta}_{\gamma 3} := \|\rho_{x\bullet}\epsilon_{ab\bullet}\|/B_\gamma \xrightarrow{p} 0. \tag{79}$$

Доказательство. Из свойств сумм независимых случайных величин с нулевыми средними и определений (33) и (78) имеем

$$\mathbf{E}\Delta_{\gamma 1}^2 = \mathbf{D}\Delta_{\gamma 1} = \sum \mathbf{D}(\gamma_{\theta i}\epsilon_{abi}/B_\gamma) = \sum \mathbf{E}(\gamma_{\theta i}\epsilon_{abi})^2/B_\gamma^2 = \mathbf{E}\overline{\Delta}_{\gamma 1}^2 = \beta_{\gamma 1}^2 \to 0,$$

$$\mathbf{E}\Delta_{\gamma 2}^2 = \mathbf{D}\Delta_{\gamma 2} = \sum \mathbf{D}(\rho_{xi}\epsilon_i/B_\gamma) = \sum \mathbf{E}(\rho_{xi}\epsilon_i)^2/B_\gamma^2 = \mathbf{E}\overline{\Delta}_{\gamma 2}^2 = \beta_{\gamma 2}^2 \to 0.$$

Из этих соотношений и неравенства Чебышева следуют все утверждения из (78).

Далее, $|\Delta_{\gamma 3}| \le \Delta_{\gamma 0} := \sum |\rho_{xi}\epsilon_{abi}|/B_\gamma$ и $\overline{\Delta}_{\gamma 3} \le \Delta_{\gamma 0}$ в силу определений (34). Но

$$\mathbf{E}\Delta_{\gamma 0} = \sum \mathbf{E}|\rho_{xi}\epsilon_{abi}|/B_\gamma \le \sum \|\rho_{xi}\|_2\|\epsilon_{abi}\|_2/B_\gamma = \sum \rho_{oi}\sigma_{abi}/B_\gamma \equiv \beta_{\gamma 0} \to 0,$$

если выполнено (34). $\square$

Ключевыми в доказательстве следствия 4 будут представления

$$\zeta_i = \gamma_{\theta i}\epsilon_i + \gamma_{\theta i}\epsilon_{abi} + \rho_{xi}\epsilon_i + \rho_{xi}\epsilon_{abi}, \quad W_\zeta(B_\gamma) = W_\gamma + \Delta_{\gamma 1} + \Delta_{\gamma 2} + \Delta_{\gamma 3}, \tag{80}$$

которые вытекают из определений (18), (19), (27), (78) и (79), а также из приводимого ниже определения (81).

Лемма 6.6. *Пусть справедливо предположение* 2.7. *Тогда*

$$W_\gamma := \sum \gamma_{\theta i}\epsilon_i / B_\gamma \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad \overline{W}_\gamma := \|\gamma_{\theta\bullet}\epsilon_\bullet\|/B_\gamma \xrightarrow{p} 1. \tag{81}$$

Если, кроме того, верно условие (34), *то в этом случае имеют место сходимости* (27) *и* (26) *при* $B = B_\gamma$.

Доказательство. Сходимости (81) следуют из леммы 6.2 при $\eta_i = \gamma_{\theta i}\epsilon_i$, так как $B_\gamma^2 \equiv \sum \gamma_{\theta i}^2 \sigma_i^2 = \sum \mathbf{D}\gamma_{\theta i}\epsilon_i$ в силу определений (9) и (37). Но из (80) и леммы 6.5 получаем, что $W_\zeta(B_\gamma) - W_\gamma \xrightarrow{p} 0$, а значит, $W_\zeta(B_\gamma) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, что доказывает (27).

Далее, из (78)–(80) с учетом свойств норм из (64) имеем

$$\begin{aligned} |\overline{W}_\zeta(B_\gamma) - \overline{W}_\gamma| &\equiv |\|\zeta_\bullet\| - \|\gamma_{\theta\bullet}\epsilon_\bullet\||/B_\gamma \le \|\zeta_\bullet - \gamma_{\theta\bullet}\epsilon_\bullet\|/B_\gamma \\ &= \|\gamma_{\theta\bullet}\epsilon_{ab\bullet} + \rho_{x\bullet}\epsilon_\bullet + \rho_{x\bullet}\epsilon_{ab\bullet}\|/B_\gamma \le \overline{\Delta}_{\gamma 1} + \overline{\Delta}_{\gamma 2} + \overline{\Delta}_{\gamma 3} \xrightarrow{p} 0. \end{aligned} \tag{82}$$

Таким образом, из (82) и второй сходимости в (81) вытекает (26). □

6.5. Доказательство следствия 4. Заметим прежде всего, что предположение 2.7 влечет справедливость предположения 2.3 при $B = B_\gamma$ и что условия (27) и (26) мы уже проверили в лемме 6.6. Таким образом, утверждение (A) следствия 4 немедленно вытекает из первого утверждения теоремы, а утверждение (Б) этого следствия — из второго утверждения теоремы и условия $\alpha_3 \to 0$.

Далее, из (78), (80) и первой сходимости в (81) имеем

$$W_\gamma \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \quad W_\zeta(B_\gamma) - W_\gamma - \Delta_0(B_\gamma) = \Delta_{\gamma 1} + \Delta_{\gamma 2} + \Delta_{\rho\epsilon} \xrightarrow{p} 0, \tag{83}$$

поскольку $\Delta_{\gamma 3} = \Delta_{\rho\epsilon} + \Delta_0(B_\gamma)$ ввиду (28), (35), (38) и (79). Таким образом, из (83) получаем, что условие $W_\zeta(B_\gamma) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ верно тогда и только тогда, когда сходимость $W_\gamma \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ имеет место одновременно со сходимостью $W_\gamma + \Delta_0(B_\gamma) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Но для этого факта условие $\Delta_0(B_\gamma) \to 0$ является необходимым и достаточным в силу леммы 6.3.

Тем самым мы доказали утверждение (B) следствия 4. □

§ 7. Доказательства результатов § 3

7.1. В этом пункте мы докажем три нужные нам далее технические леммы. Мы ниже часто будем использовать обозначения

$$\begin{gathered} X_{ai}(\lambda) := a_i + \lambda\epsilon_{ai}, \quad X_{bi}(\lambda) := b_i + \lambda\epsilon_{bi} = \lambda X_{bi} + (1-\lambda)b_i, \\ X_i(\lambda) = (1 + |X_{bi}(\lambda)|)|\epsilon_{ai}| + (1 + |X_{ai}(\lambda)|)|\epsilon_{bi}|, \quad X_i := \max_{0\le\lambda\le 1} X_i(\lambda). \end{gathered} \tag{84}$$

Лемма 7.1. *Если выполнено предположение* 3.1, *то* $|\rho_{xi}| \le C_\gamma X_i$. *Если, кроме того, верно предположение* 3.3, *то* $|\rho_{xabi}| \le C_{ab} X_i^2$.

Доказательство. Используя формулу Тейлора, определение (19) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \rho_{xi} = f_i(1) - f_i(0) = \int_0^1 f_i'(\lambda)d\lambda \quad \text{при } f_i(\lambda) = \gamma_i(\theta, X_{ai}(\lambda), X_{bi}(\lambda)), \\ f_i'(\lambda) = \gamma_{ai}'(\theta, X_{ai}(\lambda), X_{bi}(\lambda))\epsilon_{ai} + \gamma_{bi}'(\theta, X_{ai}(\lambda), X_{bi}(\lambda))\epsilon_{bi} \end{gathered} \tag{85}$$

в случаях, когда все эти производные существуют. Из предположения 1.3 находим, что $|f_i'(\lambda)| \le C_\gamma X_i(\lambda) \le C_\gamma X_i$. Подставляя эту оценку в (85), получаем первое утверждение леммы.

Аналогично из определения (31) и формулы Тейлора имеем

$$\rho_{xabi} = f_i(1) - f_i(0) - f_i'(0) = \int\limits_0^1 (1-\lambda) f_i''(\lambda)\,d\lambda$$

при

$$f_i''(\lambda) = \gamma_{ai}''(\theta, X_{ai}(\lambda), X_{bi}(\lambda))\epsilon_{ai}^2 + 2\gamma_{abi}''(\theta, X_{ai}(\lambda), X_{bi}(\lambda))\epsilon_{ai}\epsilon_{bi} + \gamma_{bi}''(\theta, X_{ai}(\lambda), X_{bi}(\lambda))\epsilon_{bi}^2.$$

Из предположения 3.3 нетрудно получить, что $|f_i''(\lambda)| \le C_{ab} X_i^2(\lambda) \le C_{ab} X_i^2$. Тем самым мы доказали и второе утверждение леммы. $\square$

Лемма 7.2. *Пусть выполнены предположение* 1.1 *и условие* (4). *Тогда*

$$\mu_i(p,q) := \mathbf{E}\big(X_i^p |\epsilon_{abi}|^q\big) \le C_1(\mathbf{E}|\epsilon_{ai}|^{p+q} + \mathbf{E}|\epsilon_{bi}|^{p+q}) \quad \text{при } 0 \le p, q \le 2, \tag{86}$$

где положительная постоянная C_1 зависит только от константы C из (4).

Доказательство. Из (4) и (84) немедленно получаем

$$X_i(\lambda) \le (1 + b_i + \lambda|\epsilon_{bi}|)|\epsilon_{ai}| + (1 + a_i + \lambda|\epsilon_{ai}|)|\epsilon_{bi}| \le C_2(|\epsilon_{ai}| + |\epsilon_{bi}| + |\epsilon_{ai}||\epsilon_{bi}|)$$

при $C_2 = 2 + 2C$. Следовательно,

$$X_i^p \le 3^p C_2^p (|\epsilon_{ai}|^p + |\epsilon_{bi}|^p + |\epsilon_{ai}|^p|\epsilon_{bi}|^p) \quad \text{при } p \ge 0. \tag{87}$$

Далее, $|\epsilon_{abi}| \le |\epsilon_{ai}| + \theta|Y_i||\epsilon_{bi}|$ ввиду (18), а потому

$$|\epsilon_{abi}|^q \le (1 + \theta^q|Y_i|^q)(|\epsilon_{ai}|^q + |\epsilon_{bi}|^q) \quad \text{при } q \ge 0. \tag{88}$$

Так как $|\epsilon_{ai}|^p|\epsilon_{bi}|^q + |\epsilon_{ai}|^q|\epsilon_{bi}|^p \le 2|\epsilon_{ai}|^{p+q} + 2|\epsilon_{bi}|^{p+q}$, то, перемножая (87) и (88), имеем

$$X_i^p|\epsilon_{abi}|^q \le 3^p C_2^p (1 + \theta^q|Y_i|^q)(3|\epsilon_{ai}|^{p+q} + 3|\epsilon_{bi}|^{p+q} + |\epsilon_{ai}|^{p+q}|\epsilon_{bi}|^p + |\epsilon_{ai}|^p|\epsilon_{bi}|^{p+q}). \tag{89}$$

Взяв теперь математические ожидания от обеих частей в (89) получим (86), если заметим, что случайные величины Y_i, ϵ_{ai} и ϵ_{bi} независимы в совокупности и

$$\theta^q \le C^q,\ \mathbf{E}|Y_i|^q \le \big(y_i^2 + \sigma_{yi}^2\big)^{q/2} \le (2C^2)^{q/2},\ \mathbf{E}|\epsilon_{ai}|^p \le \sigma_{ai}^p \le C^p,\ \mathbf{E}|\epsilon_{bi}|^p \le \sigma_{bi}^p \le C^p$$

при $0 \le p, q \le 2$ в силу условия (4). $\square$

Лемма 7.3. *Пусть выполнено предположение* 3.1. *Тогда*

$$\sum\big(\rho_{oi}^2 + \sigma_{abi}^2\big) \le C_1\big(C_\gamma^2 + 1\big)\sum\big(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\big), \quad \mu_{\rho\epsilon}(r/2, \sqrt{n}) \le C_1(2C_\gamma)^{r/2}\mu(r) \tag{90}$$

при $2 \le r \le 4$. Если, кроме того, верно предположение 3.3, *то в этом случае $|\Delta_{ab}(\sqrt{n})| \le C_1 C_{ab}\mu_0$.*

Доказательство. Из определений (18) и (19) и лемм 7.1 и 7.2 имеем

$$\sigma_{abi}^2 = \mathbf{E}\epsilon_{abi}^2 = \mu_i(0,2) \quad \text{и} \quad \rho_{0i}^2 = \mathbf{E}\rho_{xi}^2 \le C_\gamma^2 \mathbf{E}X_i^2 = C_\gamma^2 \mu_i(2,0).$$

Суммируя эти неравенства, получим первую оценку в (90).

Аналогично $|\mathbf{E}\rho_{xabi}\epsilon_{abi}| \le C_{ab}\mathbf{E}\big(X_i^2|\epsilon_{abi}|\big) = C_{ab}\mu_i(2,1)$, откуда следует последнее утверждение леммы, если мы учтем определения (32) и (41).

Наконец, при $Z_i := \rho_{xi}\epsilon_{abi}$ и $1 \le q \le 2$ имеем

$$\mathbf{E}|Z_i - \mathbf{E}Z_i|^q \le 2^q\mathbf{E}|Z_i|^q \le 2^q C_\gamma^q \mathbf{E}\big(X_i^q|\epsilon_{abi}|^q\big) = 2^q C_\gamma^q \mu_i(q,q).$$

Из этого факта при $q = r/2$ с учетом определений (36) и (40) вытекает вторая оценка в (90). $\square$

7.2. При выводе следствий 5 и 6 будем использовать следующие утверждения.

Лемма 7.4. *Если выполнено предположение* 3.1, *то*

$$(d_{uc}/\theta)^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\beta_1^2=O(1/n),\quad \beta_{\gamma 1}^2+\beta_{\gamma 2}^2+\beta_2^2=O\big(\bar\sigma_a^2+\bar\sigma_b^2\big),$$

$$\alpha_1^2=O\big(1/n\big)+O\big(\bar\sigma_a^2+\bar\sigma_b^2\big),\quad \beta_{\gamma 0}=O\big(\bar\sigma_a^2+\bar\sigma_b^2\big)/\sqrt{n}.$$

В частности, справедливы все условия из предположения 2.7.

Доказательство. Все утверждения леммы очевидным образом следуют из определений (23)–(25), (33), (34) и (36), если мы воспользуемся оценками из леммы 7.3, условием (4) и ограничениями, входящими в состав предположения 1.3. Небольшую сложность представит только оценивание величин α_1^2 и β_2^2, когда нам придется использовать неравенство $\big(\sum\sqrt{\sigma_{ai}^2+\sigma_{bi}^2}/n\big)^2\le\sum\big(\sigma_{ai}^2+\sigma_{bi}^2\big)/n$. $\square$

Доказательство следствия 5. Это утверждение является частным случаем пп. (А) и (Б) следствия 4, поскольку предположение 2.7 и условие (34) справедливы в силу леммы 7.4. $\square$

Доказательство следствия 6. Утверждение (А) вытекает из п. (В) следствия 4, так как справедливость предположения 2.7 и условия (34) следуют из лемм 7.3 и 7.4.

Поскольку условие $\mu_0\to 0$ жестче, чем (40) при $r=3$, то утверждение (Б) получается из (А) и предложения 2.6, справедливость условий которого вытекают из неравенства $|\Delta_{ab}(\sqrt{n})|\le C_1C_{ab}\mu_0$, доказанного в лемме 7.3. Утверждение (В) следствия является очевидным частным случаем п. (Б), если заметить, что

$$\Delta_{00}(\sqrt{n})\ge\Big(\inf_{n,i}\gamma'_{ai}(\theta,a_i,b_i)\sum\sigma_{ai}^2+\inf_{n,i}\theta y_i(-\gamma'_{bi}(\theta,a_i,b_i))\sum\sigma_{bi}^2\Big)\Big/\sqrt{n}.\quad\square$$

7.3. При выводе следствия 7 нам потребуется

Лемма 7.5. *Если выполнено предположение* 3.4, *то*

$$\gamma'_{ai}(\theta,a,b)=\frac{b}{f^k(b)},\ \gamma'_{bi}(\theta,a,b)=a\frac{1-(k-1)b\theta}{f^{k+1}(b)},\ \Delta_{ai}:=\mathbf{E}\big(\gamma_{xi}\epsilon_{ai}\big)=\mathbf{E}\frac{X_{bi}\sigma_{ai}^2}{f^k(X_{bi})},\tag{91}$$

$$\Delta_{bi}:=-\mathbf{E}\big(\gamma_{xi}\epsilon_{bi}\big)=-a_i\mathbf{E}\frac{X_{bi}\epsilon_{bi}}{f^k(X_{bi})}=a_i\mathbf{E}\int_0^1\epsilon_{bi}^2\frac{(k-1)\theta X_{bi}(\lambda)-1}{f^{k+1}(X_{bi}(\lambda))}\,d\lambda\tag{92}$$

при $f(x)=1+\theta x$. *Кроме того,*

$$\mathbf{E}\max_{t\ge\theta/2}(\gamma'_{ti}(t,X_{ai},X_{bi}))^2\le 2^4C^4/c^2,\quad c^2/(1+C^2)^k\le\gamma_{\theta i}\le C^2,\tag{93}$$

$$\forall\, b>0\quad \frac{|\gamma'_{ai}(\theta,a,b)|}{1+b}\le 1,\quad \frac{|\gamma'_{bi}(\theta,a,b)|}{1+|a|}\le k+1,\quad \frac{|\gamma''_{bi}(\theta,a,b)|}{1+a^2}\le 2Ck(k+1).\tag{94}$$

В частности, верны все условия предположений 1.3, 3.3 *и равенство* (46).

Доказательство. Все равенства в (91) являются очевидными следствиями определения (43), а из них немедленно вытекают первые две оценки в (4), поскольку $f^{k+1}(b)\ge 1$. Второе соотношение в (93) немедленно получается из (4) и явного вида (44) величин $\gamma_{\theta i}$. Далее, из (43) вытекают равенства

$$\gamma'_{ti}(t,X_{ai},X_{bi})=-\frac{kX_{ai}X_{bi}^2}{(1+tX_{bi})^{k+1}},\quad \gamma''_{bi}(\theta,a,b)=ak\theta\bigg(\frac{k-1}{f^{k+1}(b)}-\frac{k+1}{f^{k+2}(b)}\bigg),\tag{95}$$

если заметить, что $\gamma_i(\theta, a, b) = ab/f^k(b) = a(f^{1-k}(b) - f^{-k}(b))/\theta$.

В силу ограничений (4) справедливы следующие оценки:

$$\mathbf{E}\big(X_{ai}^2 X_{bi}^2\big) = \big(a_i^2 + \sigma_{ai}^2\big)\big(b_i^2 + \sigma_{bi}^2\big) \le (C^2 + C^2)^2 = 2^2 C^4,\ 1/\theta \le 1/c,\ \theta \le C. \quad (96)$$

В частности, последняя оценка в (94) следует из последних соотношений в (95) и (96). Из остальных соотношений в формулах (96) вытекает первая оценка в (93), поскольку $|\gamma_{ti}'(t, X_{ai}, X_{bi})| \le k|X_{ai}|X_{bi}^2/(1 + tX_{bi}) \le k|X_{ai}|X_{bi}/t$.

Наконец, представление (92) получается при $g(x) := -\gamma_i(\theta, a_i, x)$ из равенства

$$\Delta_{bi} = \mathbf{E}(g(X_{bi})\epsilon_{bi}) = \mathbf{E}((g(b_i + \epsilon_{bi}) - g(b_i))\epsilon_{bi}) = \mathbf{E}\int_0^1 \epsilon_{bi}^2 g'(b_i + \lambda\epsilon_{bi})\,d\lambda. \quad \square$$

7.4. Доказательство следствия 7. Из равенств (38), (28), (91) и (92) нетрудно извлечь, что

$$\Delta_0(\sqrt{n}) = \sum \Delta_{ai}/\sqrt{n} + \theta \sum y_i \Delta_{bi}/\sqrt{n}, \quad (97)$$

т. е. (45) действительно является частным случаем условия $\Delta_0(\sqrt{n}) \to 0$. Из этого факта и леммы 7.5 получаем, что утверждения (Б)–(Г) доказываемого следствия являются очевидными частными случаями пп. (А)–(В) следствия 6 соответственно. Утверждение (А) аналогичным образом вытекает из следствия 5.

Докажем теперь утверждения из (Д). Достаточность условия (11) для сходимости (10) доказана в утверждении (А) при более слабых ограничениях. В утверждении (Б) установлено, что для сходимости (10) необходимым является условие (45). Значит осталось лишь проверить, что (45) влечет (11) в случае, когда выполнены условия утверждения (Д). Этот факт вытекает из следующего утверждения.

Лемма 7.6. *Если выполнены все условия утверждения* (Д) *следствия* 7, *то*

$$\sum \sigma_{ai}^2/\sqrt{n} + \sum \sigma_{bi}^2/\sqrt{n} = O(\Delta_0(\sqrt{n})).$$

Доказательство. Поскольку распределение величины ξ_{b1} фиксировано, причем $\mathbf{E}\xi_{b1} = 0$ и $\mathbf{E}\xi_{b1}^2 = 1$, то найдется число $C_+ < \infty$ такое, что

$$\bar{c}_1 := \mathbf{P}(0 \le \xi_{b1} \le C_+) > 0 \quad \text{и} \quad \bar{c}_2 := \mathbf{E}\{0 \le \xi_{b1} \le C_+\} > 0. \quad (98)$$

Значит, в силу (4)

$$1 \le f(X_{bi}(\lambda)) = 1 + \theta(b_i + \lambda\sigma_{bi}\xi_{bi}) \le C_0 := 1 + C(C + CC_+) \quad \text{при } \xi_{bi} \le C_+. \quad (99)$$

Если теперь выполнены условия утверждения (Д), то

$$(k-1)\theta X_{bi}(\lambda) - 1 \ge \lambda 1 + (1-\lambda)(1+\bar{c}) - 1 = (1-\lambda)\bar{c}.$$

Таким образом, подынтегральная функция в (92) неотрицательна, а потому ее можно оценить снизу, используя установленные выше неравенства. В итоге получаем

$$\Delta_{bi} \ge a_i \mathbf{E}\left\{\int_0^1 \sigma_{bi}^2 \xi_{bi}^2 \frac{(1-\lambda)\bar{c}}{C_0^{k+1}} d\lambda : 0 \le \xi_{bi} \le C_+\right\} = a_i \sigma_{bi}^2 \frac{\bar{c}}{2C_0^{k+1}} \bar{c}_2. \quad (100)$$

Аналогично из (98) и (99) находим

$$\Delta_{ai} = \sigma_{ai}^2 \mathbf{E}((b_i+\epsilon_{bi})/f^k(b_i+\epsilon_{bi})) \geq \sigma_{ai}^2 \mathbf{E}\{b_i/C_0^k : 0 \leq \xi_{bi}\} = \sigma_{ai}^2 \bigl(b_i/C_0^k\bigr)\bar{c}_1. \quad (101)$$

Поскольку $a_i \geq c$ и $a_i\theta y_i = a_i^2\theta/f(b_i) \geq c^3/C_0$ в силу (4), то, складывая (100) и (101), имеем

$$\Delta_{ai} + \theta y_i \Delta_{bi} \geq \bar{c}_3\bigl(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\bigr) \quad \text{при } \bar{c}_3 := C_0^{-k}\min\bigl\{c\bar{c}_1, c^3\bar{c}\bar{c}_2/\bigl(2C_0^2\bigr)\bigr\} > 0.$$

Из этого соотношения и (97) вытекает искомое утверждение леммы. □

§ 8. Доказательства результатов § 4 и § 1

8.1. В этом пункте мы докажем все утверждения, касающиеся свойств оценок θ^*. Но сначала рассмотрим специальный случай оценок θ^{**}, которые построены по функциям $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot) = \gamma_{\theta i}\}$, вообще не зависящим от своих аргументов. Ясно, что в этом случае $\zeta_i = \gamma_{\theta i}\epsilon_{ui}$ и $\mathbf{E}\zeta_i = K_{xi} = K_{oi} = \rho_{xi} = \rho_{oi} = \alpha_1 = \Delta_0(\cdot) = \beta_1 = \beta_2 = 0$. Поскольку такая оценка θ^{**} не зависит от θ^*, то при ее применении у нас нет необходимости проверять условие (22). Таким образом, от предположения 2.3 осталось лишь требование $\alpha_2 \to 0$, а от условий (29) — только ограничение $\alpha_3 \to 0$.

Положим $c_i := \gamma_{\theta i} = \gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)$. В этих обозначениях с учетом сказанного выше предположение 2.5 перепишется в виде предположения 4.1, а утверждения (А$'$) и (Б) следствия 3 превратятся в утверждения (А) и (Б) следствия 8. Далее, в этом случае утверждение (А) следствия 3 при $B = B_\gamma$ станет утверждением (В) следствия 8, а пп. (А), (Б) следствия 4 перепишутся в виде следствия 9.

Таким образом, мы доказали все утверждения п. 4.1.

Доказательство предложения 4.4. Из представления (55) величины θ^* вытекает, что

$$\mathbf{P}(|\theta^*-\theta| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(V < -1/2) + \mathbf{P}(|U| > \varepsilon/2) \leq \mathbf{E}V^2/(1/2)^2) + \mathbf{E}U^2/(\varepsilon/2)^2,$$

а потому ввиду соотношений $\mathbf{E}U^2 = d_{uc}^2$ и $\mathbf{E}V^2 = d_{vc}^2$ имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(|\theta^*-\theta| > \varepsilon) \leq 4d_{vc}^2 + 4d_{uc}^2/\varepsilon^2. \quad (102)$$

Первое утверждение предложения немедленно следует из неравенства (102). Опять используя это неравенство, а также оценку $d_{vc} \leq d_{uc}/\theta$, имеем

$$\mathbf{P}(|\theta^*/\theta - 1| > \epsilon) = \mathbf{P}(|\theta^*-\theta| > \theta\epsilon) \leq 4d_{vc}^2 + 4d_{uc}^2/(\theta\epsilon)^2 \leq 4d_{uc}^2/\theta^2 + 4d_{uc}^2/(\theta\epsilon)^2.$$

Из этого соотношения и условия (22) вытекает второе утверждение предложения 4.4. □

8.2. В этом пункте докажем предложение 4.10. Положим

$$\bar{a}_i(T) := \frac{X_{ai} + TwY_i}{1+w}, \quad L_1(T, a_\bullet) := T\sum\Bigl(Y_i - \frac{a_i}{T}\Bigr)^2 + \sum\frac{(X_{ai}-a_i)^2}{wT} \quad (103)$$

и заметим, что

$$TY_i - \bar{a}_i(T) = (TY_i - X_{ai})/(1+w) = (\bar{a}_i(T) - X_{ai})/w. \quad (104)$$

Лемма 8.1. *Если* $\hat{\theta}$ *является решением уравнения* (57), *то* $(n+1)$*-мерная статистика* $(\hat{\theta}, \bar{a}_\bullet(\widehat{T}))$ *является* ОМП *и* МНК*-оценкой для* $(n+1)$*-мерного параметра* $(\theta, a_\bullet)$.

Доказательство. В рассматриваемом случае функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\Psi(\theta, a_\bullet) \equiv \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sigma_{yi}\sigma_{ai}} \exp\left\{-\sum \frac{(Y_i - y_i)^2}{2\sigma_y^2} - \sum \frac{(X_{ai} - a_i)^2}{2\sigma_{ai}^2}\right\}.$$

В силу (56) и (103)

$$\sigma_{yi}^2\sigma_{ai}^2 = w\sigma^4 \quad \text{и} \quad \Psi(\theta, a_\bullet) = (2\pi)^{-n} w^{-n/2} \sigma^{-2n} \exp\{-\sigma^{-2} L_1(1+b\theta, a_\bullet)/2\}. \quad (105)$$

Пусть теперь $(\hat{\theta}, \hat{a}_\bullet)$ — оценка максимального правдоподобия для $(\theta, a_\bullet)$. Тогда ввиду (105) $\hat{\theta}$ и $\hat{a}_\bullet$ — это те значения θ и $a_\bullet$, которые минимизируют функцию $L_1(\theta, a_\bullet)$. Но, с другой стороны, функция $L_1(\theta, a_\bullet)$ — это та функция, которую мы в данном примере должны минимизировать для нахождения МНК-оценок. Таким образом, в рассматриваемом случае ОМП и МНК-оценки параметра $(\theta, a_\bullet)$ совпадают.

Из (103) имеем

$$\frac{\partial L_1(T, a_\bullet)}{\partial a_i} = -2Y_i + 2a_i/T - 2(X_{ai} - a_i)/(wT) = 2(1+w)(a_i - \bar{a}_i(T))/(wT). \quad (106)$$

Из (104) и (106) вытекают следующие равенства:

$$L_2(T) := \min_{a_\bullet} L_1(T, a_\bullet) = L_1(T, \bar{a}_\bullet(T)) = \left(\frac{T}{T^2} + \frac{w^2}{wT}\right) \sum \frac{(TY_i - X_{ai})^2}{(1+w)^2}$$
$$= \frac{1}{T(1+w)} \sum (TY_i - X_{ai})^2 = \frac{1}{1+w} \left(T \sum Y_i^2 - 2\sum X_{ai}Y_i + \sum X_{ai}^2/T\right).$$

Таким образом, $\partial L_2(T)/\partial T = \left(\sum Y_i^2 - \sum X_{ai}^2/T^2\right)/(1+w)$ и

$$\min_\theta \min_{a_\bullet} L_1(1+b\theta, a_\bullet) = \min_T L_2(T) = L_2(\widehat{T}), \quad \text{если} \quad \sum Y_i^2 = \sum X_{ai}^2/\widehat{T}^2. \quad (107)$$

Требуемое утверждение леммы вытекает из (105) и (107). □

Лемма 8.2. *Если выполнены предположение* 4.9 *и условие* (4), *то верны соотношения* (58).

Доказательство. Положим $\overline{Y_i^2} := \sum Y_i^2/n$, $Q_y := \mathbf{E}\overline{Y_i^2}$, $\overline{X_{ai}^2} := \sum X_{ai}^2/n$, $Q_a := \mathbf{E}\overline{X_{ai}^2}$ и заметим, что

$$Q_y = \sum\left(y_i^2 + \sigma_{yi}^2\right)/n = \sum a_i^2/(T^2 n) + \sigma^2/T, \quad Q_a = \sum a_i^2/n + \sigma^2 wT. \quad (108)$$

Поскольку наблюдения нормально распределены, то, используя (4), находим, что

$$\mathbf{D}\left(\overline{Y_i^2}\right) + \mathbf{D}\left(\overline{X_{ai}^2}\right) = \sum \mathbf{D}\left(Y_i^2\right)/n^2 + \sum \mathbf{D}\left(X_{ai}^2\right)/n^2 = O(1/n) \to 0.$$

Таким образом, $\overline{Y_i^2} - Q_y \xrightarrow{p} 0$ и $\overline{X_{ai}^2} - Q_a \xrightarrow{p} 0$ в силу закона больших чисел Чебышева. Следовательно,

$$\delta := T^2\overline{Y_i^2} - \overline{X_{ai}^2} - (T^2 Q_y - Q_a) \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad \delta_y := \overline{Y_i^2}/Q_y - 1 \xrightarrow{p} 0, \quad (109)$$

поскольку $\inf\limits_{n,i} Q_y > 0$ ввиду (4) и (108). Но $T^2 Q_y - Q_a = \sigma^2 T(1-w)$ в силу (108). Из этого факта, (57) и (109) получаем

$$\frac{(T^2 - \widehat{T}^2)Q_y(1+\delta_y)}{\sigma^2 T} = \frac{(T^2 - \widehat{T}^2)\overline{Y_i^2}}{\sigma^2 T} = \frac{T^2\overline{Y_i^2} - \overline{X_{ai}^2}}{\sigma^2 T} = \frac{\delta}{\sigma^2 T} + 1 - w \xrightarrow{p} 1.$$

Отсюда и из второй сходимости в (109) вытекает второе соотношение в (58), если положить $Q := Q_y/(\sigma^2 T) \le \sup\limits_{n,i}\big(a_i^2/\sigma^2\big) + 1 < \infty$. $\square$

8.3. В этом пункте докажем предложение 1.4. Но вначале мы покажем, как можно просто получить установленное в [1] неравенство $d(\gamma_{\bullet,w}) \le d(\gamma_\bullet)$. Положим

$$h_i := \gamma_{\theta i}/\gamma_{\theta i,w},\ q_i = b_i y_i \gamma_{\theta i,w},\ p_i = q_i\Big/\sum q_i \text{ при } \gamma_{\theta i,w} = \gamma_{i,w}(\theta, a_i, b_i). \qquad (110)$$

Учитывая определения (4) и (13), находим, что теперь

$$\gamma_{\theta i,w}\sigma_i^2 = \sigma_y^2 b_i y_i \quad \text{и} \quad \sigma_i^2\gamma_{\theta i}^2 = \sigma_y^2 h_i^2 q_i. \qquad (111)$$

Соотношения (110), (111) и определение (10) дают нам следующие тождества:

$$d^2(\gamma_\bullet) = \frac{\sum \gamma_{\theta i}^2 \sigma_i^2}{\big(\sum \gamma_{\theta i} b_i y_i\big)^2} = \sigma_y^2 \frac{\sum h_i^2 q_i}{\big(\sum h_i q_i\big)^2}, \quad d^2(\gamma_{\bullet,w}) = \frac{\sigma_y^2}{\sum q_i}.$$

При выводе последнего равенства надо еще учесть, что $h_i = 1$ в случае, когда $\gamma_i \equiv \gamma_{i,w}$. Следовательно,

$$\frac{d^2(\gamma_\bullet)}{d^2(\gamma_{\bullet,w})} = \frac{\sum h_i^2 p_i}{\big(\sum h_i p_i\big)^2} = 1 + \frac{\sum (h_i - \tilde h)^2 p_i}{\tilde h^2} \ge 1 \quad \text{при } \tilde h := \sum h_i p_i. \qquad (112)$$

Доказательство предложения 1.4. Положим

$$\bar h := \frac{2Hh}{H+h}, \quad \overline{C}^2 := 1 + \frac{(H/h - 1)^2}{4H/h} \equiv \frac{(H+h)^2}{4Hh} \equiv \frac{H+h}{2\tilde h} \equiv \frac{Hh}{\bar h^2}.$$

Поскольку $h \le h_i \le H$ при всех i, то

$$\overline{\Delta} := \sum h_i^2 p_i - \overline{C}^2 \tilde h^2 \equiv -\sum (h_i - h)(H - h_i) p_i - \overline{C}^2 (\tilde h - \bar h)^2 \le 0.$$

Из этого факта и (112) получаем $d^2(\gamma_\bullet)/d^2(\gamma_{\bullet,w}) = \overline{C}^2 + \overline{\Delta}/\tilde h^2 \le \overline{C}^2$. $\square$

Как отмечалось в соответствующих местах работы, остальные утверждения из введения — следствия 1, 2 и пример 1.6 — являются почти очевидными частными случаями следствий 8, 5 и 7 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Michaelis L, Menten M. L.* Die Kinetik der Invertinwirkung // Biochem. Z. 1913. Bd 49, S. 333.
2. *Down J. E., Riggs D. S.* A comparison of estimates of Michaelis–Menten kinetic constants from various nonlinear transformation // J. Biol. Chemistry. 1965. V. 240. P. 863–869.
3. *Cornish-Bowden A., Eisenthal R.* Statistical consideration in the estimation of enzyme kinetic parameters by direct linear plot and other methods // Biochem. J. 1974. V. 139. P. 721–730.
4. *Atkins G. L., Nimmo I. A.* A comparison of seven methods for fitting the Michaelis–Menten equation // Biochem. J. 1975. V. 149. P. 775–777.

5. *Currie D. J.* Estimating Michaelis–Menten Parameters: Bias, variance and experimental design // Biometrics. 1982. V. 38. P. 907–919.
6. *Raaijmakers J.* Statistical analysis of the Michaelis–Menten equation // Biometrics. 1987. V. 43. P. 793–803.
7. *Ruppert D., Cressie N., Carroll R. J.* A Transformation/weighting model for estimation Michaelis–Menten parameters // Biometrics. 1989. V. 45. P. 637–656.
8. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 150–163.
9. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Явное асимптотически нормальное оценивание параметров уравнения Михаэлиса — Ментен // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 610–633.
10. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание многомерного параметра в задаче дробно-линейной регрессии // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 372–384.
11. *Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.* Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987.
12. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986. Кн. 1–2.
13. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
14. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1994–1997 // Commun. Stat., Theory Methods. 1998. V. 27, N 10. P. 2581–2623.
15. *Боровков А. А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1997.
16. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
17. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1372–1400.
18. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
19. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 25 апреля 2003 г., окончательный вариант — 20 ноября 2007 г.

Линке Юлиана Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`linke@math.nsc.ru`

Саханенко Александр Иванович
Югорский гос. университет, ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
`aisakh@mail.ru`