Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 517.51

ЕМКОСТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ПЛОСКОМ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКЕ

А. С. Романов

Аннотация. Рассматриваются взаимосвязь между p-емкостью пар противоположных сторон плоского четырехсторонника и возникающий в результате класс экстремальных отображений.

Ключевые слова: емкость, модуль, экстремальная функция.

В статье устанавливается естественная взаимосвязь между сопряженными емкостями двух конденсаторов, образованных парами противоположных сторон плоского криволинейного четырехсторонника. В общем случае для областей $G \subset \mathbb{R}^n$, модифицируя доказательства работы [1], можно получить аналогичный результат, связывающий между собой p-емкость пары компактов $F_0, F_1 \subset \overline{G}$ и сопряженный модуль семейства поверхностей, разделяющих F_0 и F_1. В данной работе мы не стремимся к полному и скрупулезному исследованию вопроса, нашей целью является нахождение достаточно простого доказательства, наглядно демонстрирующего внутренние взаимосвязи изучаемых объектов и возможные следствия полученных результатов, хотя, быть может, и не в самой общей ситуации.

I. Нелинейная емкость и модуль семейства кривых

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим ограниченную односвязную область G с жордановой границей Γ и четыре различные последовательные граничные точки $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Gamma$. Для определенности будем считать, что нумерация точек согласована с положительной ориентацией границы.

Область G с отмеченными четырьмя граничными точками будем называть *четырехсторонником* и обозначать через $G_\star$, а замкнутые граничные дуги $F_0 = \Gamma_{a_1a_4}$, $F_1 = \Gamma_{a_2a_3}$, $E_0 = \Gamma_{a_1a_2}$, $E_1 = \Gamma_{a_3a_4}$ будем называть его *сторонами.*

Для пары противоположных сторон F_0 и F_1 класс допустимых функций определим условием

$$D(F_0, F_1) = \{u \in ACL(G) \cap C(D \cup F_0 \cup F_1) \mid u|_{F_0} = 0,\ u|_{F_1} = 1\},$$

а при $1 \le p < \infty$ соответствующую p-емкость — равенством

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1) = \inf_{u \in D(F_0,F_1)} \iint\limits_G |\nabla u|^p \, dxdy.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00531–a), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–5682.2008.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006 № 117.

Нам понадобится еще понятие p-модуля семейства кривых. Пусть Γ — семейство кривых $\gamma \subset G$. Класс допустимых борелевских метрик определим условием

$$N(\Gamma) = \left\{ \rho \in L_p(D) \mid \int\limits_\gamma \rho\, dl \geq 1 \text{ для всех } \gamma \in \Gamma \right\},$$

а p-модуль семейства Γ — равенством

$$\operatorname{mod}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in N(\Gamma)} \iint\limits_G \rho^p \, dxdy.$$

В случае, когда Γ является семейством спрямляемых кривых, соединяющих стороны F_0 и F_1, будем использовать обозначение $\operatorname{mod}_p(F_0, F_1)$. При этом [2]

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1) = \operatorname{mod}_p(F_0, F_1)$$

и если u — экстремальная функция для $\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)$, а ρ — экстремальная метрика для $\operatorname{mod}_p(F_0, F_1)$, то

$$\rho = |\nabla u|.$$

При $p = 2$ соответствующие емкость и модуль принято называть *конформными.*

Пример 1. Несложно найти емкость пары противоположных сторон прямоугольника (см., например, [3]). Если длины сторон F_0, F_1 равны α и длины сторон E_0, E_1 равны β, то

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1) = \frac{\alpha}{\beta^{p-1}}. \tag{1}$$

При этом экстремальная функция u линейна и $|\nabla u| \equiv 1/\beta$.

В конформном случае получаем

$$\operatorname{cap}_2(F_0, F_1) = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{2}$$

Согласно теореме Римана существует конформное отображение четырехсторонника $G_\star$ на прямоугольник, при котором точки $a, b, c, d \in \Gamma$ отображаются в вершины прямоугольника, а дуги F_0, F_1, E_0, E_1 — в его стороны.

Поскольку конформная емкость является инвариантом при конформных отображениях, из равенства (2) для произвольного четырехсторонника $G_\star$ следует давно известное соотношение [3]

$$\operatorname{cap}_2(F_0, F_1)\operatorname{cap}_2(E_0, E_1) = 1. \tag{3}$$

Нашей целью является доказательство аналога равенства (3), показывающего взаимосвязь емкостей пар противоположных сторон произвольного четырехсторонника при $p \neq 2$.

Используя равенство (1), установить эту взаимосвязь для прямоугольника довольно просто:

$$[\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} [\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1.$$

Пример 2. Рассмотрим сектор $S_{\alpha Rr} = \{r < \rho < R,\ 0 < \varphi < \alpha\}$. Положим

$$F_0 = \{0 \leq \varphi \leq \alpha,\ \rho = R\}, \quad F_1 = \{0 \leq \varphi \leq \alpha,\ \rho = r\};$$

$$E_0 = \{\varphi = 0,\ r \le \rho \le R\}, \quad E_1 = \{\varphi = \alpha,\ r \le \rho \le R\}.$$

Тогда при $p \ne 2$ (см., например, [4])

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1) = \alpha \left(\frac{|2-p|}{p-1}\right)^{p-1} |R^{\frac{p-2}{p-1}} - r^{\frac{p-2}{p-1}}|^{1-p}.$$

В отличие от прямоугольника в данном случае строение экстремальной функции u зависит от показателя p и $|\nabla u| = C\rho^{1/(1-p)}$.

Несложно проверить, что для другой пары сторон сектора и сопряженного показателя суммируемости выполняется равенство

$$\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1) = \frac{1}{\alpha^{p'-1}|2-p'|} |R^{2-p'} - r^{2-p'}|.$$

Поскольку $p' = \frac{p}{p-1}$, мы вновь приходим к соотношению

$$[\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} [\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1.$$

Одной из основных целей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *При всех показателях $p \in (1, \infty)$ для произвольного четырехсторонника $G_\star \subset \mathbb{R}^2$ выполняется равенство*

$$[\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} [\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1. \tag{4}$$

Возможные приложения этого равенства вполне очевидны — получение емкостных оценок и оценок искажения емкости различными отображениями. Как правило, получить для емкости оценку снизу бывает сложнее, чем оценку сверху, поскольку для получения последней достаточно построить подходящую допустимую функцию. С учетом равенства (4) получение оценки сверху для емкости одной пары сторон автоматически влечет получение оценки снизу для сопряженной емкости другой пары сторон. Имеющаяся в равенстве (4) двойственность полезна и при изучении свойств отображений, поскольку всякое отображение, искажающее в конечное число раз p-емкость, не более чем в конечное число раз искажает и сопряженную p'-емкость.

Равенство (4) выглядит вполне естественным, однако автору не удалось обнаружить каких-либо упоминаний об этом свойстве для неконформной емкости. Возможно, это связано с активностью и результативностью использования емкостной техники, соответствующей различным показателям суммируемости. Различные оценки для конформной емкости (конформного модуля) играют весьма существенную роль в теории квазиконформных отображений, в то время как p-емкость традиционно удается связать лишь с достаточно узким классом билипшицевых отображений, про которые все более или менее понятно и без емкостных оценок.

К сожалению, при $p \ne 2$ в отличие от конформного случая мы не можем непосредственно воспользоваться каким-либо аналогом теоремы Римана о конформной эквивалентности односвязных областей. Однако даже в общем случае для произвольных четырехсторонников удается получить довольно простое доказательство. При этом, с одной стороны, возникают классы экстремальных отображений, характеристики которых жестко связаны с соответствующим показателем суммируемости p, с другой стороны, для этих отображений оказывается верным аналог теоремы Римана. При $p = 2$ из полученных соотношений практически непосредственно следует независимое доказательство классической теоремы Римана, несколько отличное от традиционного.

II. Емкостные соотношения в плоском четырехстороннике

Считая фиксированными четырехсторонник $G_\star$ и его стороны, положим $C_p = \operatorname{cap}_p(F_0, F_1)$. По нашему предположению дуги F_0, F_1 не вырождаются в точку и $F_0 \cap F_1 = \varnothing$, следовательно, $0 < C_p < \infty$. В этом случае при $1 < p < \infty$ для p-емкости пары сторон F_0, F_1 четырехсторонника $G_\star$ существует единственная экстремальная функция, которую далее мы всегда будем обозначать символом u и для которой

$$C_p = \iint\limits_G |\nabla u|^p \, dxdy.$$

Уравнение Эйлера для рассматриваемого функционала сводится к обращению в нуль p-лапласиана $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = 0$, понимаемого в слабом смысле, т. е.

$$\iint\limits_G |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dxdy = 0 \tag{5}$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. При этом экстремальная функция u является гладкой в области G и на всяком компактном подмножестве $K \subset G$ принадлежит классу $C^{1,\alpha}(K)$ [5, 6].

Символом U_t будем обозначать множество уровня экстремальной функции u, т. е. $U_t = \{(x, y) \in G \mid u(x, y) = t\}$.

При почти всех $t \in (0, 1)$ множество уровня U_t является спрямляемой кривой, и согласно формуле интегрирования по множествам уровня [1, 4] для всякой неотрицательной борелевской функции Φ выполняется равенство

$$\iint\limits_G \Phi(x, y) |\nabla u(x, y)| \, dxdy = \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_{U_t} \Phi(x, y) \, dl \Bigg) dt. \tag{6}$$

Нам потребуется следующее утверждение [4, с. 94]: пусть Λ — множество неубывающих функций $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющих условиям: $\lambda(t) = 0$ при $t \le 0$, $\lambda(t) = 1$ при $t \ge 1$, $\operatorname{supp} \lambda' \subset (0, 1)$. Тогда для всякой неотрицательной суммируемой на $[0, 1]$ функции h при $p \in (1, \infty)$ выполняется равенство

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \int\limits_0^1 (\lambda')^p h \, dt = \Bigg(\int\limits_0^1 h^{\frac{1}{1-p}} \, dt \Bigg)^{1-p}. \tag{7}$$

Теперь мы можем доказать важное для наших целей свойство экстремальных функций.

Лемма 1. *Пусть u — экстремальная функция, тогда для почти всех $t \in (0, 1)$*

$$\int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1} \, dl \equiv \mathrm{const} = C_p.$$

Доказательство. Обозначим

$$h(t) = \int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1} \, dl.$$

Согласно равенству (6)

$$\iint\limits_G |\nabla u|^p\,dxdy = \int\limits_0^1 h(t)\,dt = C_p. \tag{8}$$

Пусть $\lambda \in \Lambda$. Тогда $|\nabla\lambda(u)| = \lambda'(u)|\nabla u|$.

Поскольку функция u экстремальна, учитывая равенство (7), получаем

$$\iint\limits_G |\nabla u|^p\,dxdy = \inf_{\lambda\in\Lambda}\iint\limits_D |\nabla\lambda(u)|^p\,dxdy = \inf_{\lambda\in\Lambda}\iint\limits_D (\lambda'(u)|\nabla u|)^p\,dxdy$$
$$= \inf_{\lambda\in\Lambda}\int\limits_0^1 (\lambda')^p(t)h(t)\,dt = \left(\int\limits_0^1 \frac{dt}{h^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{1-p}. \tag{9}$$

Используя неравенство Гёльдера и применяя равенства (8) и (9), приходим к соотношениям

$$1 = \int\limits_0^1 dt = \int\limits_0^1 \frac{h^{\frac{1}{p}}}{h(t)^{\frac{1}{p}}}\,dt \le \left(\int\limits_0^1 h(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \frac{dt}{h^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}} = 1.$$

Из того, что в данном случае неравенство Гёльдера превращается в тождество, следует равенство $h(t) = C[h(t)]^{1-p}$, т. е. $h(t) = \mathrm{const} = C_p$.

Полученное в лемме 1 соотношение позволяет легко доказать равенство (4).

Замечание. Для конформного случая аналог утверждения леммы 1 в работах [1, 7], напротив, получается как следствие соотношения, эквивалентного равенству (4).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим векторное поле

$$\overline{A} = |\nabla u|^{p-2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Оно потенциально в области G. Если $u \in C^2(G)$, то потенциальность поля $\overline{A}$ является непосредственным следствием равенства (5). В общем случае легко показать потенциальность поля $\overline{A}$, используя регуляризацию. Поскольку операции дифференцирования и усреднения перестановочны, регуляризованное поле $\overline{A}_\varepsilon$ будет потенциальным и

$$\int\limits_\gamma \overline{A}_\varepsilon\,d\bar{l} = 0$$

для произвольного замкнутого контура $\gamma \subset G$. Так как поле $\overline{A}$ непрерывно, сходимость $\overline{A}_\varepsilon \to \overline{A}$ при $\varepsilon \to 0$ равномерна на контуре γ и

$$\int\limits_\gamma \overline{A}\,d\bar{l} = 0,$$

что и означает потенциальность поля $\overline{A}$.

Всякую точку $(x, y) \in U_{t_0}$ можно соединить с произвольным множеством уровня U_t кривой L, которая является интегральной линией градиента функции u, т. е.

$$\int\limits_L \nabla u\,d\bar{l} = \int\limits_L |\nabla u|\,dl = t - t_0.$$

Из потенциальности поля $\overline{A}$ и его ортогональности градиенту функции u следует, что для произвольных кривых γ и γ^*, начинающихся на интегральной линии L_1 и заканчивающихся на интегральной линии L_2,

$$\int\limits_{\gamma} \overline{A}\,d\bar{l} = \int\limits_{\gamma^*} \overline{A}\,d\bar{l}.$$

Учитывая лемму 1, для произвольной спрямляемой кривой γ, разделяющей стороны F_0 и F_1 (соединяющей стороны E_0 и E_1), получаем

$$\int\limits_{\gamma} |\nabla u|^{p-1}\,dl \geq \int\limits_{\gamma} \overline{A}\,d\bar{l} = \int\limits_{U_t} \overline{A}\,d\bar{l} = \int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1}\,dl = C_p.$$

Таким образом, метрика $\rho = \frac{|\nabla u|^{p-1}}{C_p}$ допустима для семейства кривых, соединяющих стороны E_0 и E_1, и

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1) = \operatorname{mod}_{p'}(E_0, E_1) \leq (C_p)^{-p'} \iint\limits_{G} |\nabla u|^{p'(p-1)}\,dxdy \\ = (C_p)^{-p'} \iint\limits_{G} |\nabla u|^{p}\,dxdy = (C_p)^{1-p'}. \quad (10)\end{aligned}$$

Теперь получим для емкости $\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)$ оценку снизу.

Пусть ρ — допустимая метрика для семейства кривых Γ, соединяющих стороны E_0 и E_1, т. е. для всякой кривой $\gamma \in \Gamma$

$$\int\limits_{\gamma} \rho\,dl \geq 1.$$

Используя неравенство Гёльдера и интегрирование по множествам уровня, получаем

$$\begin{aligned}\Bigl(\iint\limits_{G} \rho^{p'}\,dxdy\Bigr)^{1/p'} (C_p)^{1/p} = \Bigl(\iint\limits_{G} \rho^{p'}\,dxdy\Bigr)^{1/p'} \Bigl(\iint\limits_{G} |\nabla u|^{p}\,dxdy\Bigr)^{1/p} \\ \geq \iint\limits_{G} \rho|\nabla u|\,dxdy = \int\limits_{0}^{1} \Bigl(\int\limits_{U_t} \rho\,dl\Bigr)\,dt \geq 1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1) = \operatorname{mod}_{p'}(E_0, E_1) \geq \iint\limits_{G} \rho^{p'}\,dxdy \geq (C_p)^{1-p'}. \quad (10')$$

Из оценок (10) и (10′) следует искомое соотношение

$$[\operatorname{cap}_p(F_0, F_1)]^{1/p} [\operatorname{cap}_{p'}(E_0, E_1)]^{1/p'} = 1.$$

Замечание. Полагая

$$\operatorname{cap}_\infty(F_0, F_1) = \inf_{u \in D(F_0, F_1)} \operatorname*{ess\,sup}_{G} |\nabla u|,$$

несложно показать, что равенство (4) остается верным и в предельном случае $p = 1$, $p' = \infty$.

Согласно лемме [4, с. 97] $\operatorname{cap}_1(F_0, F_1) = S_0$, где S_0 равно инфимуму длин кривых $\gamma \subset G$, разделяющих стороны F_0 и F_1. При этом вполне очевидно, что $\operatorname{cap}_\infty(E_0, E_1) = S_0^{-1}$. Следовательно,

$$[\operatorname{cap}_1(F_0, F_1)][\operatorname{cap}_\infty(E_0, E_1)] = 1.$$

III. Сопряженные экстремальные функции и экстремальные отображения

Пусть $1 < p < \infty$ и u — экстремальная функция для p-емкости пары сторон F_0, F_1.

Семейство кривых, соединяющих точку $(x, y) \in G$ и сторону E_0, обозначим через $\Gamma(x, y)$ и положим

$$v(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} \int\limits_{\gamma} |\nabla u|^{p-1}\, dl.$$

Несложно понять, что в силу потенциальности поля

$$\overline{A} = |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

точная нижняя граница достигается на соответствующей дуге линии уровня U_t, где $t = u(x, y)$.

Функция v является потенциалом поля $\overline{A}$, при этом $v|_{E_0} = 0, v|_{E_1} = C_p$, $|\nabla v| = |\nabla u|^{p-1}$ и $\nabla u \perp \nabla v$. Функция $g = C_p^{-1} v$ экстремальна для p'-емкости пары сторон E_0, E_1, а функция v в обобщенном смысле удовлетворяет однородному уравнению для p'-лапласиана $\operatorname{div}(|\nabla v|^{p'-2} \cdot \nabla v) = 0$. Далее мы будем называть функцию v *сопряженной* экстремальной функции u.

Отметим некоторые свойства экстремальных функций.

1. Множество уровня U_t экстремальной функции u замкнуто относительно области G, разделяет стороны F_0, F_1 и обладает следующим свойством минимальности: если множество S замкнуто, разделяет стороны F_0, F_1 и $S \subset U_t$, то $U_t = S$. Доказательство является следствием единственности экстремальной функции. Пусть G_0 и G_1 — связные компоненты множества $G \setminus S$, границам которых соответственно принадлежат стороны F_0 и F_1. Пусть u_0 — экстремальная функция для пары F_0 и S, а u_1 — экстремальная функция для пары S и F_1. В силу непрерывности экстремальной функции и монотонности емкости $u_0 < 1$ в G_0, $u_1 > 0$ в G_1 и

$$\iint\limits_{G_0} |\nabla u_0|^p\, dxdy \le t^{-p} \iint\limits_{G_0} |\nabla u|^p\, dxdy,$$

$$\iint\limits_{G_1} |\nabla u_1|^p\, dxdy \le (1-t)^{-p} \iint\limits_{G_1} |\nabla u|^p\, dxdy.$$

Функция

$$g(x, y) = \begin{cases} t u_0(x, y), & (x, y) \in G_0, \\ t, & (x, y) \in S, \\ t + (1-t) u_1(x, y), & (x, y) \in G_1, \end{cases}$$

допустима для пары сторон F_0, F_1 и

$$\iint\limits_{G} |\nabla g|^p\, dxdy \le \iint\limits_{G} |\nabla u|^p\, dxdy.$$

В силу единственности экстремальной функции $g = u$ и $U_t = S$. Следовательно, множество уровня экстремальной функции связно и не содержит «лишних» дуг.

2. Экстремальная функция обладает свойством «локальной экстремальности» на подмножествах специального вида. Рассмотрим четырехсторонник $G'_\star \subset G$, ограниченный двумя линиями уровня U_{t_1}, U_{t_2} функции u и двумя линиями уровня V_{τ_1}, V_{τ_2} функции v. Соответствующие стороны четырехсторонника $G'_\star$ обозначим через F'_0, F'_1, E'_0, E'_1. Пусть g — сужение на четырехсторонник $G'_\star$ функции u, экстремальной для p-емкости пары сторон F_0, F_1. Функция $h = |t_2 - t_1|(g - t_1)$ допустима для пары сторон F'_0, F'_1. Поскольку

$$\int\limits_{g=t} |\nabla g|^{p-1}\, dl = \mathrm{const} = |\tau_2 - \tau_1|,$$

имеем

$$\mathrm{cap}_p(F'_0, F'_1) \le \iint\limits_{G'} |\nabla h|^p\, dxdy = \frac{|\tau_2 - \tau_1|}{|t_2 - t_1|^{p-1}}. \tag{11}$$

С другой стороны, метрика $\rho = |\tau_2 - \tau_1|^{-1} |\nabla g|^{p-1}$ допустима для пары сторон E'_0, E'_1 и

$$\mathrm{cap}_{p'}(E'_0, E'_1) \le \iint\limits_{G'} |\nabla g|^{p'(p-1)}\, dxdy = \frac{|t_2 - t_1|}{|\tau_2 - \tau_1|^{p'-1}}. \tag{11$'$}$$

Из этих оценок и равенства (4) следует, что функция h экстремальна для пары сторон F'_0, F'_1 четырехсторонника $G'_\star$ и

$$\mathrm{cap}_p(F'_0, F'_1) = \frac{|\tau_2 - \tau_1|}{|t_2 - t_1|^{p-1}}.$$

3. В примерах 1 и 2 независимо от показателя суммируемости p экстремальные функции имеют одинаковые линии уровня и экстремальная для p-емкости функция u_p выражается через экстремальную для конформной емкости функцию u, т. е. $u_p = \lambda(u)$. Посмотрим, какие условия необходимы для выполнения этого свойства. Обозначим через u и v соответствующие функции для конформного случая, а через $u_p = \lambda(u)$ и $v_{p'} = \mu(v)$ — функции, соответствующие $p \ne 2$. Пара (u, v) определяет ортогональные криволинейные координаты в области G, при этом $|\nabla u| = |\nabla v| = H^{-1}$. Учитывая равенство

$$\mu'(v)|\nabla v| = |\nabla v_{p'}| = |\nabla u_p|^{p-1} = (\lambda'(u)|\nabla u|)^{p-1},$$

получаем $H = A(u) \cdot B(v)$, т. е. параметры Ламе, соответствующие конформному случаю, должны быть представимы в виде произведения функций одной переменной.

Очевидно, что это свойство выполняется в примерах 1 и 2, но не выполняется в общем случае. Если рассмотреть четырехсторонник $G_\star$, определяемый условиями

$$0 < a < x^2 - y^2 < b < \infty, \quad 0 < c < 2xy < d < \infty,$$

и положить $z = x + iy$, $w = f + ig$, то функция $w = z^2$ отображает четырехсторонник $G_\star$ на прямоугольник

$$a < f = \mathrm{Re}\, w < b, \quad c < g = \mathrm{Im}\, w < d.$$

Несложно проверить, что в данном случае $H = \frac{1}{2\sqrt[4]{f^2+g^2}}$, а экстремальные для конформного случая функции u и v линейным образом выражаются через функции f и g соответственно. Следовательно, для областей общего вида экстремальные функции, соответствующие различным показателям суммируемости, имеют разные линии уровня.

Со всяким четырехсторонником $G_\star$, т. е. с ограниченной односвязной областью G, на границе которой отмечены четыре точки a_1, a_2, a_3, a_4, однозначно связаны p-гармоническая функция u, являющаяся экстремальной для p-емкости сторон F_0, F_1, и сопряженная ей p'-гармоническая функция v, пропорциональная экстремальной функции для p'-емкости сторон E_0, E_1. Таким образом, полагая $\Phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, мы получаем отображение $\Phi : G \to P$, где P — прямоугольник с вершинами в точках $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(1,C_p)$, $A_4(0,C_p)$ и $A_k = \Phi(a_k)$.

Заметим, что отображение $\Phi : G \to P$ взаимно однозначно. Если предположить противное, то должны существовать такие различные точки $M(x_1,y_1) \in G$ и $N(x_2,y_2) \in G$, что $u(M) = u(N) = t_0$ и $v(M) = v(N) = \tau_0$. Следовательно, обе эти точки M и N должны одновременно принадлежать и множеству уровня U_{t_0} функции u, и множеству уровня V_{τ_0} функции v. В силу связности множеств уровня экстремальной функции точки M и N можно соединить дугами $\gamma_1 \subset U_{t_0}$ и $\gamma_2 \subset V_{\tau_0}$. При этом $|\nabla u| \equiv 0$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$, т. е. $\gamma_2 \subset U_{t_0}$. В силу минимальности множества уровня $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \subset U_{t_0} \cap V_{\tau_0}$. Положим $t_1 = t_0 - \varepsilon$, $t_2 = t_0 + \varepsilon$, $\tau_1 = \tau_0 - \varepsilon$, $\tau_2 = \tau_0 + \varepsilon$ и рассмотрим четырехсторонник G_ε, ограниченный множествами уровня $U_{t_1}, U_{t_2}, V_{\tau_1}, V_{\tau_2}$. При любом $\varepsilon > 0$ четырехсторонник G_ε содержит невырожденную дугу γ, соединяющую точки M и N. При $\varepsilon \to 0$ стороны четырехсторонника стягиваются к дуге γ, и для пар противоположных сторон при $1 < p < \infty$ получаем

$$\operatorname{cap}_p(F_{0,\varepsilon}, F_{1,\varepsilon}) \to \infty, \quad \operatorname{cap}_{p'}(E_{0,\varepsilon}, E_{1,\varepsilon}) \to \infty.$$

Однако согласно оценкам (11) и (11$'$) по крайней мере одна из этих емкостей не превосходит единицы. Полученное противоречие и доказывает взаимную однозначность отображения Φ. В силу взаимной однозначности отображения каждая из функций u и v строго монотонна на всякой линии уровня другой функции. При этом их градиенты не обращаются в нуль почти всюду в смысле линейной меры Хаусдорфа на линиях уровня и почти всюду в смысле меры Лебега в области G.

Таким образом, мы получаем класс гладких плоских гомеоморфизмов

$$\Phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y)),$$

удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{12}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши — Римана.

Вообще говоря, можно изначально не предполагать гладкости отображения $\Phi = (u,v)$, а считать, что сопряженные функции $u \in W^1_p(G_1)$, $v \in W^1_{p'}(G_1)$ в обобщенном смысле удовлетворяют сопряженным нелинейным уравнениям Лапласа, т. е.

$$\iint\limits_{G_1} |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dxdy = 0, \quad \iint\limits_{G_1} |\nabla v|^{p'-2} \cdot \nabla v \cdot \nabla\varphi \, dxdy = 0.$$

Из работ [5, 6] следует, что для всякой внутренней подобласти G' ($\overline{G'} \subset G_1$), функции u, v принадлежат $C^{1,\alpha}(G')$.

Для фиксированного четырехсторонника $G_\star$ существует единственный гладкий гомеоморфизм $\Phi : G \to P$, удовлетворяющий системе (12) и условиям $\Phi(\partial G) = \partial P,\ A_k = \Phi(a_k)$. Пусть $\Psi = (f, g)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Поскольку четырехсторонник $G_\star$ отображается на прямоугольник P, то $f|_{F_0} = 0$, $f|_{F_1} = 1$, $g|_{E_0} = 0$, $g|_{E_1} = C_p$. Таким образом, функция f допустима для пары сторон F_0 и F_1. Из системы (12) следует, что $|\nabla g| = |\nabla f|^{p-1}$ и

$$C_p = \int\limits_{f=t} \nabla g\, d\bar{l} = \int\limits_{f=t} |\nabla f|^{p-1}\, dl.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{G} |\nabla f|^p\, dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_{f=t} |\nabla f|^{p-1}\, dl = C_p,$$

следовательно, функция f экстремальна.

Аналогично доказывается, что функция g пропорциональна экстремальной и единственность отображения является следствием единственности экстремальной функции.

Отображение $\Phi : G \to P$ четырехсторонника $G_\star$ на соответствующий прямоугольник P будем называть *p-экстремальным*, если $\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, где u — экстремальная функция для p-емкости пары сторон, а функция v является сопряженной к функции u.

При $p = 2$ из классического принципа Дирихле [8] следует, что экстремальные функции гармонические, а соответствующее 2-экстремальное отображение $\Phi : G \to P$ конформно.

Рассмотрим совокупность четырехсторонников, порождаемых областью G, и класс соответствующих p-экстремальных гомеоморфизмов обозначим через $H_p(G)$.

Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченные односвязные области с жордановыми границами. Будем говорить, что гомеоморфизм $L : G_1 \to G_2$ является *p-экстремальным*, если $L = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, где $\Phi_1 \in H_p(G_1)$, $\Phi_2 \in H_p(G_2)$. Класс соответствующих p-экстремальных гомеоморфизмов обозначим через $H_p(G_1, G_2)$.

Возможность отображения произвольного четырехсторонника на соответствующий прямоугольник показывает, что p-экстремальных гомеоморфизмов достаточно много. С одной стороны, свойства таких гомеоморфизмов должны существенным образом зависеть от показателя суммируемости p, с другой стороны, можно надеяться, что для них будут выполняться некоторые аналоги утверждений, известных из классического комплексного анализа для конформных отображений. В частности, для p-экстремальных гомеоморфизмов удается довольно просто получить аналог теоремы Римана о конформной эквивалентности односвязных областей.

Теорема 2. *Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$ — две ограниченные односвязные области с жордановыми границами Γ_1 и Γ_2 соответственно. Фиксируем тройки попарно различных точек $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma_1$ и $b_1, b_2, b_3 \in \Gamma_2$. Тогда существует такой гомеоморфизм $L : G_1 \to G_2$ класса $H_p(G_1, G_2)$, что $L(a_k) = b_k$.*

Доказательство. Выберем произвольно точку $a_4 \in \Gamma_1$, лежащую между точками a_1 и a_3. Обозначим через $F_{10}, F_{11}, E_{10}, E_{11}$ соответствующие стороны получаемого четырехсторонника. Точку $b_4 \in \Gamma_2$, лежащую между точками b_1 и

b_3, выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathrm{cap}_p(F_{10}, F_{11}) = \mathrm{cap}_p(F_{20}, F_{21}).$$

Из ранее доказанного следует существование фиксированного прямоугольника P и экстремальных p-экстремальных гомеоморфизмов $\Phi_i : G_i \to P$, для которых $\Phi_1(a_k) = \Phi_2(b_k)$. Тогда отображение $L = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ искомое.

При $p = 2$ отображения Φ_1 и Φ_2^{-1} конформны, и мы получаем теорему Римана.

Аналогичный результат можно получить и для двусвязных областей. Рассмотрим две ограниченные двусвязные области $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$, границы которых состоят из пар невырожденных простых замкнутых жордановых кривых Γ_{10}, Γ_{11} и Γ_{20}, Γ_{21} соответственно. Пусть

$$\mathrm{cap}_p(\Gamma_{10}, \Gamma_{11}) = \mathrm{cap}_p(\Gamma_{20}, \Gamma_{21})$$

и u_1, u_2 — соответствующие экстремальные функции. Фиксируя точки $a_1 \in \partial G_1$ и $a_2 \in \partial G_2$, проведем из точек a_i вдоль интегральных линий градиентов экстремальных функций u_i разрезы γ_i, соединяющие граничные компоненты. В результате получим два четырехсторонника, у которых соответствующие стороны F_{ik} равны Γ_{ik}, а стороны E_{ik} являются сторонами разрезов γ_i. Поскольку

$$\mathrm{cap}_p(F_{i0}, F_{i1}) = \mathrm{cap}_p(\Gamma_{i0}, \Gamma_{i1}),$$

то $\mathrm{cap}_{p'}(E_{i0}, E_{i1})$ совпадает с p'-модулем разделяющих кривых и к точкам разреза γ_i с обеих сторон будет подходить одна и та же линия уровня экстремальной функции u_i. Повторяя доказательство теоремы, получаем p-экстремальный гомеоморфизм $L : G_1 \to G_2$, для которого $L(a_1) = a_2$.

Можно ввести еще один класс гомеоморфизмов, связанный с экстремальными отображениями. Учитывая равенства (12), преобразуем матрицу Якоби p-экстремального отображения $\Phi : G \to P$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial y} & |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} |\nabla u| & 0 \\ 0 & |\nabla u|^{p-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Определение. Рассмотрим области $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$. Гомеоморфизм $L : G_1 \to G_2$ назовем *p-конформным*, если L дифференцируем в почти всех точках $z \in G_1$ и его матрица Якоби представима в виде

$$J(z) = A(z) \circ B(z) \circ C(z),$$

где матрицы $A(z)$ и $C(z)$ ортогональны, а диагональная матрица $B(z)$ имеет вид

$$B(z) = \begin{pmatrix} h(z) & 0 \\ 0 & (h(z))^{p-1} \end{pmatrix},$$

$h(z)$ — некоторая положительная функция.

В данном определении имеется некоторая симметрия, вполне очевидна взаимосвязь между p- и p'-конформными отображениями, с другой стороны, строение матрицы $B(z)$, безусловно, предполагает анизотропию свойств таких отображений.

Есть надежда, что изучение подобных классов гомеоморфизмов может представлять практический интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal-capacity // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 126, N 3. P. 460–473.

2. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // Mich. Math. J. 1969. V. 16, N 1. P. 43–51.

3. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.

4. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

5. *Уральцева Н. Н.* Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1968. Т. 7. С. 184–222.

6. *Lewis J.* Regularity of the derivatives of solutions to certain elliptic equations // Indiana Univ. Math. J. 1983. V. 32, N 6. P. 849–858.

7. *Кривов В. В.* Некоторые свойства модулей в пространстве // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154, № 3. С. 510–513.

8. *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

Статья поступила 29 февраля 2008 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru