Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 512.541

НЕКОТОРЫЕ МОРФИЗМЫ МОДУЛЕЙ НАД КОЛЬЦОМ ПСЕВДОРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. В. Царев

Аннотация. Изучаются различные морфизмы модулей над кольцом псевдорациональных чисел R. Получен критерий квазиизоморфности конечно порожденных R-модулей. Введено понятие псевдогомоморфизма и доказано, что в категории псевдогомоморфизмов конечно порожденных R-модулей выполняется теорема Крулля — Ремака — Шмидта.

Ключевые слова: псевдорациональные числа, sp-группа, квазиизоморфизм, псевдоизоморфизм.

Введение

Кольцо псевдорациональных чисел и модули над ним введены в работах А. А. Фомина [1] и П. А. Крылова [2, 3] как средство изучения смешанных абелевых sp-групп. Абелева группа A называется *sp-группой*, если она лежит между прямой суммой и прямым произведением своих p-примарных компонент,

$$\bigoplus_{p\in P} A_p \subset A \subseteq \prod_{p\in P} A_p.$$

Этот класс групп как объект изучения, по-видимому, впервые появился при рассмотрении абелевых групп с регулярными кольцами эндоморфизмов (см. [4, § 112]). В [5] построен один важный подкласс sp-групп, это $\mathscr{G}$ — класс смешанных самомалых групп G с $G/t(G)$ — делимой конечного ранга. Работа с группами из это класса и привела к построению кольца псевдорациональных чисел R, так как группы из класса $\mathscr{G}$ оказалось выгодно рассматривать как конечно порожденные R-модули.

Изучение модулей над кольцом псевдорациональных чисел имеет и самостоятельный интерес. К настоящему моменту описаны многие важные классы R-модулей (инъективные, проективные, плоские, образующие и др., см. [6, 7]), а также построено несколько конструкций колец, обобщающих кольцо псевдорациональных чисел (см., например, [8]).

Настоящая работа посвящена изучению различных морфизмов модулей над кольцом псевдорациональных чисел. В § 1 вводятся основные понятия и определения. В § 2, 3 рассматриваются соответственно квазигомоморфизмы и псевдогомоморфизмы R-модулей. Для конечно порожденных R-модулей найден критерий квазиизоморфности. Для категории псевдогомоморфизмов R-модулей построены примеры неразложимых модулей произвольного конечного псевдорационального ранга и доказано, что в этой категории справедлива теорема

Работа поддержана грантом Президента РФ (№ МК–3345.2007.1).

Крулля — Ремака — Шмидта о единственности разложения объекта в прямую сумму объектов с локальными кольцами эндоморфизмов.

Под «группой» в данной работе всюду подразумевается абелева группа, записанная аддитивно; Z, Q и $\widehat{Z}_p$ — обозначения колец целых, рациональных и целых p-адических чисел соответственно или их аддитивных групп, P — множество всех простых чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Если S — подмножество K-модуля M, то через $\langle S\rangle$ и $\langle S\rangle_K$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S, а через $\langle S\rangle_*$ — сервантную оболочку множества S, состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S\rangle$ при некотором натуральном n. Через $t(A)$ будем обозначать периодическую часть группы A. При работе с категориями, которые отличаются только морфизмами, будем называть их по введенным в них морфизмам. Например, термин «категория квазигомоморфизмов абелевых групп» обозначает категорию, объектами которой являются абелевы группы, а морфизмами — квазигомоморфизмы.

Другие используемые в работе понятия и обозначения можно найти в [4, 9].

§ 1. Основные понятия

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика и $K_p = Z/p^{m_p}Z$ или $K_p = \widehat{Z}_p$ соответственно при $m_p < \infty$ и $m_p = \infty$. Если χ содержит бесконечно много ненулевых элементов, то рассмотрим кольцо $Z_\chi = \prod\limits_{p\in P} K_p$, в котором построим подкольцо R_χ, сервантно порожденное единицей кольца и идеалом $\bigoplus\limits_{p\in P} K_p$,

$$R_\chi = \Big\langle 1, \bigoplus_{p\in P} K_p \Big\rangle_* \subset \prod_{p\in P} K_p.$$

Если же все p-компоненты характеристики χ, за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, то построим кольца $K_\chi = K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$ и $R_\chi = Q \oplus K_\chi$.

Определение 1. Кольцо R_χ, где $\chi = (\infty, \infty, \dots)$ — характеристика группы Q, называется *кольцом псевдорациональных чисел* и обозначается просто через R.

Рассмотрим некоторые свойства кольца псевдорациональных чисел.

1. Элемент $r = (\alpha_p) \in \prod\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$ принадлежит кольцу R тогда и только тогда, когда существует рациональное число $|r| = \frac{m}{n}$ такое, что $n\alpha_p = m$ почти при всех простых p.

2. Обозначим через ε_p элемент кольца R такой, что его p-компонента равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Тогда ε_p — идемпотент кольца R и, следовательно, $R = \varepsilon_p R \oplus (1 - \varepsilon_p)R$.

3. Элементы вида

$$\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_n}, \qquad (a)$$

где $p_1, \dots, p_n$ — различные простые числа, и элементы вида

$$1 - \varepsilon, \qquad (b)$$

а также 1 и 0 составляют множество всех идемпотентов кольца R.

4. Любой элемент $r \in R$ можно представить в виде $r = \varepsilon r + (1 - \varepsilon)|r|$, где ε — некоторый идемпотент вида (a).

5. Кольцо K является эпиморфным образом кольца R тогда и только тогда, когда $K \cong R_\chi$ или $K \cong K_\chi$.

6. Множество $T = \bigoplus_{p \in P} \widehat{Z}_p$ является максимальным идеалом кольца R, причем $R/T \cong Q$.

7. Кольцо R_χ наследственно тогда и только тогда, когда характеристика χ содержит только символы 0, 1 и ∞. В частности, кольцо псевдорациональных чисел наследственно.

Пусть M — произвольный модуль над кольцом псевдорациональных чисел. Так как $R/T \cong Q$, то фактор-модуль M/TM является векторным пространством над полем Q.

Определение 2. Величина $\dim_Q M/TM$ называется *псевдорациональным рангом* R-модуля M и обозначается через $r^*(M)$.

Этот инвариант введен А. А. Фоминым в [1]. Он играет в теории R-модулей такую же важную роль, как обычный ранг в теории абелевых групп.

§ 2. Квазигомоморфизмы R-модулей

Определение 3. *Квазигомоморфизмами* из R-модуля M_1 в R-модуль M_2 называются элементы из $Q \otimes \operatorname{Hom}_R(M_1, M_2)$. Обратимые квазигомоморфизмы называются *квазиизоморфизмами*.

Модули M_1 и M_2 называются *квазиравными*, если модуль $M_1 \cap M_2$ имеет конечный индекс как в M_1, так и в M_2. Отметим, что квазиравные модули всегда квазиизоморфны.

Определение 4. R-модуль называется *вполне разложимым*, если он раскладывается в прямую сумму циклических R-модулей. R-модуль называется *почти вполне разложимым*, если он квазиизоморфен вполне разложимому R-модулю.

Найдем критерий квазиизоморфности для конечно порожденных R-модулей. Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если R-модули M_1 и M_2 квазиизоморфны, то $r^*(M_1) = r^*(M_2)$.*

Доказательство. Так как квазиизоморфны R-модули M_1 и M_2, то квазиизоморфны фактор-модули M_1/TM_1 и M_2/TM_2. Но структура R-модуля на M_1/TM_1 и M_2/TM_2 совпадает со структурой векторного пространства над полем Q, следовательно, M_1/TM_1 и M_2/TM_2 квазиизоморфны как векторные пространства. Учитывая, что из квазиизоморфности векторных пространств над Q вытекает их изоморфность, получаем, что $M_1/TM_1 \cong M_2/TM_2$ и $r^*(M_1) = r^*(M_2)$.

Предложение 1. *Если L — подмодуль конечно порожденного R-модуля M такой, что $r^*(L) = r^*(M)$, то $(1-\varepsilon)M = (1-\varepsilon)L$ для некоторого идемпотента $(1-\varepsilon) \in R$ вида (b).*

Доказательство. Пусть $r^*(L) = r^*(M)$, тогда M/L — конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 0. Следовательно, существует такой идемпотент $1-\varepsilon \in R$ вида (b), что $(1-\varepsilon)M = (1-\varepsilon)L$.

Предложение 2. *R-модули M и L (не обязательно конечно порожденные) квазиравны тогда и только тогда, когда $(1-\varepsilon)M = (1-\varepsilon)L$ и εM квазиравен εL, где $(1-\varepsilon)$ — некоторый идемпотент вида (b) кольца R.*

Доказательство. Если M и L — квазиравные R-модули, то $M/(M\cap L)$ и $L/(M\cap L)$ — конечные R-модули, а значит,

$$(1-\varepsilon)M = (1-\varepsilon)(M\cap L) = (1-\varepsilon)L$$

для некоторого идемпотента $(1-\varepsilon)\in R$ вида (b).

Так как R-модули M и L квазиравны, то и R-модули εM и εL квазиравны.

Обратное утверждение очевидно.

Теорема 1. *Конечно порожденные R-модули квазиизоморфны тогда и только тогда, когда они отличаются (с точностью до изоморфизма) конечными прямыми слагаемыми.*

Доказательство. Пусть $\frac{1}{m}\otimes\alpha : M_1 \to M_2$ и $\frac{1}{k}\otimes\beta : M_2\to M_1$ — пара взаимно обратных квазиизоморфизмов конечно порожденных R-модулей, тогда

$$\alpha\beta = mk\cdot 1_{M_2} \quad \text{и} \quad \beta\alpha = mk\cdot 1_{M_1}.$$

Построим такой идемпотент $(1-\varepsilon)\in R$ вида (b), что если простое число p делит число mk, то $\varepsilon_p(1-\varepsilon)=0$. Тогда

$$\beta(\alpha(1-\varepsilon)M_1) = mk(1-\varepsilon)M_1 \quad \text{и} \quad \alpha(\beta(1-\varepsilon)M_2) = mk(1-\varepsilon)M_2. \tag{1}$$

Отметим, что для любого R-модуля $(1-\varepsilon_p)M$ справедливо равенство

$$q\cdot(1-\varepsilon_p)M = (1-\varepsilon_p)M$$

для каждого простого $q\neq p$. Тогда из построения идемпотента $(1-\varepsilon)$ следует, что

$$mk(1-\varepsilon)M_1 = (1-\varepsilon)M_1 \quad \text{и} \quad mk(1-\varepsilon)M_2 = (1-\varepsilon)M_2. \tag{2}$$

Таким образом, из (1) и (2) вытекает, что $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ — автоморфизмы R-модулей $(1-\varepsilon)M_2$ и $(1-\varepsilon)M_1$ соответственно, а значит, $(1-\varepsilon)M_2\cong(1-\varepsilon)M_1$.

Из квазиизоморфности R-модулей M_1 и M_2 следует квазиизоморфность $\widehat{Z}_p$-модулей ε_pM_1 и ε_pM_2. Но ε_pM_1 и ε_pM_2 — конечно порожденные $\widehat{Z}_p$-модули, значит, они могут отличаться (с точностью до изоморфизма) только конечными прямыми слагаемыми. Отсюда следует, что квазиизоморфные R-модули M_1 и M_2 могут отличаться (с точностью до изоморфизма) только конечными прямыми слагаемыми.

Обратное утверждение теоремы очевидно.

Учитывая, что любой конечный R-модуль раскладывается в прямую сумму циклических R-модулей, получаем

Следствие 1. *Если конечно порожденный R-модуль квазиизоморфен вполне разложимому R-модулю, то он вполне разложим.*

Таким образом, класс конечно порожденных вполне разложимых R-модулей совпадает с классом конечно порожденных почти вполне разложимых R-модулей.

В [1, 2] показано, что класс конечно порожденных R-модулей локально свободной обобщенной характеристики совпадает с хорошо известным классом $\mathscr{G}$, введенным в [5]. В [1] и [2] также доказано, что любой групповой гомоморфизм в этом классе является R-модульным. Учитывая все вышесказанное, получаем

Следствие 2. *Группы из класса $\mathscr{G}$ квазиизоморфны тогда и только тогда, когда они отличаются (с точностью до изоморфизма) конечными прямыми слагаемыми.*

Так как

$$M = \varepsilon_{p_1} M \oplus (1 - \varepsilon_{p_1})M = \varepsilon_{p_1} M \oplus \varepsilon_{p_2} M \oplus (1 - \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2})M = \dots$$

для любого R-модуля M, неразложимыми являются только R-модули Q, $\widehat{Z}_p$, $\widehat{Q}_p$, Z_{p^k} и Z_{p^∞}. Не намного улучшает ситуацию переход к категории квазигомоморфизмов. Кроме перечисленных R-модулей в этой категории будут неразложимы также все R-модули, имеющие только конечные прямые слагаемые (это непосредственно следует из теоремы 1). В частности, в категории квазигомоморфизмов неразложим любой циклический R-модуль вида R_χ, где характеристика χ не содержит символов ∞. В следующем параграфе мы построим категорию R-модулей, более «богатую» неразложимыми объектами, все конечно порожденные R-модули в которой раскладываются в прямую сумму неразложимых объектов.

§ 3. Псевдогомоморфизмы *R*-модулей

Определение 5. Пусть M_1 и M_2 — произвольные конечно порожденные R-модули. Элементы R-модуля $\mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)/\,\mathrm{Hom}_R(M_1, TM_2)$ будем называть *псевдогомоморфизмами* из M_1 в M_2. Обратимые псевдогомоморфизмы будем называть *псевдоизоморфизмами.*

Если существует псевдоизоморфизм из M_1 в M_2, то эти R-модули будем называть *псевдоизоморфными* и писать $M_1 \risingdotseq M_2$.

Предложение 3. *Для конечно порожденных R-модулей M_1 и M_2 следующие утверждения равносильны:*

1) *M_1 и M_2 псевдоизоморфны;*

2) *$(1-\varepsilon)M_1 \cong (1-\varepsilon)M_2$ при некотором идемпотенте $(1-\varepsilon) \in R$ вида (b);*

3) *$M_1 \oplus X \cong M_2 \oplus Y$, где X и Y — некоторые конечно порожденные R-модули псевдорационального ранга 0.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $\overline{\varphi} = \varphi + \mathrm{Hom}_R(M_1, TM_2)$ — псевдоизоморфизм из M_1 в M_2, а $\overline{\varphi}' = \varphi' + \mathrm{Hom}_R(M_2, TM_1)$ — псевдоизоморфизм из M_2 в M_1, обратный к $\overline{\varphi}$. Тогда $\varphi\varphi' = 1_{M_1} + \psi$ и $\varphi'\varphi = 1_{M_2} + \chi$, где 1_{M_1} и 1_{M_2} — тождественные отображения R-модулей M_1 и M_2 соответственно, $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M_1, TM_1)$ и $\chi \in \mathrm{Hom}_R(M_2, TM_2)$. Так как M_1 — конечно порожденный R-модуль, то $M_1 = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$, а тогда существует такой идемпотент $\varepsilon_1 \in R$ вида (a), что

$$(1-\varepsilon_1)\psi(x_1) = \dots = (1-\varepsilon_1)\psi(x_n) = 0,$$

следовательно, $(1-\varepsilon_1)\psi = 0$. Аналогично показывается существование такого идемпотента $\varepsilon_2 \in R$ вида (a), что $(1-\varepsilon_2)\chi = 0$. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, тогда

$$(1-\varepsilon)\varphi\varphi' = (1-\varepsilon)1_{M_1} \quad \text{и} \quad (1-\varepsilon)\varphi'\varphi = (1-\varepsilon)1_{M_2}.$$

Отсюда следует, что $(1-\varepsilon)\varphi$ — изоморфизм из $(1-\varepsilon)M_1$ в $(1-\varepsilon)M_2$.

$2 \Rightarrow 3$. Если $(1-\varepsilon)M_1 \cong (1-\varepsilon)M_2$, то $M_1 \oplus X \cong M_2 \oplus Y$, где $X = \varepsilon M_2$ и $Y = \varepsilon M_1$ — конечно порожденные R-модули псевдорационального ранга 0.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $\varphi_1 : M_1 \oplus X \to M_2 \oplus Y$ — изоморфизм, а φ_2 — обратный к нему изоморфизм. Так как X и Y — конечно порожденные R-модули, то

$(1-\varepsilon)X = (1-\varepsilon)Y = 0$ для некоторого идемпотента $(1-\varepsilon) \in R$ вида (b). Тогда $(1-\varepsilon)\varphi_1$ — гомоморфизм из M_1 в M_2, а $(1-\varepsilon)\varphi_2$ — гомоморфизм из M_2 в M_1, причем

$$(1-\varepsilon)\varphi_1(1-\varepsilon)\varphi_2 = 1_{(1-\varepsilon)M_1} \quad \text{и} \quad (1-\varepsilon)\varphi_2(1-\varepsilon)\varphi_1 = 1_{(1-\varepsilon)M_2}.$$

Отсюда следует, что $(1-\varepsilon)\varphi_1 + \mathrm{Hom}_R(M_1, TM_2)$ и $(1-\varepsilon)\varphi_2 + \mathrm{Hom}_R(M_2, TM_1)$ — взаимно обратные псевдогомоморфизмы, т. е. M_1 и M_2 псевдоизоморфны.

Если для конечно порожденных R-модулей M_1 и M_2 выполняется

$$(1-\varepsilon)M_1 = (1-\varepsilon)M_2 \quad ((1-\varepsilon)M_1 \subseteq (1-\varepsilon)M_2)$$

при некотором идемпотенте $\varepsilon \in R$ вида (a), то будем говорить, что M_1 и M_2 *псевдоравны* (M_1 *псевдовложен* в M_2) и писать $M_1 \mathrel{\underset{\cdot}{=}} M_2$ ($M_1 \mathrel{\underset{\cdot}{\subsetneq}} M_2$).

R-модуль M неразложим в категории псевдогомоморфизмов, если из псевдоравенства $M \mathrel{\underset{\cdot}{=}} M_1 \oplus M_2$ всегда следует, что одно слагаемое имеет псевдорациональный ранг 0. Это равносильно тому, что в любом прямом разложении $M = M_1 \oplus M_2$ одно из слагаемых всегда имеет псевдорациональный ранг 0. Очевидно, что любой циклический R-модуль неразложим в этой категории.

Рассмотрим другие примеры конечно порожденных R-модулей, неразложимых в категории псевдогомоморфизмов.

Для каждого простого числа p построим независимую над Z систему элементов $\alpha_{1p}, \dots, \alpha_{np} \in \widehat{Z}_p$, где n — фиксированное натуральное число. Рассмотрим R-модуль M, порожденный элементами

$$x_1 = (\alpha_{1p})_{p\in P}, \dots, x_n = (\alpha_{np})_{p\in P} \in \prod_{p\in P} \widehat{Z}_p.$$

Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — произвольное разложение R-модуля M. Так как M конечно порожден, то M_1 и M_2 тоже конечно порождены,

$$M_1 = \langle y_1, \dots, y_s\rangle_R \quad \text{и} \quad M_2 = \langle z_1, \dots, z_t\rangle_R.$$

Пусть $y_i = r_{i1}x_1 + \dots + r_{in}x_n$, где $i \in \{1, \dots, s\}$ и все коэффициенты r_{ik} лежат в R. Тогда для некоторого идемпотента $(1-\varepsilon) \in R$ можно записать

$$(1-\varepsilon)y_i = (1-\varepsilon)|r_{i1}|x_1 + \dots + (1-\varepsilon)|r_{in}|x_n.$$

Если какое-то из чисел $|r_{ik}|$ ($i \in \{1, \dots, s\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$) не равно нулю, то из условия $\varepsilon_p(1-\varepsilon) \neq 0$ в силу независимости системы $\varepsilon_p x_1 = \alpha_{1p}, \dots, \varepsilon_p x_n = \alpha_{np}$ над Z следует, что $\varepsilon_p y_i \neq 0$ и, значит, $\varepsilon_p M_1 \neq 0$. Так как $M_1 \cap M_2 = 0$, для этого p имеем равенство $\varepsilon_p M_2 = 0$. Следовательно, $(1-\varepsilon)M_2 = 0$, т. е. $r^*(M_2) = 0$.

Если же все числа $|r_{ik}|$ равны нулю, то, очевидно, $r^*(M_1) = 0$. Таким образом, любое прямое разложение R-модуля M имеет слагаемое, псевдоравное 0, т. е. M неразложим в категории псевдогомоморфизмов.

Нетрудно видеть, что построенный выше R-модуль M имеет псевдорациональный ранг n, причем в качестве n можно взять любое натуральное число. Таким образом, из построенного примера следует, что *существуют R-модули, неразложимые в категории псевдогомоморфизмов, имеющие любой конечный псевдорациональный ранг.*

Теорема 2. *В категории псевдогомоморфизмов конечно порожденных R-модулей любой модуль раскладывается в (конечную) прямую сумму неразложимых в этой категории объектов.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по величине псевдорационального ранга.

Пусть M — конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 1. Так как $r^*(X \oplus Y) = r^*(X) + r^*(Y)$, в любом разложении $M = M_1 \oplus M_2$ одно из слагаемых имеет псевдорациональный ранг 0, т. е. M неразложим в категории псевдогомоморфизмов.

Предположим, что теорема верна для всех конечно порожденных R-модулей, псевдорациональный ранг которых меньше n. Рассмотрим конечно порожденный R-модуль M такой, что $r^*(M) = n$. Если M неразложим в категории квазигомоморфизмов, то $M = M$ — искомое разложение. Если же M разложим, то $M = M_1 \oplus M_2$, где $r^*(M_1) < n$ и $r^*(M_2) < n$. По предположению индукции M_1 и M_2 раскладываются в прямую сумму R-модулей, неразложимых в категории псевдогомоморфизмов, следовательно, таким же разложением обладает и R-модуль $M = M_1 \oplus M_2$.

Теорема 3. *Пусть M, L — произвольные R-модули, φ, ψ — произвольные гомоморфизмы из M в L. Тогда φ и ψ определяют один и тот же псевдогомоморфизм в том и только в том случае, когда совпадают индуцированные ими гомоморфизмы $\varphi' : M/TM \to L/TL$ и $\psi' : M/TM \to L/TL$.*

Доказательство. Гомоморфизмы φ и ψ определяют один и тот же псевдогомоморфизм тогда и только тогда, когда $\varphi - \psi \in \mathrm{Hom}_R(M, TL)$, а это равносильно тому, что

$$(\varphi' - \psi')(m + TM) = (\varphi - \psi)(m) + TL = 0$$

для любого $m \in M$, т. е. $\varphi' = \psi'$.

Рассмотрим некоторые свойства псевдопрямых разложений конечно порожденных R-модулей.

1. *Если $M \oplus L \underset{\cdot}{=} M \oplus N$, то $L \underset{\cdot}{\cong} N$.*

Из $M \oplus L \underset{\cdot}{=} M \oplus N$ следует, что

$$(1 - \varepsilon)M \oplus (1 - \varepsilon)L = (1 - \varepsilon)M \oplus (1 - \varepsilon)N.$$

Факторизуя по $(1 - \varepsilon)M$, получаем $(1 - \varepsilon)L \cong (1 - \varepsilon)N$, т. е. $L \underset{\cdot}{\cong} N$.

2. *Если $M \underset{\cdot}{=} M_1 \oplus M_2$ и $M_1 \subsetneq X \subsetneq M$, то $X \underset{\cdot}{=} M_1 \oplus (X \cap M_2)$.*

Пусть $(1 - \varepsilon)M = (1 - \varepsilon)M_1 \oplus (1 - \varepsilon)M_2$, тогда, очевидно,

$$(1 - \varepsilon)M_1 + (1 - \varepsilon)(X \cap M_2) = (1 - \varepsilon)M_1 \oplus (1 - \varepsilon)(X \cap M_2).$$

Если $x \in X$, то

$$(1 - \varepsilon)x = (1 - \varepsilon)m_1 + (1 - \varepsilon)m_2,$$

где $m_1 \in M_1$ и $m_2 \in M_2$. Тогда

$$(1 - \varepsilon)m_2 = (1 - \varepsilon)x - (1 - \varepsilon)m_1 \in (1 - \varepsilon)X.$$

Отсюда следует, что

$$(1 - \varepsilon)m_2 \in (1 - \varepsilon)(X \cap M_2) \text{ и } (1 - \varepsilon)M = (1 - \varepsilon)M_1 \oplus (1 - \varepsilon)(X \cap M_2),$$

т. е. $X \underset{\cdot}{=} M_1 \oplus (X \cap M_2)$.

Так как $\operatorname{Hom}_R(M, TM)$ является (левым) идеалом кольца эндоморфизмов $\mathbf{E}(M)$ R-модуля M, мы можем рассмотреть фактор-кольцо

$$\widetilde{\mathbf{E}}(M) = \mathbf{E}(M)/\operatorname{Hom}_R(M, TM).$$

Его элементы будем называть *псевдоэндоморфизмами* R-модуля M.

3. *Кольцо* $\widetilde{\mathbf{E}}(M)$ *является* Q*-алгеброй с единицей, и произвольный левый идеал кольца* $\widetilde{\mathbf{E}}(M)$ *есть векторное пространство над полем* Q.

4. *В кольце* $\widetilde{\mathbf{E}}(M)$ *выполняется условие минимальности для левых* (*и для правых*) *идеалов.*

Так как M — конечно порожденный R-модуль, то $\mathbf{E}(M)$ имеет конечный псевдорациональный ранг, следовательно, идеалы в $\widetilde{\mathbf{E}}(M)$ являются векторными пространствами над Q, размерность которых не превосходит $r^*\mathbf{E}(M)$.

5. *Если* $\xi = \xi_0 + \operatorname{Hom}_R(M, TM)$ — *идемпотент кольца* $\widetilde{\mathbf{E}}(M)$, *то* $(1-\varepsilon)\xi_0$ — *идемпотент кольца* $\mathbf{E}(M)$ *при некотором идемпотенте* $\varepsilon \in R$ *вида* (a).

Пусть $\xi^2 = \xi$, тогда $\xi_0^2 = \xi_0 + \psi$, где $\psi \in \operatorname{Hom}_R(M, TM)$. Так как $(1-\varepsilon)\psi = 0$ при некотором идемпотенте $\varepsilon \in R$ вида (a), то $(1-\varepsilon)\xi_0^2 = (1-\varepsilon)\xi_0$, т. е. $(1-\varepsilon)\xi_0$ — идемпотент кольца $\mathbf{E}(M)$.

6. *В категории псевдогомоморфизмов конечно порожденных* R*-модулей расщепляются идемпотенты.*

Пусть $\xi = \xi_0 + \operatorname{Hom}_R(M, TM)$ — произвольный идемпотент кольца $\widetilde{\mathbf{E}}(M)$, тогда $(1-\varepsilon)\xi_0$ — идемпотент кольца $\mathbf{E}(M)$ для некоторого идемпотента $\varepsilon \in R$ вида (a). Из этого следует, что $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_1 = (1-\varepsilon)\xi_0(M)$ и $M_2 = \ker(1-\varepsilon)\xi_0$. Пусть $f : M_1 \to M$ — вложение и $g : M \to M_1$ — проекция, тогда $fg = 1_{M_1}$ и $gf = (1-\varepsilon)\xi_0$. Отсюда

$$(f + \operatorname{Hom}_R(M_1, TM))(g + \operatorname{Hom}_R(M, TM_1)) = 1_{M_1} + \operatorname{Hom}_R(M_1, TM_1),$$

$$(g + \operatorname{Hom}_R(M, TM_1))(f + \operatorname{Hom}_R(M_1, TM)) = (1-\varepsilon)\xi_0 + \operatorname{Hom}_R(M, TM) = \xi.$$

Таким образом, ξ расщепляется.

Известно, что артиново кольцо с единицей не имеет разложений в прямую сумму ненулевых левых идеалов в том и только том случае, когда оно является локальным кольцом (т. е. его необратимые элементы образуют идеал). Таким образом, из свойств 4 и 5 следует

Предложение 4. *Кольцо псевдоэндоморфизмов конечно порожденного* R*-модуля* M *локально тогда и только тогда, когда* M *неразложим в категории псевдогомоморфизмов.*

Так как категория псевдогомоморфизмов конечно порожденных R-модулей является аддитивной категорией с расщепляющимися идемпотентами, в ней выполняется теорема Крулля — Ремака — Шмидта (см. [9]).

Пусть A — sp-группа, $E_t(A) = \operatorname{Hom}(A, t(A))$ и $E_f(A) = \{\varphi : A \to A \mid \varphi(A)$ содержится в сумме конечного числа компонент $A_p\}$. П. А. Крылов рассмотрел категорию $\mathscr{W}$, объекты которой суть sp-группы A такие, что $E_t(A) = E_f(A)$, а множеством морфизмов $\operatorname{Hom}_{\mathscr{W}}(A, B)$ является $\operatorname{Hom}(A, B)/\operatorname{Hom}(A, t(B))$. В [2] он доказал, что в категории $\mathscr{W}$ выполняется теорема Крулля — Ремака — Шмидта. Объекты из $\mathscr{W}$ (как и все sp-группы) являются R-модулями, причем для любых $A, B \in \mathscr{W}$ имеем $\operatorname{Hom}_R(A, B) = \operatorname{Hom}(A, B)$ и $TA = t(A)$. Поэтому категорию $\mathscr{W}$ можно считать подкатегорией псевдогомоморфизмов R-модулей.

Заметим, также, что класс $\mathscr{G}$ состоит из групп вида $G = Q^n \oplus A$, где $A \in \mathscr{W}$ и все p-компоненты группы A являются конечными группами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fomin A. A.* Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Trends in Mathematics. Basel: Birkhäuser-Verl., 1999. P. 87–100.
2. *Крылов П. А.* Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, № 3. С. 793–812.
3. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г., Подберезина Е. И.* Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестн. ТГУ. 2000. Т. 269. С. 47–51.
4. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974, 1977. Т. I, II.
5. *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Commun. Algebra. 1994. V. 22. P. 1161–1176.
6. *Чеглякова С. В.* Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Фундаментальная и прикладная математика. 2001. Т. 7, № 2. С. 627–629.
7. *Царев А. В.* Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 3. С. 437–448.
8. *Зиновьев Е. Г.* Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел // Вестн. ТГУ. 2006. Т. 290. С. 46–47.
9. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т. I.

Статья поступила 15 января 2007 г., окончательный вариант — 14 декабря 2007 г.

Царев Андрей Валерьевич
Московский педагогический гос. университет,
ул. Краснопрудная, 14, Москва 107140
an-tsarev@yandex.ru