Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 512

МУЛЬТИКАТЕГОРИИ И МНОГООБРАЗИЯ МНОГОСОРТНЫХ АЛГЕБР

С. Н. Тронин

Аннотация. Дано прямое доказательство того, что каждое многообразие многосортных универсальных алгебр рационально эквивалентно многообразию алгебр над некоторой FSet-мультикатегорией (многосортным аналогом FSet-операды), причем мультикатегория непосредственно строится, исходя из свободных алгебр данного многообразия.

Ключевые слова: многосортная алгебра, мультикатегория, свободная алгебра, многообразие, рациональная эквивалентность.

В работе [1] введено понятие обобщенных операд — операд над вербальными категориями. При этом случай операд над вербальной категорией Id соответствовал тому, что в литературе называется несимметрическими операдами, а случай операд над Σ — наиболее распространенному случаю симметрических операд. В [1] показано, что многообразия абстрактных (односортных) клонов и операд над вербальной категорией FSet рационально эквивалентны. В [2] установлено, что рационально эквивалентными будут также многообразие алгебр над операдой и многообразие алгебр над соответствующим ей клоном, которое, как хорошо известно, рационально эквивалентно тому многообразию алгебр, свободные алгебры которого образуют этот клон. Таким образом, в первом приближении можно утверждать, что теория (обобщенных) операд и многообразий алгебр над ними — это традиционная теория многообразий универсальных алгебр «по модулю» рациональной эквивалентности многообразий. Как известно, понятие рациональной эквивалентности введено А. И. Мальцевым [3] (см. также [4]).

В данной работе сформулированные выше результаты из [1, 2] обобщаются на случай многосортных (или многоосновных) алгебр. Показано, как для произвольного многообразия многосортных алгебр семейство его свободных алгебр с конечными базисами превращается в многосортную FSet-операду (иначе называемую мультикатегорией) и, наоборот, компоненты FSet-мультикатегории являются свободными алгебрами в многообразии алгебр над этой мультикатегорией. Основной результат состоит в том, что описанное соответствие приводит к рационально эквивалентным многообразиям алгебр. Идея доказательства несколько иная, чем в [1], и не использует понятия клона.

Содержание работы таково. В § 1 развивается необходимый для дальнейшего формализм многосортных вербальных категорий. Определяются мультикатегории над многосортными вербальными категориями. В литературе мультикатегории называются также S-операдами (S — множество или класс объектов, или сортов), так что речь фактически идет о многосортных операдах над многосортными вербальными категориями. «Обычные» операды — это мультикатегории с одним объектом (аналогично тому, как полугруппы — категории с одним объектом). Другой частный случай понятия мультикатегории — это «обычные» категории. Определяется также понятие алгебры над мультикатегорией, являющееся многосортным аналогом понятия алгебры над операдой.

В § 2 показано, как семейство свободных алгебр с конечными базисами данного многообразия многосортных алгебр можно превратить в мультикатегорию над максимальной вербальной категорией FSet. Показано также, что имеется и обратное преобразование.

В § 3 доказан основной результат о рациональной эквивалентности между многообразием M многосортных алгебр соответствующей M (в смысле, описанном в § 2) FSet-мультикатегорией.

Используются обозначения, определения и результаты работ [1, 2].

§ 1. Многосортные вербальные категории и мультикатегории над вербальными категориями

Пусть S — некоторый класс объектов. Через S^* обозначим класс всевозможных конечных упорядоченных последовательностей элементов S (слов в алфавите S, или строк из символов алфавита S). По определению в этом классе есть пустая строка e. Элементы S^* будут записываться в виде $\bar{s} = s_1 \dots s_n \in S^*$, $s_i \in S$, $1 \le i \le n$. Верхняя черта будет означать элемент из S^*, ее отсутствие — элемент из S. Приписывание слов друг к другу определяет на S^* ассоциативное умножение, и через $\bar{s}^m$ будет, как обычно, обозначаться m-я степень слова (строки) $\bar{s}$.

Рассмотрим категорию FSet (см. [1]) и морфизм $f : [n] \to [m]$ этой категории. Напомним, что здесь $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ и отображение f таково, что $f(i) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = 0$. Положим $\bar{s}f = s_{f(1)} \dots s_{f(n)}$. Ясно, что $\bar{s}(fg) = (\bar{s}f)g$.

Определим две категории, классами объектов которых является S^*. В категории FSet_S морфизмами из $\bar{u} = u_1 \dots u_n$ в $\bar{v} = v_1 \dots v_m$ $(u_i, v_j \in S)$ будут все отображения (точнее, морфизмы FSet) $f : [n] \to [m]$ такие, что $\bar{u} = \bar{v}f$. Будем говорить, что отображение f *представляет* морфизм $\bar{u} \to \bar{v}$ (или что этот морфизм *представляется* отображением f). Одно и то же отображение, таким образом, может представлять многие морфизмы FSet_S, однако часто будет удобно обозначать одним и тем же символом (например, f) и морфизм категории FSet_S, и представляющий его морфизм из FSet. Композиция морфизмов FSet_S определяется очевидным образом. Отметим одно важное обстоятельство. Если в слове $\bar{v}$ все символы различны, то по морфизму $\bar{u} \to \bar{v}$ из категории FSet_S однозначно определяется морфизм f из категории FSet такой, что $\bar{v}f = \bar{u}$. Это свойство (в справедливости которого легко убедиться) в дальнейшем окажется полезным при доказательстве коммутативности некоторых диаграмм.

В категории P_S (многосортном обобщении категории P из [1]) морфизмами из $\bar{s} \in S^*$ в $\bar{t} = t_1 \dots t_m$ (где $t_i \in S$, $1 \le i \le m$) являются всевозможные выражения вида $\binom{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m}{t_1, \dots, t_m}$, где $\bar{s}_i$ — подслова $\bar{s}$, и $\bar{s} = \bar{s}_1 \dots \bar{s}_m$. Это обозначение аналогично обозначению подстановки: строка $\bar{s}_i$ располагается над символом t_i. Если $\alpha = \binom{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m}{t_1, \dots, t_m} \in P_S(\bar{s}, \bar{t})$, $\bar{s}_i = s_{i,1} \dots s_{i,k_i}$, $1 \le i \le m$, где $s_{i,j} \in S$, и $\beta \in P_S(\bar{u}, \bar{s})$, то β имеет вид $\binom{\bar{u}_{1,1}, \dots, \bar{u}_{1,k_1}, \dots, \bar{u}_{m,1}, \dots, \bar{u}_{m,k_m}}{s_{1,1}, \dots, s_{1,k_1}, \dots, s_{m,1}, \dots, s_{m,k_m}}$, где $\bar{u}_{i,j} \in S^*$. Тогда положим $\alpha\beta = \binom{(\bar{u}_{1,1} \dots \bar{u}_{1,k_1}), \dots, (\bar{u}_{m,1} \dots \bar{u}_{m,k_m})}{t_1, \dots, t_m}$, где выражения в скобках в верхней строке являются результатом приписывания слов друг к другу. Если класс S состоит из одного элемента, то объектами P_S можно считать множества $[n]$, а морфизм $\binom{\bar{s}_1,\dots,\bar{s}_m}{t_1,\dots,t_m}$ категории P_S однозначно определяется упорядоченным семейством $(n_1,\dots,n_m)$, где n_i — длина строки $\bar{s}_i$. Легко убедиться, что имеет место изоморфизм такой категории P_S и категории P из [1]. Морфизмы P_S так же, как и морфизмы P, будем называть *разбиениями*.

И в категории FSet_S, и в категории P_S операция приписывания друг к другу слов-объектов является функтором от двух аргументов, обладающим свойством строгой ассоциативности. Пусть даны морфизмы $f_1 : \bar{u}_1 \to \bar{t}_1$, $f_2 : \bar{u}_2 \to \bar{t}_2$ категории FSet_S. Обозначим результат действия этого функтора на морфизмах через $f_1 \sqcup f_2$. Это обозначение полностью согласуется с определением $f_1 \sqcup f_2$ в категории FSet, данном в [1]. Таким образом, $(\bar{t}_1\bar{t}_2)(f_1 \sqcup f_2) = \bar{u}_1\bar{u}_2$. Аналогичную операцию можно определить для морфизмов категории P_S.

Напомним некоторые факты из [1]. Пусть дан морфизм $f : [k] \to [m]$ категории FSet, и пусть $\alpha : [n] \to [m]$ — разбиение, т. е. неубывающее отображение. Известно (см. [1]), что α можно отождествить с последовательностью $(n_1,\dots,n_m)$, где $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$. В категории FSet существует (категорное) расслоенное произведение следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} [n]\times_{[m]}[k] & \xrightarrow{\pi_2} & [k] \\ {\scriptstyle\pi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ [n] & \xrightarrow{\alpha} & [m]. \end{array} \tag{1}$$

Пусть a и b — натуральные числа. При $a \le b$ положим $[a,b] = \{a, a+1,\dots,b\}$, при $a > b$ полагаем $[a,b] = \varnothing$. Множества вида $[a,b]$ будут называться *отрезками.* Напомним один технический результат.

Лемма 1.1 [1]. *В категории* FSet *расслоенное произведение* (1) *устроено следующим образом. Пусть $\alpha = (n_1,\dots,n_m)$. В качестве $[n]\times_{[m]}[k]$ можно принять объект $[n_{f(1)}+\dots+n_{f(k)}]$. При этом π_2 становится неубывающей сюръекцией, которую можно записать в виде разбиения как $(n_{f(1)},\dots,n_{f(k)})$. Проекция π_1 описывается так: ее ограничение на каждый отрезок $[n_{f(1)}+\dots+n_{f(j-1)}+1, n_{f(1)}+\dots+n_{f(j)}]$ есть неубывающая биекция на отрезок $[n_1+\dots+n_{f(j)-1}+1, n_1+\dots+n_{f(j)}]$ и $\pi_1(0) = 0$.*

В случае, когда $n_{f(j)} = 0$, из сформулированного выше соглашения следует, что оба отрезка пусты. В общем случае речь идет о конечных линейно упорядоченных множествах, каждое из которых состоит из $n_{f(j)}$ элементов. При этом выражение $n_{f(1)}+\dots+n_{f(j)}$ надо понимать как $\sum\limits_{i=1}^{j} n_{f(i)}$, а $n_1+\dots+n_{f(j)}$ — как $\sum\limits_{i=1}^{f(j)} n_i$. Отметим, что при $j = 1$ имеются в виду отрезки $[1, n_{f(1)}]$ и $[n_1+\dots+n_{f(1)-1}+1, n_1+\dots+n_{f(1)}]$.

Объект $[n]\times_{[m]}[k] = [n_{f(1)}+\dots+n_{f(k)}]$ обозначен в [1] (следуя принятым в литературе по теории категорий образцам) через $f^*[n]$, а проекция π_1 — через $f^*\alpha$. Так как в категории FSet изоморфные объекты совпадают, в диаграмме (1) всегда имеет место равенство $[n]\times_{[m]}[k] = [n_{f(1)}+\dots+n_{f(k)}]$.

Определим теперь аналоги всего этого в категориях FSet_S и P_S. Пусть $f : [k] \to [m]$ — морфизм категории FSet. Этим же символом обозначим морфизм $\bar{u} \to \bar{t}$ категории FSet_S такой, что $\bar{t}f = \bar{u}$. Таким образом, $\bar{u} = u_1\dots u_k$, $\bar{t} =$

$t_1 \ldots t_m$ и $u_i = t_{f(i)}$ для всех i. Рассмотрим морфизм $\alpha : \bar{s} \to \bar{t}$ категории P_S. Пусть $\alpha = \binom{\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_m}{t_1,\ldots,t_m}$.

Лемма 1.2. *Существует единственное слово* $\overline{w} = \bar{s}_{f(1)} \ldots \bar{s}_{f(k)}$ *такое, что* $\bar{s}(f^*\alpha) = \overline{w}$ *и определен морфизм категории* P_S *из* $\overline{w}$ *в* $\bar{u}$ *вида* $\binom{\bar{s}_{f(1)},\ldots,\bar{s}_{f(k)}}{u_1\ ,\ldots,\ u_k}$.

Доказательство состоит в простой проверке. $\square$

Пусть даны морфизм $f : \bar{u} \to \bar{t}$ категории FSet_S и морфизм $\alpha = \binom{\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_m}{t_1,\ldots,t_m} : \bar{s} = \bar{s}_1 \ldots \bar{s}_m \to \bar{t} = t_1 \ldots t_m$ категории P_S. В категории FSet_S определим объект $f^*\bar{s} = \bar{s}_{f(1)} \ldots \bar{s}_{f(k)}$ и морфизм $f^*\alpha : f^*\bar{s} \to \bar{s}$ (существующие по лемме 1.2). Сформулируем многосортный вариант определения вербальной категории из [1].

Определение 1.1. Рассмотрим подкатегорию $W \subseteq \mathrm{FSet}_S$ такую, что $\mathrm{Ob}(W) = \mathrm{Ob}(\mathrm{FSet}_S)$, морфизмы которой удовлетворяют следующим условиям:

1) если $f, g \in \mathrm{Mor}(W)$, то $f \sqcup g \in \mathrm{Mor}(W)$;

2) если $f : \bar{u} \to \bar{t}$ — морфизм из W, то для любого $\alpha \in P_S(\bar{s}, \bar{t})$ имеет место включение $f^*\alpha \in W(f^*\bar{s}, \bar{s})$.

Категорию W с указанными выше двумя свойствами будем называть *вербальной* (или вербальной подкатегорией категории FSet_S).

Отметим, что если S — множество из одного элемента, то это определение эквивалентно определению вербальной подкатегории категории FSet из [1].

Пример 1.1. Пусть W — вербальная подкатегория FSet (см. [1]) и S — произвольный класс. Тогда определена вербальная подкатегория W_S категории FSet_S, морфизмами которой служат все морфизмы FSet, представляемые морфизмами из W.

Теорема 1.1. *Для любого класса объектов S существует взаимно однозначное соответствие между вербальными подкатегориями категории* FSet_S *и вербальными подкатегориями категории* FSet.

Доказательство. Соответствие $W \mapsto W_S$ описано выше. Обратно, пусть W' — некоторая вербальная подкатегория категории FSet_S. Определим подкатегорию W категории FSet следующим образом. Морфизм $f : [n] \to [m]$ категории FSet считается морфизмом W, если f представляет морфизм $\bar{v} \to \bar{u}$ категории W'. В частности, должно выполняться равенство $\bar{v}f = \bar{u}$. Пусть $\bar{x} = x_1 \ldots x_m \in S^*$ — произвольная строка. Рассмотрим $\alpha = \binom{x_1,\ldots,x_m}{v_1,\ldots,v_m} \in P_S$. По определению категории W' морфизм $f^*\alpha$ принадлежит категории W'. Но это фактически морфизм, соответствующий тому же отображению f, только действующему на другую строку, а именно $f : \bar{x}f \to \bar{x}$. Отсюда следует, что в определении f как морфизма W можно утверждать, что для *каждой* строки $\bar{v}$ длины m морфизм $\bar{v}f \to \bar{v}$, представленный отображением f, есть морфизм категории W'. Теперь легко доказывается, что W — подкатегория категории FSet, обладающая всеми свойствами вербальной подкатегории. Например, пусть даны морфизм $f : [k] \to [m]$ категории W и разбиение $\alpha = (n_1, \ldots, n_m)$, которое рассматривается в том числе и как морфизм $[n] \to [m]$ из FSet, где $n = n_1 + \cdots + n_m$. Рассмотрим морфизм $f : \bar{v}f \to \bar{v}$ категории W' и разбиение $\beta = \binom{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m}{v_1,\ldots,v_m} \in P_S$, где для каждого i строка $\bar{x}_i$ имеет длину n_i. Тогда морфизм $f^*\beta : \bar{x}_{f(1)} \ldots \bar{x}_{f(k)} \to \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m$, во-первых, является морфизмом W', а во-вторых, по самому своему определению совпадает с морфизмом, представляемым отображением $f^*\alpha : [n_{f(1)} + \cdots + n_{f(k)}] \to [n_1 + \cdots + n_m]$. Но это означает, что $f^*\alpha$ есть морфизм W. Из определения W также ясно, что $W' = W_S$. Взаимная обратность соответствий $W \mapsto W_S$ и $W' \mapsto W$ очевидна. $\square$

Замечание 1.1. Теорема 1.1 означает, что каждый раз, когда возникает необходимость использовать вербальные категории, можно считать, что имеются в виду категории, определенные в [1]. Если дано множество сортов, то многосортные конструкции однозначно строятся, исходя из односортных. Поэтому в дальнейшем, когда речь пойдет о вербальных категориях, не будет проводиться различий между односортным и многосортным случаями. Однако подчеркнем, что это относится только к вербальным категориям.

Мультикатегорию можно определить как обобщение категории, в котором «стрелки» имеют не одно «начало» (объект), а несколько. Двойственным образом можно рассматривать и стрелки с одним началом и несколькими концами. Понятие мультикатегории впервые появилось в работе [5]. Эквивалентное понятию мультикатегории понятие S-операды (многосортной операды с множеством или классом сортов S) введено в книге [6]. Из современных работ по мультикатегориям отметим [7–9]. В ряде этих работ понятие мультикатегории существенно обобщено. Следует также упомянуть книгу [10], в которой ламбековские мультикатегории [5] используются в теории доказательств. Для приложений к многосортным универсальным алгебрам нам потребуется исходный вариант определения, который будет расширен в ином направлении, чем в указанных выше работах [8, 9], а именно с привлечением вербальных категорий.

Определение 1.2. *Мультикатегория R над вербальной категорией W* (или *W-мультикатегория*) есть следующий комплекс данных. Во-первых, задан класс объектов $S = \mathrm{Ob}(R)$. Далее, для каждого (конечного, в том числе, возможно, пустого) слова $\bar{x} = x_1 \dots x_n$ в алфавите S и объекта $y \in S$ определено множество $R(\bar{x}, y)$ (возможно, пустое). Элементы $\omega \in R(\bar{x}, y)$ будем называть *мультистрелками*, или *мультиморфизмами мультикатегории* R, и записывать в виде $\omega : \bar{x} \to y$.

Для непустых множеств мультистрелок определена операция композиции:

$$R(y_1 \dots y_m, z) \times R(\bar{x}_1, y_1) \times \dots \times R(\bar{x}_m, y_m) \longrightarrow R(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m, z),$$

которая будет обозначаться следующим образом:

$$(\omega, \omega_1, \dots, \omega_m) \mapsto \omega\omega_1 \dots \omega_m = \omega(\omega_1 \dots \omega_m).$$

Здесь $\bar{x}_i = x_{i1} x_{i2} \dots x_{in_i}$, $\omega_i \in R(\bar{x}_i, y_i)$, $1 \le i \le m$, $\omega \in R(y_1 \dots y_m, z)$.

Для операции композиции должны выполняться следующие свойства.

1. Ассоциативность. Для тех наборов стрелок, для которых композиции существуют (здесь $\bar{\gamma}_i = \gamma_{i,1} \dots \gamma_{i,n_i}$), имеет место равенство

$$(\alpha\beta_1 \dots \beta_m)(\bar{\gamma}_1 \dots \bar{\gamma}_m) = \alpha(\beta_1\bar{\gamma}_1) \dots (\beta_m\bar{\gamma}_m).$$

2. Существование единиц. Для каждого объекта $x \in S$ в $R(x, x)$ существует стрелка 1_x, и для любой стрелки $\omega \in R(x_1 \dots x_m, y)$ должны выполняться соотношения $\omega 1_{x_1} 1_{x_2} \dots 1_{x_m} = \omega = 1_y \omega$.

Следующий пункт определения мультикатегории состоит в том, что для каждого $t \in S$ соответствие $\bar{s} \mapsto R(\bar{s}, t)$ есть контравариантный функтор из категории W_S^{op} (двойственной к категории W_S) в категорию множеств. Его действие обозначается так: если $f \in W_S(\bar{s}, \bar{u})$, $\omega \in R(\bar{s}, t)$, то $R(f)(\omega) = \omega f \in R(\bar{u}, t)$.

Отображение $R(f) : R(\bar{s}, t) \to R(\bar{u}, t)$ также будем иногда ради краткости обозначать через f. Требуется выполнение следующих соотношений.

3. Если $\omega \in R(s_1 \dots s_m, t)$, $\omega_i \in R(\bar{u}_i, s_i)$, $f_i : \bar{v}_i \to \bar{u}_i$ — морфизмы категории W_S, $1 \le i \le m$, то имеет место тождество

$$\omega(\omega_1 f_1) \dots (\omega_m f_m) = (\omega\omega_1 \dots \omega_m)(f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m).$$

4. Если $\omega \in R(\bar{s}, t)$, где длина $\bar{s}$ равна k, $\omega_i \in R(\overline{w}_i, u_i)$, $1 \le i \le m$, $\bar{u} = u_1 \dots u_m$, $f : \bar{s} \to \bar{u}$ является морфизмом W_S, представленным отображением $f : [k] \to [m]$, $\alpha = \binom{\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_m}{u_1, \dots, u_m}$, $1 \le i \le m$, то имеет место тождество

$$(\omega f)\omega_1 \dots \omega_m = (\omega\omega_{f(1)} \dots \omega_{f(k)})(f^* \alpha).$$

Необходимо помнить, что в выражении ωf морфизм f есть морфизм категории W_S^{op}, двойственной к категории W_S.

Вот первые примеры мультикатегорий.

Пример 1.2. Любая W-операда в смысле работы [1] — это то же самое, что W-мультикатегория с одним объектом.

Пример 1.3. Любая категория R в соответствии с определением 1.2 является мультикатегорией (над какой угодно вербальной категорией), у которой все $R(\bar{x}, y)$ пусты, если слово $\bar{x}$ состоит более чем из одного символа.

Определение 1.3. *Алгебра* A над W-мультикатегорией R определяется как следующий комплекс данных. Каждому $x \in \mathrm{Ob}(R)$ сопоставляется множество $A(x)$, и для всех возможных $x_1, \dots, x_m, y \in S$ определены операции композиции:

$$R(x_1 \dots x_m, y) \times A(x_1) \times \dots \times A(x_m) \longrightarrow A(y).$$

Обозначения будут такими: $(\omega, a_1, \dots, a_m) \mapsto \omega a_1 \dots a_m = \omega(a_1 \dots a_m) = \omega\bar{a}$. Здесь $a_i \in A(x_i)$, $\omega \in R(x_1 \dots x_m, y)$, $\bar{a} = a_1 \dots a_m$, $1 \le i \le m$. Требуется, чтобы были выполнены следующие свойства.

1. Ассоциативность. Пусть $\bar{a}_i = a_{i,1} \dots a_{i,n_i}$, $a_{i,j} \in A(x_{i,j})$,

$$\omega_i \in R(x_{i,1} \dots x_{i,n_i}, y_i),\ 1 \le i \le m, \quad \omega \in R(y_1 \dots y_m, z).$$

Тогда

$$\omega(\omega_1 \bar{a}_1) \dots (\omega_m \bar{a}_m) = (\omega\omega_1 \dots \omega_m)(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m).$$

2. Действие единицы. Если $a \in A(x)$, то $1_x a = a$.

3. Если $f : [k] \to [m]$ — морфизм W, то $(\omega f)a_1 \dots a_m = \omega a_{f(1)} \dots a_{f(k)}$.

Гомоморфизмы алгебр определяются обычным образом. Категорию алгебр над W-мультикатегорией R будем обозначать через $\mathrm{Alg}(R_W)$.

§ 2. FSet-мультикатегории

Сформулируем минимально необходимый набор понятий и обозначений из теории многосортных (или многоосновных) универсальных алгебр. Само понятие многосортных алгебр появилось в [11]. Из книг на русском языке, в которых имеется информация по данной теме, можно выделить [12–15].

Категория S-множеств (или многосортных множеств с множеством или классом сортов S), обозначаемая через Set_S, имеет своими объектами семейства множеств $A = \{A_s \mid s \in S\}$. Морфизмы из A в $B = \{B_s \mid s \in S\}$ суть семейства $f = \{f_s \mid s \in S\}$, где f_s — отображение из A_s в B_s для каждого $s \in S$. Далее *отображениями* будут иногда называться сами такие морфизмы f. Суперпозиции морфизмов определяются покомпонентно.

Семейство (или класс) множеств $\Omega = \{\Omega_{\bar{s},t} \mid \bar{s} \in S^*, t \in S\}$ будет называться *сигнатурой*. Ω-алгебра — это S-множество $A = \{A_s \mid s \in S\}$ вместе с семейством операций композиции вида $\Omega_{\bar{s},t} \times A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n} \to A_t$, определенных для всех $\bar{s} = s_1 \dots s_n \in S^*$ и $t \in S$ (при $n = 0$ это отображения $\Omega_{e,t} \to A_t$, причем образы в A_t элементов из $\Omega_{e,t}$ называются *константами сорта* t), действие которых будет обозначаться так: $(\omega, a_1, \dots, a_n) \mapsto \omega a_1 \dots a_n = \omega\bar{a}$, где $\bar{a} = a_1 \dots a_n$ и $a_i \in A_{s_i}$ для всех i. Гомоморфизм h из Ω-алгебры A в Ω-алгебру B — это отображение (морфизм) S-множеств, переводящее константы A в одноименные константы B, а для всех $n > 0$ должны выполняться обычные соотношения: $h_t(\omega a_1 \dots a_n) = \omega h_{s_1}(a_1) \dots h_{s_n}(a_n)$, где индексы у компонент h обычно определяются из контекста и не пишутся. Категорию Ω-алгебр и их гомоморфизмов обозначим через $\mathrm{Alg}(\Omega)$.

Многообразием Ω-алгебр будем называть полную подкатегорию категории $\mathrm{Alg}(\Omega)$ с непустым классом объектов, замкнутую относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. В отличие от традиционного определения мы сразу рассматриваем многообразие как категорию и за основу определения берется формулировка теоремы Биркгофа.

Лемма 2.1. *Пусть R — мультикатегория над некоторой вербальной категорией Ω. Тогда категория $\mathrm{Alg}(R_W)$ есть многообразие Ω-алгебр, где сигнатура Ω определяется следующим образом: $\Omega_{\bar{s},t} = R(\bar{s}, t)$ для всех $\bar{s}$ и t.*

Доказательство очевидно. □

Пусть M — некоторое многообразие Ω-алгебр. Свободная алгебра этого многообразия с базисом $X = \{X_s \mid s \in S\} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}_S)$ будет обозначаться через $\mathrm{Fr}_M(X)$. Вместе с базисом предполагается заданным отображение S-множеств $\eta = \eta_X : X \to \mathrm{Fr}_M(X)$, обладающее известным универсальным свойством: для любой алгебры A из M и произвольного отображения S-множеств $\xi : X \to A$ должен существовать один и только один гомоморфизм Ω-алгебр $h : \mathrm{Fr}_M(X) \to A$ такой, что $h\eta = \xi$.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству теоремы 1.4 из [2]. В формулировке используются обозначения следующего типа. Если $A_1, \dots, A_n$ — некоторые множества, $a_i \in A_i$ для всех i, то вместо $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ пишется $\bar{a} = a_1 \dots a_n$.

Лемма 2.2. *Пусть R — мультикатегория над вербальной категорией W, и пусть $X = \{X_s \mid s \in S\}$ — некоторое S-множество. Свободная алгебра $\mathrm{Fr}_R(X)$ в многообразии $\mathrm{Alg}(R_W)$ устроена следующим образом. Для каждого $t \in S$ рассмотрим множество*

$$F_t = \bigsqcup_{s_1,\dots,s_n \in S} R(s_1 \dots s_n, t) \times X_{s_1} \times \dots \times X_{s_n}.$$

Семейство $F = \{F_t \mid t \in S\}$ обладает структурой алгебры над R как Id-*мультикатегорией. Эта структура такова. Если $\omega \in R(u_1 \dots u_m, t)$, $w_i \in F_{u_i}$, $1 \le i \le m$, $w_i = \omega_i \bar{x}_i$, где $\omega_i \in R(\bar{s}_i, u_i)$, $\bar{s}_i = s_{i,1} \dots s_{i,n_i}$, $\bar{x}_i = x_{i,1} \dots x_{i,n_i}$, $x_{i,j} \in X_{s_{i,j}}$, то*

$$\omega w_1 \dots w_m = (\omega\omega_1 \dots \omega_m)\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m.$$

Алгебра $\mathrm{Fr}_R(R_W)$ строится как фактор-алгебра F по конгруэнции, порожденной всеми парами элементов вида $((\omega f)x_1 \dots x_m, \omega x_{f(1)} \dots x_{f(k)})$, где $f : s_{f(1)} \dots s_{f(k)} \to s_1 \dots s_m$ — морфизм категории W_S, представленный отображением $f : [k] \to [m]$, $S = \mathrm{Ob}(R)$, $\omega \in R(s_{f(1)} \dots s_{f(k)})$, $x_i \in X_{s_i}$.

Отображение S-множеств $\eta : X \to \mathrm{Fr}_R(X)$ строится так: если $x \in X_s$, то $\eta_s(x) = 1_s x$. Точнее, $1_s x \in R(s,s) \times X_s \subseteq F_s$, и под $\eta_s(x)$ подразумевается образ $1_s x$ в фактор-алгебре.

Напомним (см. [1]), что в категории FSet для любой пары объектов $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ и $[m]$ существует прямое произведение $[n] \times [m] = [nm]$. Нам потребуется явный вид одной из проекций $\pi_1 : [nm] \to [n]$. Эта проекция, которая в [2] обозначена как $\mu_{m,n}$, действует по правилу $\mu_{m,n}(i + n(j-1)) = i$, где $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Отображение $\mu_{m,n}$ представляет морфизм $\bar{s}^m \to \bar{s}$ (для любой строки $\bar{s} = s_1 \dots s_n$). В частности, $\bar{s}\mu_{m,n} = \bar{s}^m$.

Для каждой строки $\bar{s} = s_1 \dots s_n \in S^*$ определим S-множество $X(\bar{s})$, объединение компонент которого есть $\{x_{s_1,1}, \dots, x_{s_n,n}\}$, причем $x_{s_i,i}$ имеет сорт s_i. Иными словами, для каждого $t \in S$ имеет место равенство $X(\bar{s})_t = \{x_{s_i,i} \mid s_i = t\}$. Соответствие $\bar{s} \mapsto X(\bar{s})$ есть ковариантный функтор из категории FSet_S в категорию Set_S, действующий на морфизмах следующим образом. Если $\bar{s} = s_1 \dots s_m$ и дан морфизм $f : \bar{s}f \to \bar{s}$, представленный отображением $f : [k] \to [m]$, то соответствующий ему морфизм S-множеств $X(f) : X(\bar{s}f) \to X(\bar{s})$ переводит элементы $x_{s_{f(i)},i}$ в $x_{s_{f(i)},f(i)}$ $(1 \le i \le k)$.

Теорема 2.1. *Пусть R — W-мультикатегория, причем в число морфизмов W входят все $\mu_{n,m}$, и пусть $S = \mathrm{Ob}(R)$. Рассмотрим произвольную строку $\bar{s} = s_1 \dots s_n \in S^*$. Семейство $\{R(\bar{s}, t) \mid t \in S\}$ есть R-алгебра, которая будет обозначаться через $R(\bar{s})$ (так что $R(\bar{s})_t = R(\bar{s}, t)$). Если $W =$ FSet, то эта алгебра является свободной алгеброй с базисом $X(\bar{s})$ в $\mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$.*

Доказательство. Структура R-алгебры на $R(\bar{s})$ определяется с помощью семейства отображений — суперпозиций

$$R(u_1 \dots u_m, t) \times R(\bar{s})_{u_1} \times \dots \times R(\bar{s})_{u_m} \longrightarrow R(\bar{s}^m, t) \xrightarrow{\mu_{m,n}} R(\bar{s})_t\,. \tag{2}$$

Здесь левое отображение есть композиция в мультикатегории R:

$$R(u_1 \dots u_m, t) \times R(\bar{s}, u_1) \times \dots \times R(\bar{s}, u_m) \longrightarrow R(\bar{s}^m, t),\ (\omega, r_1, \dots, r_m) \mapsto \omega r_1 \dots r_m.$$

Правое отображение существует по определению R: для каждого $t \in S$ соответствие $\bar{v} \mapsto R(\bar{v}, t)$ есть контравариантный функтор из W_S^{op} в категорию множеств. Напомним, что для морфизма категории FSet_S, представленного отображением f (и соответствующего морфизма двойственной категории W_S^{op}) вместо $R(f,t)$ используется запись f, а действие этого отображения записывается так: $r \mapsto rf$. Таким образом, результат действия (2) будет записываться в виде

$$(\omega, r_1, \dots, r_m) \mapsto [\omega r_1 \dots r_m] = (\omega r_1 \dots r_m)\mu_{m,n}.$$

Необходимо помнить, что в выражении справа $\mu_{m,n}$ означает морфизм из W_S^{op}.

Проверим свойства из определения алгебры над мультикатегорией. Пусть $r \in R(\bar{s})_t = R(\bar{s}, t)$. Тогда $[1_t r] = (1_t r)\mu_{1,n}$. Здесь $1_t r = r$ согласно свойству единичных мультистрелок, а $\mu_{1,n} = \mathrm{id}$ по определению μ. Проверим ассоциативность композиции (2). Пусть $\omega \in R(u_1 \dots u_m, t)$ и $\omega_i \in R(\bar{v}_i, u_i)$ для $1 \le i \le m$.

Если $\bar{v}_i = v_{i,1} \dots v_{i,k_i}$, то пусть $r_{i,j} \in R(\bar{s})_{v_{i,j}}$ для всех i и j, $1 \le j \le k_i$, и $\bar{r}_i = r_{i,1} \dots r_{i,k_i}$. Положим также $k = k_1 + \dots + k_m$. Далее,

$$[(\omega\omega_1 \dots \omega_m)\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m] = ((\omega\omega_1 \dots \omega_m)\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m)\mu_{k,n}.$$

Круглые скобки означают композицию в R. С другой стороны,

$$\begin{aligned}[\omega[\omega_1\bar{r}_1] \dots [\omega_m\bar{r}_m]] &= [\omega((\omega_1\bar{r}_1)\mu_{k_1,n}) \dots ((\omega_m\bar{r}_m)\mu_{k_m,n})] \\ &= (((\omega\omega_1 \dots \omega_m)\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m)(\mu_{k_1,n} \sqcup \dots \sqcup \mu_{k_m,n}))\mu_{m,n}.\end{aligned}$$

Сопоставляя левую и правую части предполагаемого равенства, т. е.

$$[(\omega\omega_1 \dots \omega_m)\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m] = [\omega[\omega_1\bar{r}_1] \dots [\omega_m\bar{r}_m]],$$

приходим к выводу, что оно будет доказано, как только будет установлено равенство морфизмов $(\mu_{k_1,n} \sqcup \dots \sqcup \mu_{k_m,n})\mu_{m,n} = \mu_{k,n}$ в категории W_S^{op} или же равенство в категории W_S:

$$\mu_{m,n}(\mu_{k_1,n} \sqcup \dots \sqcup \mu_{k_m,n}) = \mu_{k,n}. \tag{3}$$

Тождества такого вида доказываются в FSet_S значительно проще, чем в FSet. И левая, и правая части доказываемого равенства суть морфизмы из $\bar{s}^k$ в $\bar{s}$. Выберем класс S и строку $\bar{s} = s_1 \dots s_n \in S^*$ так, чтобы все символы s_i были попарно различны. Тогда для любого $\overline{w} \in S^*$ может существовать самое большее один морфизм $\overline{w} \to \bar{s}$, причем представляющий его морфизм FSet определен однозначно. Отсюда следует равенство (3) для FSet_S с выбранными S и $\bar{s}$, а также и для FSet. Из выполнимости (3) для FSet следует его выполнимость для произвольных S и $\bar{s}$.

Пусть теперь $f : [l] \to [m]$ — морфизм W, $\bar{u} = u_1 \dots u_m$ и $\omega \in R(\bar{u}f, t)$. Тогда $\omega f \in R(\bar{u}, t)$. Пусть $r_i \in R(\bar{s})_{u_i}$, $1 \le i \le m$. Тогда

$$[(\omega f)r_1 \dots r_m] = ((\omega f)r_1 \dots r_m)\mu_{m,n} = ((\omega r_{f(1)} \dots r_{f(l)})f^*\alpha)\mu_{m,n},$$

где $\alpha = \binom{\bar{s},\dots,\bar{s}}{u_1,\dots,u_m}$. Равенство с $[\omega r_{f(1)} \dots r_{f(l)}]$ получится при условии, что имеет место тождество в FSet_S: $\mu_{l,n} = \mu_{m,n}(f^*\alpha)$. И левая, и правая части этого соотношения суть морфизмы из $\bar{s}^l$ в $\bar{s}$, и далее можно рассуждать так же, как и при доказательстве (3).

Итак, $R(\bar{s})$ обладает структурой R-алгебры. Покажем, что если $W = \mathrm{FSet}$, то это свободная алгебра с базисом $X(\bar{s})$. Прежде всего построим отображение S-множеств $\eta : X(\bar{s}) \to R(\bar{s})$.

Пусть $p_i^n : [1] \to [n]$ — морфизмы в категории FSet такие, что $p_i^n(1) = i$, $1 \le i \le n$. Для каждого i морфизм p_i^n определяет отображение $R(s_i, s_i) \to R(\bar{s}, s_i)$, сопоставляющее $\gamma \in R(s_i, s_i)$ элемент $\gamma p_i^n \in R(\bar{s}, s_i) = R(\bar{s})_{s_i}$. Положим $\eta_{s_i}(x_{s_i,i}) = 1_{s_i} p_i^n$. Далее нам потребуется тождество в W_S: $\mu_{n,n}\big(p_1^n \sqcup \dots \sqcup p_n^n\big) = 1_{[n]}$. Оно доказывается легко (и использовалось уже в [1]). Теперь пусть $r \in R(\bar{s})_t = R(\bar{s}, t)$. Тогда имеет место тождество

$$r = [r\eta_{s_1}(x_{s_1,1}) \dots \eta_{s_n}(x_{s_n,n})]. \tag{4}$$

Доказательство таково:

$$r = r1_{[n]} = (r1_{s_1} \dots 1_{s_n})\big(\overbrace{\mu_{n,n}\big(p_1^n \sqcup \dots \sqcup p_n^n\big)}^{\text{в категории } W_S}\big)$$

$$= (r1_{s_1}\dots 1_{s_n})\big(\overbrace{\big((p_1^n\sqcup\dots\sqcup p_n^n)\mu_{n,n}\big)}^{\text{в категории } W_S^{op}}\big) = \big((r1_{s_1}\dots 1_{s_n})(p_1^n\sqcup\dots\sqcup p_n^n)\big)\mu_{n,n}$$
$$= \big(r(1_{s_1}p_1^n)\dots(1_{s_n}p_n^n)\big)\mu_{n,n} = [r\eta_{s_1}(x_{s_1,1})\dots\eta_{s_n}(x_{s_n,n})].$$

Предположим, что дано отображение S-множеств $\xi : X(\bar{s}) \to A$, где A — некоторая R-алгебра, и пусть $a_i = \xi_{s_i}(x_{s_i,i})$. Если существует гомоморфизм R-алгебр $h : R(\bar{s}) \to A$ со свойством $h\eta = \xi$, то из (4) следует, что для каждого $r \in R(\bar{s})_t = R(\bar{s}, t)$ имеет место равенство $h_t(r) = ra_1\dots a_n$ и это означает, что если h существует, то он определен однозначно.

Доказательство свободности завершается следующим образом. Пусть дано отображение $\xi : X(\bar{s}) \to A$ и $a_i = \xi_{s_i}(x_{s_i,i})$. Определим h первоначально как морфизм S-множеств по уже найденной формуле: $h_t(r) = ra_1\dots a_n$. Очевидно, что $h\eta = \xi$. Остается проверить, что h — гомоморфизм R-алгебр. Положим $\bar{a} = a_1\dots a_n$, $\bar{u} = u_1\dots u_m$, $\omega \in R(\bar{u}, t)$, $r_i \in R(\bar{s})_{u_i}$, $1 \le i \le m$. Проделаем следующие выкладки:

$$h([\omega r_1\dots r_m]) = [\omega r_1\dots r_m]\bar{a} = ((\omega r_1\dots r_m)\mu_{n,m})\bar{a}$$
$$= (\omega r_1\dots r_m)\overbrace{\bar{a}\dots\bar{a}}^{m} = \omega(r_1\bar{a})\dots(r_m\bar{a}) = \omega h(r_1)\dots h(r_m). \quad \square$$

Теорема 2.2. *Пусть M — некоторое многообразие многосортных Ω-алгебр, и S — класс его сортов. Положим $R(\bar{s}, t) = \mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))$ для каждого $\bar{s} \in S^*$ и $t \in S$. Тогда на семействе $R = \{R(\bar{s}, t) \mid \bar{s} \in S^*, t \in S\}$ определена структура* FSet-*мультикатегории.*

Доказательство. Будем писать Fr вместо Fr_M, так что $R(\bar{s}, t) = \mathrm{Fr}(X(\bar{s}))_t$, где $\bar{s} = s_1\dots s_m$. Пусть $r \in R(\bar{s}, t)$, $w_i \in R(\bar{u}_i, s_i)$, $1 \le i \le m$, $\bar{u}_i = u_{i,1}\dots u_{i,n_i}$, $\bar{u} = \bar{u}_1\dots\bar{u}_m$. Построим отображения композиции:

$$R(\bar{s}, t) \times R(\bar{u}_1, s_1) \times \dots \times R(\bar{u}_m, s_m) \to R(\bar{u}, t),\ (r, w_1, \dots, w_m) \mapsto rw_1\dots w_m.$$

Пусть $\overline{w} = w_1\dots w_m$, так что $rw_1\dots w_m = r\overline{w}$. Положим $r\overline{w}$ равным $h_{\overline{w}}(r)$, где $h_{\overline{w}}$ есть гомоморфизм из Ω-алгебры $\mathrm{Fr}(X(\bar{s}))$ в Ω-алгебру $\mathrm{Fr}(X(\bar{u}))$, который определяется следующим образом. Сначала определим отображение S-множеств $p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i} : X(\bar{u}_i) \to X(\bar{u})$, которое переводит элемент $x_{u_{i,j},k}$ в элемент $x_{u_{i,j},n_1+\dots+n_{i-1}+k}$. Фактически $p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i} = X(p^\alpha_i)$, где $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, и отображение $p^\alpha_i : [n_i] \to [n_1 + \dots + n_m]$ переводит элемент k $(1 \le k \le n_i)$ в $n_1 + \dots + n_{i-1} + k$.

Тем же символом $p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}$ обозначим единственный гомоморфизм Ω-алгебр из $\mathrm{Fr}(X(\bar{u}_i))$ в $\mathrm{Fr}(X(\bar{u}))$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}(X(\bar{u}_i)) \arrow[r] & \mathrm{Fr}(X(\bar{u})) \\
X(\bar{u}_i) \arrow[u, "\eta_{\bar{u}_i}"] \arrow[r, "p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}"] & X(\bar{u}) \arrow[u, "\eta_{\bar{u}}"']
\end{tikzcd}.$$

В этой диаграмме через $\eta_{\bar{v}}$ обозначено отображение базиса $X(\bar{v})$ в соответствующую свободную алгебру $\mathrm{Fr}(X(\bar{v}))$. Далее из контекста всегда будет видно, в каком смысле употребляется $p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}$.

Теперь полагаем

$$h_{\overline{w}}(x_{s_i,i}) = p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}(w_i). \tag{5}$$

(Более формально: $h_{\overline{w}}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})) = p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}(w_i)$.) Проверим ассоциативность. Пусть для всех i, j, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$, заданы строки $\bar{v}_{i,j} \in S^*$ и элементы

$r_{i,j} \in R(\bar{v}_{i,j}, u_{i,j})$. Положим $\bar{v}_i = \bar{v}_{i,1} \dots \bar{v}_{i,n_i}$, $\bar{v} = \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$, $\bar{r}_i = r_{i,1} \dots r_{i,n_i}$. Необходимо убедиться, что имеет место равенство

$$(rw_1 \dots w_m)\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m = r(w_1\bar{r}_1) \dots (w_m\bar{r}_m) \tag{6}$$

Ввиду (5) его левая и правая части равны $h_{\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m}(h_{w_1 \dots w_m}(r))$ и $h_{(w_1\bar{r}_1)\dots(w_m\bar{r}_m)}(r)$ соответственно. Отсюда следует, что (6) эквивалентно равенству

$$h_{\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m} h_{w_1 \dots w_m} = h_{(w_1\bar{r}_1)\dots(w_m\bar{r}_m)}. \tag{7}$$

Левая и правая части (7) — гомоморфизмы из $\mathrm{Fr}(X(\bar{s}))$ в $\mathrm{Fr}(X(\bar{v}))$, поэтому для доказательства (7) достаточно установить, что значения обеих частей совпадают на всех $x_{s_i,i} \in X(\bar{s})$. С одной стороны,

$$h_{\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m}(h_{w_1 \dots w_m}(x_{s_i,i})) = h_{\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m}\big(p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}(w_i)\big).$$

Далее,

$$h_{(w_1\bar{r}_1)\dots(w_m\bar{r}_m)}(x_{s_i,i}) = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i}(w_i\bar{r}_i) = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i}(h_{\bar{r}_i}(w_i)).$$

Это означает, что (7) эквивалентно тождеству

$$h_{\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m} p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i} = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} h_{\bar{r}_i}. \tag{8}$$

Достаточно проверить совпадение значений левой и правой частей равенства (8) на $x_{u_{i,j},k} \in X(\bar{u}_i)$. Так как $h_{\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m}(p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}(x_{u_{i,j},k})) = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_{i,j}}(r_{i,j})$, а $p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i}(h_{\bar{r}_i}(x_{u_{i,j},k})) = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i}(p^{\bar{v}_i}_{\bar{v}_{i,j}}(r_{i,j}))$, равенство (8) эквивалентно равенству гомоморфизмов Ω-алгебр:

$$p^{\bar{v}}_{\bar{v}_{i,j}} = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} p^{\bar{v}_i}_{\bar{v}_{i,j}}. \tag{9}$$

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}(X(\bar{v}_{i,j})) \arrow[r, "p^{\bar{v}_i}_{\bar{v}_{i,j}}"] & \mathrm{Fr}(X(\bar{v}_i)) \arrow[r, "p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i}"] & \mathrm{Fr}(X(\bar{v})) \\
X(\bar{v}_{i,j}) \arrow[u, "\eta_{\bar{v}_{i,j}}"] \arrow[r, "p^{\bar{v}_i}_{\bar{v}_{i,j}}"] & X(\bar{v}_i) \arrow[u, "\eta_{\bar{v}_i}"] \arrow[r, "p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i}"] & X(\bar{v}) \arrow[u, "\eta_{\bar{v}}"]
\end{tikzcd}.$$

Суперпозиция гомоморфизмов верхней строки есть правая часть (9). Из универсальных свойств отображений η следует, что равенство (8) для гомоморфизмов алгебр вытекает из равенства $p^{\bar{v}}_{\bar{v}_{i,j}} = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} p^{\bar{v}_i}_{\bar{v}_{i,j}}$ отображений из $X(\bar{v}_{i,j})$ в $X(\bar{v})$, правая часть которого есть суперпозиция отображений нижней строки диаграммы. Это равенство легко проверить, используя определения входящих в него отображений.

Определим единицы мультикатегории R. Пусть $s \in S$, $X(s) = \{x_s\}$, $\eta_s : \{x_s\} \to \mathrm{Fr}(X(s))_s = R(s,s)$ — отображение базиса в свободную алгебру. Положим $1_s = \eta_s(x_s)$ и проверим свойства единиц из определения 1.2. Если $r \in R(s_1 \dots s_m, t)$, то $r1_{s_1} \dots 1_{s_m} = h_{1_{s_1} \dots 1_{s_m}}(r)$ и достаточно убедиться, что $h_{1_{s_1} \dots 1_{s_m}} : \mathrm{Fr}(X(s_1 \dots s_m)) \to \mathrm{Fr}(X(s_1 \dots s_m))$ есть тождественное отображение. Это будет следовать из равенства $h_{1_{s_1} \dots 1_{s_m}} \eta_{\bar{s}} = \eta_{\bar{s}}$ (где $\bar{s} = s_1 \dots s_m$), которое устанавливается следующим вычислением:

$$h_{1_{s_1} \dots 1_{s_m}}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})) = p^{\bar{s}}_{s_i}(\eta_{s_i}(x_{s_i})) = \eta_{\bar{s}}(p^{\bar{s}}_{s_i}(x_{s_i})) = \eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i}).$$

С другой стороны, пусть $w \in R(\bar{u}, s) = \mathrm{Fr}(X(\bar{u}))_s$. Тогда $1_s w = h_w(1_s) = h_w(\eta_s(x_s))$, где $h_w : \mathrm{Fr}(X(\bar{s})) \to \mathrm{Fr}(X(\bar{u}))$. При этом $h_w(\eta_s(x_s)) = p^{\bar{u}}_{\bar{u}}(w)$. Но $p^{\bar{u}}_{\bar{u}}$, как легко убедиться, является тождественным отображением.

Покажем, что для каждого $t \in S$ соответствие $\bar{s} \mapsto R(\bar{s}, t)$ можно продолжить до структуры контравариантного функтора из W_S^{op} в категорию множеств. Прежде всего контравариантным функтором из W_S^{op} в Set_S можно считать определенный выше функтор $\bar{s} \mapsto X(\bar{s})$. Рассмотрим суперпозицию этого контравариантного функтора с ковариантным функтором $X(\bar{s}) \mapsto \mathrm{Fr}(X(\bar{s}))$. Действие этого функтора на морфизм $f : \bar{s}f \to \bar{s}$ обозначим через h_f. Таким образом, h_f однозначно определяется из коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}(X(\bar{s}f)) \arrow[r, "h_f"] & \mathrm{Fr}(X(\bar{s})) \\
X(\bar{s}f) \arrow[u, "\eta_{\bar{s}f}"] \arrow[r, "X(f)"] & X(\bar{s}). \arrow[u, "\eta_{\bar{s}}"']
\end{tikzcd}$$

Если теперь $w \in R(\bar{s}f, t)$ и f имеет тот же смысл, что и выше, то положим $wf = h_f(w)$. Неформально говоря, если представлять себе w как своего рода моном $w = w(x_{s_{f(1)},1}, \ldots, x_{s_{f(k)},k})$ от переменных из $X(\bar{s}f)$, то wf есть моном $w(x_{s_{f(1)},f(1)}, \ldots, x_{s_{f(k)},f(k)})$ от переменных из $X(\bar{s}) = \{x_{s_1,1}, \ldots x_{s_m,m}\}$. Таким образом, требуемый функтор — суперпозиция:

$$\bar{s} \mapsto X(\bar{s}) \mapsto \mathrm{Fr}(X(\bar{s})) \mapsto \mathrm{Fr}(X(\bar{s}))_t = R(\bar{s}, t).$$

Проверим два оставшихся свойства из определения 1.2. Пусть $r \in R(\bar{s}, t)$, $\bar{s} = s_1 \ldots s_m$, $f_i : \bar{u}_i = \bar{v}_i f \to \bar{v}_i$ — морфизмы из FSet_S, представленные отображениями $f_i : [l_i] \to [n_i]$ (так что длина $\bar{v}_i$ равна n_i), $w_i \in R(\bar{v}_i f, s_i)$, $1 \le i \le m$. Положим $f = f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m$, $\overline{w} = w_1 \ldots w_m$, $\overline{w}f = (w_1 f_1) \ldots (w_m f_m)$, $\bar{v} = \bar{v}_1 \ldots \bar{v}_m$ и $\bar{v}f = (\bar{v}_1 f_1) \ldots (\bar{v}_m f_m)$. Тогда $r(w_1 f_1) \ldots (w_m f_m) = h_{\overline{w}f}(r)$, $(\omega w_1 \ldots w_m)(f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m) = h_f(r w_1 \ldots w_m) = h_f(h_{\overline{w}}(r))$ и первое из требуемых равенств равносильно соотношению $h_{\overline{w}f} = h_f h_{\overline{w}}$. Левая и правая части этого предполагаемого равенства — гомоморфизмы из $\mathrm{Fr}(X(\bar{s}))$ в $\mathrm{Fr}(X(\bar{v}))$, так что достаточно показать, что для каждого i, $1 \le i \le m$, имеет место равенство $h_{\overline{w}f}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})) = h_f(h_{\overline{w}}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})))$. Но так как $h_{\overline{w}f}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})) = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i}(h_{f_i}(w_i))$, а $h_f(h_{\overline{w}}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i}))) = h_f\big(p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i}(w_i)\big)$, то все сводится к доказательству (для всех i) тождеств $h_f p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i} = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} h_{f_i}$. Здесь слева и справа стоят гомоморфизмы Ω-алгебр из $\mathrm{Fr}(X(\bar{v}_i f_i))$ в $\mathrm{Fr}(X(\bar{v}))$, поэтому достаточно доказать совпадение суперпозиций левой и правой частей с $\eta_{\bar{v}_i f_i}$. Вспоминая соглашение о зависимости смысла обозначения $p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i}$ от контекста, получаем $h_f p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i} \eta_{\bar{v}_i f_i} = h_f \eta_{\bar{v}f} p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i} = \eta_{\bar{v}} X(f) p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i}$, где последнее выражение $p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i}$ означает отображение из $X(\bar{v}_i f_i)$ в $X(\bar{v}f)$. С другой стороны, $p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} h_{f_i} \eta_{\bar{v}_i f_i} = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} \eta_{\bar{v}_i} X(f_i) = \eta_{\bar{v}} p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} X(f_i)$. Все получится, если установить равенство $X(f) p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i} = p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} X(f_i)$. Отображения, входящие в это предполагаемое равенство, имеют своей областью определения множество $X(\bar{v}_i f_i)$, а областью значений — множество $X(\bar{v})$. Далее, вспоминаем, что $p^{\bar{v}}_{\bar{v}_i} = X\big(p^{\alpha}_i\big)$, где $\alpha = (n_1, \ldots, n_m)$, и отображение $p^{\alpha}_i : [n_i] \to [n_1 + \cdots + n_m]$ переводит элемент k $(1 \le k \le n_i)$ в $n_1 + \cdots + n_{i-1} + k$ и аналогично $p^{\bar{v}f}_{\bar{v}_i f_i} = X\big(p^{\beta}_i\big)$, где $\beta = (l_1 \ldots, l_m)$ и $p^{\beta}_i : [l_i] \to [l_1 + \cdots + l_m]$. Соответствие $\bar{u} \mapsto X(\bar{u})$ есть ковариантный функтор на W_S, так что соотношение $X(f) X\big(p^{\beta}_i\big) = X\big(p^{\alpha}_i\big) X(f_i)$ следует из тождества $(f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m) p^{\beta}_i = p^{\alpha}_i f_i$ в FSet, проверка которого выполняется без труда.

Покажем, наконец, что $(rf) w_1 \ldots w_m = (r w_{f(1)} \ldots w_{f(m)})(f^* \alpha)$. Здесь морфизм $f : \bar{s}f \to \bar{s}$ представлен отображением $f : [k] \to [m]$, $r \in R(\bar{s}f, t) = \mathrm{Fr}(\bar{s}f)_t$, (так что $rf \in R(\bar{s}, t)$), $w_i \in R(\bar{u}_i, s_i)$ для каждого i, $1 \le i \le m$, и $\alpha = \binom{\bar{u}_1 \dots \bar{u}_m}{s_1 \dots s_m}$. Положим, как и выше, $\overline{w} = w_1 \dots w_m$, $\overline{w}f = w_{f(1)} \dots w_{f(k)}$, $\bar{u} = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_m$. $\bar{u}f = \bar{u}_{f(1)} \dots \bar{u}_{f(m)}$. С одной стороны, $(rf)w_1 \dots w_m = h_{\overline{w}}(rf) = h_{\overline{w}}(h_f(\omega))$. С другой стороны, $(rw_{f(1)} \dots w_{f(m)})(f^*\alpha) = h_{f^*\alpha}(h_{\overline{w}f}(r))$. Отсюда следует, что вопрос сводится к доказательству равенства $h_{\overline{w}} h_f = h_{f^*\alpha} h_{\overline{w}f}$.

Так как обе части предполагаемого равенства — гомоморфизмы Ω-алгебр из $\mathrm{Fr}(X(\bar{s}f))$ в $\mathrm{Fr}(X(\bar{u}))$, достаточно показать, что $h_{\overline{w}} h_f \eta_{\bar{s}f} = h_{f^*\alpha} h_{\overline{w}f} \eta_{\bar{s}f}$ или, менее формально, что значения левой и правой частей совпадают на всех $x_{s_{f(i)},i} \in X(\bar{s}f)$. Прежде всего $h_{\overline{w}} h_f \eta_{\bar{s}f} = h_{\overline{w}} \eta_{\bar{s}} X(f)$. Далее,

$$h_{\overline{w}}(\eta_{\bar{s}}(X(f)(x_{s_{f(i)},i}))) = h_{\overline{w}}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_{f(i)},f(i)})) = p^{\bar{u}}_{\bar{u}_{f(i)}}(w_{f(i)}).$$

Вычислим другую часть:

$$h_{f^*\alpha}(h_{\overline{w}f}(\eta_{\bar{s}f}(x_{s_{f(i)},i}))) = h_{f^*\alpha}\big(p^{\bar{u}f}_{\bar{u}_{f(i)}}(w_{f(i)})\big).$$

Все сводится к доказательству равенства

$$p^{\bar{u}}_{\bar{u}_{f(i)}} = h_{f^*\alpha} p^{\bar{u}f}_{\bar{u}_{f(i)}}.$$

Правая часть это равенства — суперпозиция гомоморфизмов верхней строки следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}(X(\bar{u}_{f(i)})) \arrow[r, "p^{\bar{u}f}_{\bar{u}_{f(i)}}"] & \mathrm{Fr}(X(\bar{u}f)) \arrow[r, "h_{f^*\alpha}"] & \mathrm{Fr}(X(\bar{u})) \\
X(\bar{u}_{f(i)}) \arrow[u, "\eta_{\bar{u}_{f(i)}}"] \arrow[r, "p^{\bar{u}f}_{\bar{u}_{f(i)}}"] & X(\bar{u}f) \arrow[u, "\eta_{\bar{u}f}"] \arrow[r, "X(f^*\alpha)"] & X(\bar{u}) \arrow[u, "\eta_{\bar{u}}"]
\end{tikzcd}\ .$$

Если обозначить тем же символом α разбиение $(n_1, \dots, n_m)$ (это вполне естественно, так как морфизм $f^*\alpha : \bar{u}f \to \bar{u}$ представлен отображением $f^*\alpha : [n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}] \to [n_1 + \dots + n_m]$), то $p^{\bar{u}f}_{\bar{u}_{f(i)}}$ из нижней строки диаграммы есть $X\big(p^{\alpha f}_{f(i)}\big)$ и равенство суперпозиции гомоморфизмов верхней строки гомоморфизму $p^{\bar{u}}_{\bar{u}_{f(i)}}$ будет следовать из равенства суперпозиции отображений нижней строки отображению $X\big(p^{\alpha}_{f(i)}\big)$ (которое ранее также обозначалось через $p^{\bar{u}}_{\bar{u}_{f(i)}}$). Остается только проверить равенство отображений — морфизмов FSet: $p^{\alpha}_{f(i)} = (f^*\alpha)p^{\alpha f}_{f(i)}$ для всех i, $1 \le i \le k$. Записывая это соотношение в виде диаграммы, в которой отображения $p^{\alpha}_{f(i)}$ и $p^{\alpha f}_{f(i)}$ интерпретируются как вложения «прямых слагаемых» в копроизведения (в категории FSet), легко увидеть, что коммутативность всех таких диаграмм представляет собой, по сути, определение отображения $f^*\alpha$. $\square$

§ 3. Доказательство рациональной эквивалентности

Напомним определение рациональной эквивалентности многообразий [3, 4] в необходимой нам форме.

Определение 3.1. Пусть M_1 и M_2 — два многообразия алгебр с различными, вообще говоря, сигнатурами, но с одним и тем же классом сортов S. Эти многообразия называются *рационально эквивалентными*, если существуют функторы $F : M_1 \to M_2$, $G : M_2 \to M_1$, обладающие следующими свойствами.

Во-первых, $FG = \mathrm{Id}_{M_2}$ (тождественный функтор категории M_2) и $GF = \mathrm{Id}_{M_1}$. Во-вторых, если $U_i : M_i \to \mathrm{Set}_S$ — естественным образом определяемые забывающие функторы ($i = 1, 2$), то $U_2F = U_1$, $U_1G = U_2$.

Другие (равносильные) формы данного определения можно найти в [4]. В следующей теореме используются соглашения и обозначения из доказательств теорем 2.1 и 2.2.

Теорема 3.1. *Пусть M — многообразие Ω-алгебр и R — FSet-мультикатегория, определенная в теореме 2.2. Тогда многообразия M и $\mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$ рационально эквивалентны.*

Доказательство. Построим функтор $G : M \to \mathrm{Alg}(R) = \mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$. Сначала превратим каждую алгебру из M в алгебру из $\mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$. Для этого надо определить семейство отображений вида

$$R(s_1 \dots s_m, t) \times A_{s_1} \times \dots \times A_{s_m} \longrightarrow A_t, (r, a_1, \dots, a_m) \mapsto \langle ra_1 \dots a_m \rangle,$$

где $r \in R(s_1 \dots s_m, t) = \mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))_t = \mathrm{Fr}(X(\bar{s}))_t$, $a_i \in A_{s_i}$ для всех i, $1 \le i \le m$. Сначала определим гомоморфизм $g_{a_1 \dots a_n} : \mathrm{Fr}(X(\bar{s})) \to A$ такой, что $g_{a_1 \dots a_n}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})) = a_i$ (менее формально $g_{a_1 \dots a_n}(x_{s_i,i}) = a_i$). Как и прежде, пусть $\bar{a} = a_1 \dots a_n$. Тогда положим

$$\langle ra_1 \dots a_n \rangle = g_{\bar{a}}(r).$$

Проверим, что на A таким образом определяется структура R-алгебры.

Начнем с проверки тождества

$$\langle (rw_1 \dots w_m)\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m \rangle = \langle r \langle w_1 \bar{a}_1 \rangle \dots \langle w_m \bar{a}_m \rangle \rangle.$$

Здесь $r \in R(\bar{s}, t)$, $\bar{s} = s_1 \dots s_m$, $w_i \in R(\bar{u}_i, s_i)$, $1 \le i \le m$, $\bar{u}_i = u_{i,1} \dots u_{i,n_i}$, $\bar{a} = a_{i,1} \dots a_{i,n_i}$, $a_{i,j} \in A_{u_{i,j}}$ для всех i, j. Пусть также $\overline{w} = w_1 \dots w_m$, $\bar{u} = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_m$, $\bar{a} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_m$. С одной стороны, $\langle (rw_1 \dots w_m)\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m \rangle = g_{\bar{a}}(h_{\overline{w}}(r))$, а с другой — $\langle r \langle w_1 \bar{a}_1 \rangle \dots \langle w_m \bar{a}_m \rangle \rangle = g_{(w_1 \bar{a}_1) \dots (w_m \bar{a}_m)}(r)$, так что требуемое равенство эквивалентно соотношению $g_{\bar{a}} h_{\overline{w}} = g_{\langle w_1 \bar{a}_1 \rangle \dots \langle w_m \bar{a}_m \rangle}$.

Левая и правая части этого соотношения — гомоморфизмы из $\mathrm{Fr}(X(\bar{s}))$ в A, и поэтому достаточно вычислить значения на элементах базиса $x_{s_i,i}$. Так как $g_{\bar{a}}(h_{\overline{w}}(x_{s_i,i})) = g_{\bar{a}}(p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}(w_i))$ и $g_{\langle w_1 \bar{a}_1 \rangle \dots \langle w_m \bar{a}_m \rangle}(x_{s_i,i}) = \langle w_i \bar{a}_i \rangle = g_{\bar{a}_i}(w_i)$, все сводится к равенству $g_{\bar{a}} p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i} = g_{\bar{a}_i}$, которое сводится к $g_{\bar{a}} p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i} \eta_{\bar{u}_i} = g_{\bar{a}} \eta_{\bar{u}} p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i} = g_{\bar{a}_i} \eta_{\bar{u}_i}$, и достаточно сопоставить значения левой и правой частей на элементах $x_{u_{i,j},j} \in X(\bar{u}_i)$. Во-первых, $g_{\bar{a}_i}(\eta_{\bar{u}_i}(x_{u_{i,j},j})) = a_{i,j}$ по определению $g_{\bar{a}_i}$. С другой стороны, $g_{\bar{a}}\big(\eta_{\bar{u}}\big(p^{\bar{u}}_{\bar{u}_i}(x_{u_{i,j},j})\big)\big) = g_{\bar{a}}(\eta_{\bar{u}}(x_{u_{i,j},l}))$, где $l = n_1 + \dots + n_{i-1} + j$. Согласно определению гомоморфизма $g_{\bar{a}}$ последнее выражение также равно $a_{i,j}$.

Пусть $a \in A_s$. Рассмотрим $1_s \in R(s, s) = \mathrm{Fr}(X(s))_s$, где $X(s) = \{x_s\}$. Как известно из доказательства теоремы 2.2, $1_s = \eta_s(x_s)$. Отсюда $\langle 1_s a \rangle = \eta_s(x_s)a = g_a(\eta_s(x_s)) = a$ по определению g_a.

Теперь рассмотрим морфизм $f : \bar{s}f \to \bar{s}$ категории FSet_S, представленный отображением $f : [k] \to [m]$, и пусть $r \in R(\bar{s}, t) = \mathrm{Fr}(X(\bar{s}))_t$. Тогда $\langle (rf)a_1 \dots a_m \rangle = g_{\bar{a}}(rf) = g_{\bar{a}}(h_f(r))$, $\langle ra_{f(1)} \dots a_{f(k)} \rangle = g_{\bar{a}f}(r)$ и, чтобы установить последнее свойство R-алгебры, необходимо убедиться, что $g_{\bar{a}} h_f = g_{\bar{a}f}$. Так как речь идет о гомоморфизмах Ω-алгебр из $\mathrm{Fr}(X(\bar{s}f))$ в A, необходимо вычислить значения обеих частей в $\eta_{\bar{s}f}(x_{s_{f(i)},i})$ для всех i, $1 \le i \le k$. С одной стороны, $g_{\bar{a}f}(\eta_{\bar{s}f}(x_{s_{f(i)},i})) = a_{f(i)}$. С другой стороны,

$$g_{\bar{a}}(h_f \eta_{\bar{s}f}(x_{s_{f(i)},i})) = g_{\bar{a}}(\eta_{\bar{s}}(X(f)(x_{s_{f(i)},i}))) = g_{\bar{a}}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_{f(i)},f(i)})) = a_{f(i)}.$$

Здесь использовано определение гомоморфизмов $g_{\bar{a}}$ и $g_{\bar{a}f}$.

Определим $G(A)$ как S-множество A с введенной выше структурой R-алгебры. Чтобы сделать G функтором, необходимо убедиться, что любой гомоморфизм $\varphi : A \to B$ между алгебрами из многообразия M, рассматриваемый как отображение S-множеств, является гомоморфизмом из R-алгебры $G(A)$ в R-алгебру $G(B)$. Фактически это следует из тождества $\varphi g_{a_1\dots a_m} = g_{\varphi(a_1)\dots\varphi(a_m)}$. По определению $g_{a_1\dots a_m}$ получим $\varphi(g_{a_1\dots a_m}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i}))) = \varphi(a_i)$. Также по определению $g_{\varphi(a_1)\dots\varphi(a_m)}(\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})) = \varphi(a_i)$.

Теперь рассмотрим $r \in R(\bar{s}, t)$ и вычислим $\varphi(\langle ra_1 \dots a_m\rangle)$. Как следует из определения $\langle ra_1 \dots a_m\rangle$ и доказанного только что тождества,

$$\varphi(\langle ra_1 \dots a_m\rangle) = \varphi(g_{a_1\dots a_m}(r)) = g_{\varphi(a_1)\dots\varphi(a_m)}(r) = \langle r\varphi(a_1)\dots\varphi(a_m)\rangle.$$

Также без труда проверяется, что φ отображает константы в константы. Из всего этого следует, что если положить $G(\varphi) = \varphi$, то G, рассматриваемый как гомоморфизм R-алгебр, становится функтором. Очевидно, что этот функтор унивалентен. Из построения также видно, что $U_{\mathrm{Alg}(R)}G = U_M$, где $U_M : M \to \mathrm{Set}_S$ — забывающий функтор.

Покажем теперь, что для любой строки $\bar{s} = s_1 \dots s_n \in S^*$ имеет место равенство $G(\mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))) = \mathrm{Fr}_R(X(\bar{s}))$.

Напомним, что для каждого $t \in S$ уже установлено (теорема 2.1) равенство $\mathrm{Fr}_R(X(\bar{s}))_t = R(\bar{s}, t) = \mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))_t$, так что необходимо только убедиться в совпадении той структуры R-алгебры, которая определена на $G(\mathrm{Fr}_M(X(\bar{s})))$ выше, и той, которая определялась в теореме 2.1. Необходимо установить тождество $[rw_1 \dots w_m] = g_{w_1\dots w_m}(r) = \langle rw_1 \dots w_m\rangle$. Здесь $r \in R(u_1 \dots u_m, t) = \mathrm{Fr}(X(\bar{u}))_t$, $w_i \in R(\bar{s}, u_i)$, $1 \le i \le m$, $\bar{s} = s_1 \dots s_n$. Поскольку $[rw_1 \dots w_m] = (rw_1 \dots w_m)\mu_{m,n} = h_{\mu_{m,n}}(h_{w_1\dots w_n}(r))$, вопрос сводится к проверке равенства $h_{\mu_{m,n}} h_{w_1\dots w_m} = g_{w_1\dots w_m}$. Речь идет о гомоморфизмах Ω-алгебр из $\mathrm{Fr}(X(\bar{u}))$ в $\mathrm{Fr}(X(\bar{s}))$, поэтому надо вычислять значения левой и правой частей на $\eta_{\bar{u}}(x_{u_i,i})$, $x_{u_i,i} \in X(\bar{u})$. С одной стороны, $g_{w_1\dots w_m}(\eta_{\bar{u}}(x_{u_i,i})) = w_i$. Рассмотрим

$$h_{\mu_{m,n}}(h_{w_1\dots w_m}(\eta_{\bar{u}}(x_{u_i,i}))) = h_{\mu_{m,n}}\big(p^{\bar{s}^m}_{\bar{s}_{(i)}}(w_i)\big).$$

Здесь $\bar{s}_{(i)}$ означает i-е подслово $\bar{s}$ в слове $\bar{s}^m$. Ввиду того, что выбор w_i произволен, достаточно доказать, что суперпозиция $h_{\mu_{m,n}} p^{\bar{s}^m}_{\bar{s}_{(i)}}$ равна тождественному отображению. Примерно так же, как это уже делалось выше, можно убедиться, что все сводится к равенству отображений из FSet: $\mu_{m,n} p_i^{\alpha} = 1_{[n]}$, где $\alpha = (\overbrace{n, \dots, n}^{m})$. Для каждого j, $1 \le j \le n$, суперпозиция в левой части действует следующим образом: $j \mapsto \overbrace{n + \dots + n}^{i-1} + j = j + n(i-1) \mapsto j$.

Построим теперь функтор $H : \mathrm{Alg}(R) = \mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}}) \to \mathrm{Alg}(\Omega)$. Для этого определим структуру Ω-алгебры на произвольной алгебре $B \in \mathrm{Alg}(R)$. Сначала рассмотрим отображения

$$\Omega_{\bar{s},t} \to \mathrm{Fr}_\Omega(X(\bar{s}))_t \xrightarrow{\pi_t} \mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))_t = R(\bar{s}, t),$$

где левая стрелка отображает символ операции $\omega \in \Omega_n$ в элемент $\omega x_{s_1,1} \dots x_{s_n,n}$ абсолютно свободной Ω-алгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X(\bar{s}))$. Отображение π — естественная проекция на фактор-алгебру. Положим $\widetilde{\omega} = \pi_t(\omega x_{s_1,1} \dots x_{s_n,n})$.

Пусть B — некоторая R-алгебра. Определим для $b_i \in B_{s_i}$, $1 \le i \le n$, действие операции ω следующим образом: $\omega b_1 \dots b_n = \widetilde{\omega} b_1 \dots b_n$. Правая часть понимается как результат действия отображения композиции для R-алгебры $R(\bar{s},t) \times B_{s_1} \times \dots \times B_{s_n} \to B_t$. Через $H(B)$ обозначим S-множество B, наделенное определенной только что структурой Ω-алгебры. Очевидно, что гомоморфизмы R-алгебр превращаются в гомоморфизмы Ω-алгебр, так что H является функтором из $\mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$ в $\mathrm{Alg}(\Omega)$. Ясно, что и этот функтор унивалентен.

Обозначим через $I_M : M \to \mathrm{Alg}(\Omega)$ полный унивалентный функтор естественного вложения многообразия M в категорию всех Ω-алгебр и покажем, что $HG = I_M$. Так как все рассматриваемые функторы действуют лишь на структуру алгебры на данном множестве, не меняя самого множества, достаточно убедиться, что если $A \in M$, то $H(G(A))$ — это то же самое множество с теми же операциями из сигнатуры Ω. Пусть $\omega \in \Omega_{\bar{s},t}$, где $\bar{s} = s_1 \dots s_n$, $A \in M$, $a_i \in A_{s_i}$, $1 \le i \le n$. Все, что нам необходимо, следует из тождества

$$\langle \widetilde{\omega} a_1 \dots a_n \rangle = g_{a_1 \dots a_n}(\widetilde{\omega}) = \omega a_1 \dots a_n,$$

где в правой части стоит результат действия операции ω на элементы Ω-алгебры A. Согласно определению $\widetilde{\omega}$ получаем равенство

$$g_{a_1 \dots a_n}(\widetilde{\omega}) = g_{a_1 \dots a_n}(\omega x_{s_1,1} \dots x_{s_n,n}).$$

Так как $g_{a_1 \dots a_n} = g_{\bar{a}}$ — гомоморфизм Ω-алгебр, то $g_{\bar{a}}(\omega x_{s_1,1} \dots x_{s_n,n}) = \omega g_{\bar{a}}(x_{s_1,1}) \dots g_{\bar{a}}(x_{s_n,n})$. Но по определению $g_{a_1 \dots a_n}(x_{s_i,i}) = a_i$ для всех i.

Из $HG = I_M$, унивалентности G, H и I_M и полноты I_M следует полнота G. Остается показать, что G биективен на объектах. Основным моментом доказательства этого является тот факт, что для любого S-множества Y алгебра $G(\mathrm{Fr}_M(Y))$ является свободной в $\mathrm{Alg}(R)$ с базисом Y. Выше это было показано для всех $Y = X(\bar{s})$, где $\bar{s} \in S^*$. Каждое S-множество Y, у которого все Y_s, $s \in S$, конечны, изоморфно (в категории Set_S) одному из $X(\bar{s})$.

Из доказанного выше следует, что каждая свободная алгебра с конечным базисом из $\mathrm{Alg}(R)$ будет свободной алгеброй в M (фактически это алгебры вида $\mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))$). Покажем, что это верно для свободных алгебр с произвольными базисами.

Рассмотрим произвольное S-множество Y. Очевидно, что $Y = \mathrm{Colim}\, Y'$, где $Y' \subseteq Y$ — конечные S-подмножества Y. Конечность здесь означает, что для каждого $s \in S$ компонента Y_s конечна и конечно множество $\bigcup\limits_{s \in S} Y_s$. Условие $Y' \subseteq Y$ означает, что для каждого $s \in S$ имеет место включение $Y'_s \subseteq Y_s$. Можно также предполагать, что для тех $s \in S$, для которых $Y_s \neq \varnothing$, выполняется и $Y'_s \neq \varnothing$, это не повлияет на равенство $Y = \mathrm{Colim}\, Y'$. Далее, для каждого такого конечного Y' найдется строка $\bar{s} \in S^*$ такая, что $Y' \cong X(\bar{s})$ (изоморфизм в категории Set_S). Тогда $G(\mathrm{Fr}_M(Y')) \cong G(\mathrm{Fr}_M(X(\bar{s})) = \mathrm{Fr}_R(X(\bar{s}))$ и поэтому можно считать, что $G(\mathrm{Fr}_M(Y')) = \mathrm{Fr}_R(Y')$. Ясно, что $\mathrm{Fr}_M(Y) = \mathrm{Colim}\,\mathrm{Fr}_M(Y')$ и $\mathrm{Fr}_R(Y) = \mathrm{Colim}\,\mathrm{Fr}_R(Y')$, где копределы берутся по всем рассмотренным выше конечным Y'. Допустимо писать равенства вместо изоморфизмов, так как при сделанных предположениях у гомоморфизмов $\mathrm{Fr}_M(Y') \to \mathrm{Fr}_M(Y)$, соответствующих включениям $Y' \subseteq Y$, имеются левые обратные и, следовательно, эти гомоморфизмы также можно считать включениями, а Colim фактически есть объединение, и аналогично для Fr_R. Существует единственный гомоморфизм $\mathrm{Fr}_R(Y) \to G(\mathrm{Fr}_M(Y))$ такой, что коммутативны все диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}_R(Y) \arrow[r] & G(\mathrm{Fr}_M(Y)) \\
\mathrm{Fr}_R(Y') \arrow[u] \arrow[r, equal] & G(\mathrm{Fr}_M(Y')) \arrow[u]
\end{tikzcd}.$$

Легко убедиться, что этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Пусть $B \in \mathrm{Alg}(R)$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\mathrm{Fr}_R(Y) \to B$ R-алгебр и его суперпозицию с построенным только что изоморфизмом $\mathrm{Fr}_M(Y) \cong \mathrm{Fr}_R(Y)$. Функтор H отображает сюръекции в сюръекции, так что в $\mathrm{Alg}(\Omega)$ будет иметь место сюръективный гомоморфизм вида $\mathrm{Fr}_M(Y) \to H(B)$. Это значит, что $H(B)$ принадлежит M как полной подкатегории $\mathrm{Alg}(\Omega)$ (если отождествить M с образом функтора I_M). Отсюда, в свою очередь, следует, что существует функтор $F : \mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}}) \to M$ такой, что $H = I_M F$. Теперь из $I_M = HG$ получаем $I_M = I_M FG$, откуда следует, что $FG = \mathrm{Id}_M$.

Покажем, что и $GF = \mathrm{Id}_{\mathrm{Alg}(R)}$. Вопрос сводится к следующему. Все рассматриваемые функторы не меняют S-множества, а меняют лишь структуры алгебр. Если $B \in \mathrm{Alg}(R)$, то функтор F превращает S-множество B в Ω-алгебру из M, а функтор G вводит на том же множестве новую структуру R-алгебры. Необходимо убедиться, что эта новая структура совпадает с исходной структурой R-алгебры. Из предыдущего уже ясно, что это верно для свободных алгебр.

Пусть $r \in R(\bar{s}, t)$, $\bar{s} = s_1 \dots s_n$, $b_i \in B_{s_i}$, $1 \le i \le n$, $\bar{b} = b_1 \dots b_n$, и $rb_1 \dots b_n \in B_t$ — результат выполнения операции композиции в исходной структуре R-алгебры на B. Утверждается, что $rb_1 \dots b_n = q_{\bar{b}}(r)$, где $q_{\bar{b}} : \mathrm{Fr}_R(X(\bar{s})) \to B$ — гомоморфизм R-алгебр, определяемый условиями $q_{\bar{b}}(x_{s_i,i}) = b_i$. В самом деле, в теореме 2.1 было показано, что в алгебре $\mathrm{Fr}_R(X(\bar{s}))$ для выбранного r имеет место тождество $r = [rx_{s_1,1} \dots x_{s_n,n}]$ (напомним, что здесь квадратные скобки обозначают операцию композиции в $\mathrm{Fr}_R(X(\bar{s}))$ и ради простоты вместо $\eta_{\bar{s}}(x_{s_i,i})$ пишется $x_{s_i,i}$). Применяя гомоморфизм R-алгебр к этому тождеству, получим $q_{\bar{b}}(r) = q_{\bar{b}}([rx_{s_1,1} \dots x_{s_n,n}]) = rq_{\bar{b}}(x_{s_1,1}) \dots q_{\bar{b}}(x_{s_n,n}) = rb_1 \dots b_n$.

После применения функтора F алгебра $\mathrm{Fr}_R(X(\bar{s}))$ превращается в Ω-алгебру $\mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))$, а отображение $q_{\bar{b}}$ — в гомоморфизм Ω-алгебр из $\mathrm{Fr}_M(X(\bar{s}))$ в $F(B)$, причем, так как само отображение не изменилось, по-прежнему $q_{\bar{b}}(x_{s_i,i}) = b_i$. Но в таком случае $q_{\bar{b}} = g_{\bar{b}}$ и тогда для композиции в R-алгебре $G(F(B))$ получаем $\langle rb_1 \dots b_n \rangle = g_{\bar{b}}(r) = q_{\bar{b}}(r) = rb_1 \dots b_n$.

Итак, $G(F(B))$ — это в точности та же алгебра, что и B. Действие GF на гомоморфизмах, очевидно, также является тождественным. По построению $U_M F = U_{\mathrm{Alg}(R)}$, где $U_{\mathrm{Alg}(R)} : \mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}}) \to \mathrm{Set}_S$ — забывающий функтор. Таким образом, многообразия M и $\mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$ рационально эквивалентны. $\square$

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тронин С. Н.* Абстрактные клоны и операды // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 924–936.
2. *Тронин С. Н.* Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 670–694.
3. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 29–32.
4. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
5. *Lambek J.* Deductive systems and categories. II. Standard constructions and closed categories // Category theory, homology theory and their applications. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1969. P. 76–122. (Lect. Notes in Math.; V. 86).
6. *Бордман Дж., Фогт Р.* Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977.
7. *Baez J. C., Dolan J.* Higher-dimensional algebra. III: n-Categories and the Algebra of Opetopes // Adv. Math. 1998. V. 135, N 2. P. 145–206.

8. *Leinster T.* Higher operads, higher categories. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.).
9. *Hermida C.* Representable multicategories // Adv. Math. 2000. V. 151, N 2. P. 164–225.
10. *Васюков В. Л.* Категорная логика. М.: АНО Институт логики, 2005.
11. *Higgins P. J.* Algebras with a scheme of operators // Math. Nachr. 1963. Bd 27, N 1, 2. S. 115–132.
12. *Замулин А. В.* Типы данных в языках программирования и базах данных. Новосибирск: Наука, 1987.
13. *Цаленко М. Ш.* Моделирование семантики в базах данных. М.: Наука, 1989.
14. *Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.* Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наук. думка, 1989.
15. *Плоткин Б. И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. М.: Наука, 1991.

Статья поступила 20 февраля 2007 г.

Тронин Сергей Николаевич
Казанский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Serge.Tronin@ksu.ru`