

УДК 510.10+510.57+510.55

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПОПОЛНЕНИЯХ НУМЕРАЦИЙ

С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, А. Сорби

Аннотация. Представлены некоторые примеры и конструкции теории полных нумераций и пополнений нумераций, которые частично отвечают на некоторые вопросы, поставленные авторами ранее в их совместной статье.

Ключевые слова: нумерация, вычислимость, полная нумерация, полурешетка Роджерса, вычислимость с оракулом, арифметическая нумерация.

Посвящается памяти Сергея Львовича Соболева

Все обозначения и терминологию, используемые в настоящей статье, можно найти в [1]. В частности, через $U^{(n)}$ мы обозначаем универсальную $\emptyset^{(n)}$ -частично вычислимую функцию, определяемую для всех $x, y \in \omega$ как $U^{(n)}(\langle x, y \rangle) = \varphi_x^{\emptyset^{(n)}}(y)$ (где $\varphi_x^{\emptyset^{(n)}}$ — x -я частичная функция, вычислимая с оракулом $\emptyset^{(n)}$), а для заданной нумерации $\alpha : \omega \rightarrow \mathcal{A}$ и объекта $a \in \mathcal{A}$ через $\alpha_a^{\mathbf{0}^{(n)}}$ мы обозначаем $\mathbf{0}^{(n)}$ -пополнение нумерации α относительно a (a называется *специальным объектом* пополнения), т. е. нумерацию (являющуюся $\mathbf{0}^{(n)}$ -полной относительно a в смысле [1, определение 2.5])

$$\alpha_a^{\mathbf{0}^{(n)}}(x) \Leftarrow \begin{cases} \alpha(U^{(n)}(x)), & \text{если } U^{(n)}(x) \downarrow, \\ a & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $n = 0$, то мы опускаем верхний индекс (0). Таким образом, $U = U^{(0)}$ есть одноместная универсальная частично вычислимая функция. Более того, нумерация является $\mathbf{0}$ -полной, если и только если она полна в классическом смысле А. И. Мальцева [2].

В настоящей статье мы предлагаем некоторые конструкции и заметки, относящиеся к теории полных нумераций и пополнений нумераций. Мы даем полный ответ на вопрос 1 и частичные ответы на вопросы 3 и 4 из [1].

Мы отсылаем читателя к [1] за обзором основных свойств оператора пополнения. Как замечено Ю. Л. Ершовым [3], $\alpha \leq \alpha_a^{\mathbf{0}}$ и $\alpha_a^{\mathbf{0}} \leq \beta$ для любой нумерации $\beta \geq \alpha$, являющейся полной относительно специального объекта a . В частности, $\alpha_a^{\mathbf{0}} \leq \alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда α полна относительно a (см. прямое доказательство этого факта, например, в [1, теорема 2.5(5)]).

Работа частично поддержана грантом INTAS-00-499 Computability in Hierarchies and Topological Spaces. Исследования первого автора частично поддержаны государственным грантом Казахстана на 2006 г. «Лучший преподаватель вуза», Исследования второго автора частично поддержаны РФФИ (код проекта 08-01-00336) и RFBR-06-01-04002-DFG.

1. Пополнения и минимальные нумерации

Следующий вопрос был поставлен в [1].

Вопрос [1, вопрос 1]. Доказать или опровергнуть утверждение: никакая Σ_{n+2}^0 -вычислимая минимальная нумерация любого нетривиального семейства \mathcal{A} не может быть полной.

По простым соображениям частные случаи минимальных нумераций не могут быть полными. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $\alpha : \omega \rightarrow \mathcal{A}$ — произвольная нумерация, и пусть для некоторого $a \in \mathcal{A}$ множество $\alpha^{-1}(a)$ не является продуктивным. Тогда $\alpha < \alpha_a^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha_a^0 \leq \alpha$, то существует вычислимая функция f , для которой $\alpha_a^0 = \alpha \circ f$. Тогда $(\alpha_a^0)^{-1}(a) \leq_m \alpha^{-1}(a)$, при этом m -сводящей функцией является f . Поскольку α_a^0 полна относительно a , то $(\alpha_a^0)^{-1}(a)$ продуктивно по классическому результату Мальцева [2]. Отсюда получаем, что $\alpha^{-1}(a)$ является продуктивным. \square

Следствие 1. Если $\alpha^{-1}(a)$ не является продуктивным множеством, то α не полна относительно a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, поскольку если α полна относительно a , то $\alpha_a^0 \leq \alpha$. \square

Предыдущий результат применим ко всем минимальным нумерациям и всем объектам, индексные множества которых не являются продуктивными. Сюда относится и случай, когда индексное множество любого объекта семейства является вычислимо перечислимым. В частности, ни одна позитивная нумерация нетривиального семейства не может быть полной относительно любого из объектов. С другой стороны, хотя каждая позитивная нумерация минимальна, обратное неверно. Таким образом, вышеприведенные соображения не дают полного ответа на вопрос 1 из [1]. Полный ответ на этот вопрос дается в следующей теореме. Заметим, что ограничение на вычислимость нумерации в вопросе 1 из [1] на самом деле несущественно.

Теорема 1. Полная нумерация нетривиального семейства не может быть минимальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть нумерация $\alpha : \omega \rightarrow \mathcal{A}$ полна относительно специального объекта a , и пусть \mathcal{A} содержит более одного объекта, т. е. \mathcal{A} является нетривиальным семейством. Построим последовательность нумераций $\beta_i : \omega \rightarrow \mathcal{A}_i$, удовлетворяющую следующим требованиям:

- 1) $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ для всех i ;
- 2) $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{A}_i$;

3) существует вычислимая функция двух переменных $f(i, x)$ такая, что $\beta_i \leq \alpha$ посредством функции $f_i(x) = f(i, x)$.

Для этого определим частично вычислимые функции g_i , полагая

$$g_i(x) \Leftarrow \begin{cases} x, & \text{если } i = x, \\ \uparrow & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и обозначим через h_i доопределения функций g_i до всюду определенных вычислимых функций по модулю полной нумерации α , т. е.

$$\alpha(h_i(x)) = \begin{cases} \alpha(g_i(x)), & \text{если } g_i(x) \downarrow, \\ a & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим $\beta_i : \omega \rightarrow \mathcal{A}$ как $\beta_i = \alpha \circ h_i$ и \mathcal{A}_i как подсемейство семейства \mathcal{A} , занумерованное с помощью β_i . Поскольку последовательность функций $\{g_i\}$ равномерно вычислима, а процедура доопределения с помощью полной нумерации также является равномерной, то $f(i, x) \Leftarrow h_i(x)$ — всюду определенная вычисляемая функция. Следовательно, требования (1)–(3) удовлетворены.

Положим

$$\beta(\langle i, x \rangle) \Leftarrow \beta_i(x)$$

для всех i, x . Тогда β является нумерацией семейства \mathcal{A} и

$$\beta(\langle i, x \rangle) = \alpha(f(i, x)).$$

Таким образом, $\beta \leq \alpha$. С другой стороны, β разлагается в нетривиальную прямую сумму нумераций (поскольку \mathcal{A} является нетривиальным семейством), а α не разложима в такие суммы (согласно классическому результату Ю. Л. Ершова [4] никакая предполная нумерация не разлагается в нетривиальную сумму нумераций подсемейств нумеруемого семейства).

Отсюда $\beta < \alpha$, следовательно, α не является минимальной нумерацией \mathcal{A} , что и требовалось доказать. \square

2. Промежуточные нумерации между α и α_A^0

Теперь обратим внимание на вопросы 3, 4 из [1]).

Вопрос [1, вопрос 3]. Пусть $\alpha \in \text{Com}_{n+2}^0(\mathcal{A})$ является произвольной нумерацией нетривиального семейства \mathcal{A} , и предположим, что α не полна относительно $A \in \mathcal{A}$. Существует ли нумерация β такая, что $\alpha < \beta < \alpha_A^0$?

Вопрос [1, вопрос 4]. Пусть $\alpha \in \text{Com}_{n+2}^0(\mathcal{A})$ является произвольной нумерацией нетривиального семейства \mathcal{A} , и предположим, что α не полна относительно $A \in \mathcal{A}$. Существует ли нумерация β , не разложимая в нетривиальную сумму нумераций и такая, что $\alpha < \beta < \alpha_A^0$?

Легко привести примеры семейств и их нумераций, разложимых в нетривиальные прямые суммы и отвечающих на вопрос 3 из [1].

Лемма 2. Пусть семейство \mathcal{A}_0 является Σ_{n+2}^0 -вычислимым и $B \notin \mathcal{A}_0$ — некоторое множество класса Σ_{n+2}^0 , а $\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{A}_0 \cup \{B\}$. Тогда для любого выбора $A \neq B$ в качестве специального объекта в \mathcal{A} существуют нумерации $\alpha, \beta \in \text{Com}_{n+2}^0(\mathcal{A})$ такие, что $\alpha < \beta < \alpha_A^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}, A, B$ выбраны, как в утверждении леммы. Пусть $\gamma \in \text{Com}_{n+2}^0(\mathcal{A}_0)$ — какая-нибудь нумерация, не являющаяся полной относительно A , а δ — нумерация тривиального семейства $\{B\}$. Определим $\alpha \Leftarrow \gamma \oplus \delta$, $\beta \Leftarrow \gamma_A^0 \oplus \delta$. Очевидно, α, β являются Σ_{n+2}^0 -вычислимыми нумерациями семейства \mathcal{A} . Покажем теперь, что нумерации α и β удовлетворяют неравенствам $\alpha < \beta < \alpha_A^0$.

Поскольку γ не полна относительно A , то $\gamma < \gamma_A^0$ по свойствам оператора пополнения [1]. Отсюда получаем $\alpha < \beta$. Далее, несложно заметить, что $\beta \leq \alpha_A^0$. Предположим теперь, что $\beta \equiv \alpha_A^0$. Тогда полная нумерация α_A^0 разлагается в прямую сумму несравнимых нумераций γ_A^0 и δ подсемейств семейства \mathcal{A} , что противоречит уже упоминавшемуся ранее результату Ершова о неразложимости предполных нумераций в прямую сумму [4]. \square

Что касается вопроса 4 из [1], мы приведем эффектный пример Σ_1^0 -вычисляемой нумерации α с \emptyset в качестве особого объекта, отвечающей на вопрос,

т. е. такой, что интервал $(\deg(\alpha), \deg(\alpha_{\emptyset}^0))$ содержит неразложимые элементы (равно как и разложимые).

Положим $\mathcal{A} \rightleftharpoons \{\emptyset, \{0\}\}$ и

$$\alpha(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \emptyset, & \text{если } x = 0, \\ \{0\}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и выберем \emptyset в качестве специального объекта. Тогда $\alpha < \alpha_{\emptyset}^0$.

Лемма 3. $\beta \leq \alpha_{\emptyset}^0$ для любой нумерации $\beta \in \text{Com}_1^0(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta \in \text{Com}_1^0(\mathcal{A})$. Тогда $\beta^{-1}(\{0\})$ является вычислимо перечислимым множеством. Положим

$$\phi(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \beta^{-1}(\{0\}), \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция ϕ является частично вычислимой, и тогда в силу полноты нумерации α_{\emptyset}^0 существует всюду определенная вычислимая функция f , для которой

$$\alpha_{\emptyset}^0(f(x)) = \begin{cases} \alpha_{\emptyset}^0(\phi(x)), & \text{если } \phi(x) \downarrow, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы утверждаем, что $\beta = \alpha_{\emptyset}^0 \circ f$. Действительно, если $\beta(x) = \emptyset$, то $\phi(x) \uparrow$ и поэтому $\alpha_{\emptyset}^0(f(x)) = \emptyset$; с другой стороны, если $\beta(x) = \{0\}$, то $\alpha_{\emptyset}^0(f(x)) = \alpha_{\emptyset}^0(\phi(x)) = \{0\}$, поскольку $\phi(x) \downarrow$ и $\phi(x) > 0$. \square

Обозначим через \mathcal{E}_m верхнюю полурешетку \mathbf{m} -степеней вычислимо перечислимых множеств (за исключением \emptyset и ω).

Следствие 2. Если \mathcal{A} и α выбраны, как выше, то

$$\mathcal{R}_1^0(\mathcal{A}) \simeq [\deg(\alpha), \deg(\alpha_{\emptyset}^0)] \simeq \mathcal{E}_m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из предыдущей леммы и хорошо известного факта (см. [3]) о том, что отображение, ставящее в соответствие каждому вычислимо перечислимому множеству $B \neq \emptyset, \omega$ нумерацию α_B семейства \mathcal{A} ,

$$\alpha_B(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \emptyset, & \text{если } x \notin B, \\ \{0\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

порождает изоморфизм верхних полурешеток \mathcal{E}_m и $\mathcal{R}_1^0(\mathcal{A})$. \square

Относительно вопросов 3 и 4 из [1] можно теперь прийти к следующему заключению.

Следствие 3. Для любого n существуют Σ_{n+1}^0 -вычислимое семейство \mathcal{A} , специальный объект $a \in \mathcal{A}$ и Σ_{n+1}^0 -вычислимая нумерация α семейства \mathcal{A} такие, что сегмент степеней $[\deg(\alpha), \deg(\alpha_a^0)]$ полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_{n+1}^0(\mathcal{A})$ изоморфен \mathcal{E}_m . В частности, поскольку каждая конечная дистрибутивная решетка изоморфна некоторому начальному сегменту полурешетки \mathcal{E}_m (см. [5]), то в $(\deg(\alpha), \deg(\alpha_a^0))$ можно найти как разложимые, так и неразложимые элементы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве \mathcal{A} и α семейство и нумерацию из следствия 2 и положим $a = \emptyset$. Тогда доказываемое утверждение сразу следует из того, что для любого n сегмент $[\deg(\alpha), \deg(\alpha_a^0)]$ образует идеал полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_{n+1}^0(\mathcal{A})$. \square

3. Пополнения и универсальные нумерации

Согласно теореме 2.11(2) из [1] для любого $n \geq 0$ если Σ_{n+1}^0 -вычислимое семейство содержит наименьшее по включению множество \perp , то всякая универсальная нумерация α этого семейства является полной относительно \perp (поскольку α_{\perp}^0 является Σ_{n+1}^0 -вычислимой и $\alpha \equiv \alpha_{\perp}^0$). Естественно встает вопрос о возможности построения примеров Σ_{n+1}^0 -вычислимых семейств, содержащих наименьшее множество \perp , и их нумераций α , полных относительно \perp , но являющихся универсальными. Положительный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Для каждого n существует Σ_{n+1}^0 -вычислимое семейство \mathcal{A} с наименьшим по включению множеством A , имеющее Σ_{n+1}^0 -вычислимую нумерацию α такую, что*

- 1) α полна относительно A ;
- 2) α не является универсальной в классе нумераций $\text{Com}_{n+1}^0(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \mathcal{F} — это семейство всех конечных множеств. По релятивизованным версиям теоремы Лахлана о необходимых условиях существования универсальных нумераций [6] получаем, что \mathcal{F} не имеет универсальных нумераций ни в одном из классов нумераций $\text{Com}_{m+1}^0(\mathcal{F})$ при $m \geq 0$. Пусть β является Σ_1^0 -вычислимой Фридберговой нумерацией семейства \mathcal{F} (например, можно использовать нумерацию конечных множеств по их каноническим номерам). Тогда в качестве нумерации α можно взять пополнение β_{\emptyset}^0 . По теореме 2.11(2) из [1] для любого n имеем $\alpha \in \text{Com}_{n+1}^0(\mathcal{A})$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в предыдущем доказательстве взять $\alpha = \beta_{\emptyset}^{0'}$, то по теореме 2.11(2) из [1] получим $\alpha \in \text{Com}_{n+2}^0(\mathcal{A})$ при всех n , но при этом по следствию 2.10.5 из [1] нумерация α будет полной относительно всех элементов семейства \mathcal{F} .

Ввиду следствия 2.11(1) из [1] всякая Σ_{n+2}^0 -вычислимая нумерация семейства, являющаяся универсальной, будет полна относительно всех объектов семейства. Следующая теорема показывает, что обратное утверждение не имеет места.

Теорема 3. *Для любого n существует Σ_{n+2}^0 -вычислимое семейство \mathcal{A} , имеющее Σ_{n+2}^0 -вычислимые нумерации α и β такие, что*

- 1) α является универсальной в классе $\text{Com}_{n+2}^0(\mathcal{A})$;
- 2) $\beta < \alpha$ и β полна относительно каждого элемента семейства \mathcal{A} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \mathcal{A} состоит из всех начальных сегментов ω (включая \emptyset и ω). Для каждого m семейство \mathcal{A} является n -подмножеством семейства всех Σ_{m+1}^0 -множеств, т. е. существует вычислимая функция g такая, что $\{W_{g(x)}^{\emptyset(m)}\}_{x \in \omega}$ дает Σ_{m+1}^0 -вычислимую нумерацию α семейства \mathcal{A} , причем $W_{g(x)}^{\emptyset(m)} = W_x^{\emptyset(m)}$, если $W_x^{\emptyset(m)}$ является начальным сегментом. Следовательно, для каждого m семейство \mathcal{A} имеет универсальную нумерацию в $\text{Com}_{m+1}^0(\mathcal{A})$. Заметим, что $\alpha^{-1}(\omega) = \{x \mid W_x^{\emptyset(m)} = \omega\}$ и, следовательно, множество номеров ω в нумерации α не является $\mathbf{0}'$ -вычислимым.

Пусть теперь $\gamma \in \text{Com}_{m+1}^0(\mathcal{A})$ — какая-нибудь Фридбергова нумерация, например, можно взять

$$\gamma(x) = \begin{cases} \omega, & \text{если } x = 0, \\ \{y : y < x - 1\}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Пусть $\beta = \gamma_{\emptyset}^{\mathbf{0}'}$. Тогда, как в замечании 1, $\beta \in \text{Com}_{n+2}^0(\mathcal{A})$ для любого n и β полна относительно каждого элемента из \mathcal{A} . Кроме того, $\beta < \alpha$, поскольку индексное множество каждого непустого множества из \mathcal{A} в нумерации β является $\mathbf{0}'$ -вычислимым, и, таким образом, сведение $\alpha \leq \beta$ невозможно, иначе получили бы, что индексное множество ω в нумерации α является $\mathbf{0}'$ -вычислимым. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Badaev S., Goncharov S., Sorbi A. Completeness and universality of arithmetical numberings // Computability and Models. New York: Kluwer Plenum Publ., 2003. P. 11–44.
2. Мальцев А. И. Полно нумерованные множества // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 2. С. 4–29.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
4. Ершов Ю. Л. О неотделимых парах // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 6. С. 661–666.
5. Lachlan A. H. Recursively enumerable many-one degrees // Алгебра и логика. 1972. V. 11, N 3. P. 326–358.
6. Lachlan A. H. Standard classes of recursively enumerable sets // Zeit. Mat. Log. Grund. Math. 1964. V. 10, N 1. P. 23–42.

Статья поступила 18 июня 2008 г.

Бадаев Серикжан Агыбаевич
Казахский национальный университет, ул. Масанчи, 39/47, Алматы 050012, Казахстан
badaev@kazsu.kz

Гончаров Сергей Савостьянович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
s.s.goncharov@math.nsc.ru

Andrea Sorbi
Dipartimento di Scienze Matematiche ed Informatiche “Roberto Magari”,
Pian del Mantellini 44, 53100 Siena, Italy
sorbi@unisi.it