Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512.54

О τ–ПРИМИТИВНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н. Ян, В. Го

Аннотация. Изучается влияние τ-примитивных подгрупп на строение конечных групп. В качестве приложения описано строение конечных групп, в которых каждая подгруппа является пересечением подгрупп с индексами, равными степеням простых чисел, а также строение конечных групп, в которых каждая субнормальная подгруппа является пересечением субнормальных подгрупп с индексами, равными степеням простых чисел.

Ключевые слова: конечная группа, подгрупповой функтор, τ-примитивная подгруппа, X-перестановочная подгруппа, строение группы.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Каждой конечной группе G сопоставим некоторое множество $\tau(G)$ ее подгрупп. Следуя [1], будем говорить, что τ — *подгрупповой функтор*, если выполнено следующее: 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G; 2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \longrightarrow B$ и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеют место включения $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Работы целого ряда авторов связаны с изучением и применением подгрупповых функторов такого типа (см., в частности, книги [1–3]). В настоящей работе проводится анализ некоторого нового подхода к приложению подгрупповых функторов.

Будем говорить, что подгрупповой функтор τ *наследственный*, если для любой группы G и любых подгрупп A и $B \in \tau(G)$ выполнено $A \cap B \in \tau(A)$.

Если $H \in \tau(G)$, то H называется *τ-подгруппой* группы G.

Подгрупповой функтор τ называется *решеточным подгрупповым функтором*, если пересечение любых двух τ-подгрупп группы G снова является τ-подгруппой в G. Термин «решеточно подгрупповой функтор» возник в связи с тем фактом, что если τ — решеточно подгрупповой функтор, то для любой группы G множество $\tau(G)$ — решетка. Эта решетка обозначается через $L_{\tau}(G)$.

Подгруппа H группы G называется *примитивной* [4], если она является собственной подгруппой в пересечении всех подгрупп группы G, содержащих H в качестве собственной подгруппы. В другой терминологии примитивная подгруппа — это неразложимый в пересечение элемент решетки подгрупп (см. [5, с. 132]).

Определение 1.1. Пусть τ — решеточно подгрупповой функтор. Тогда τ-подгруппа H группы G называется *τ-примитивной подгруппой группы* G, если

Research is supported by a grant of NNSF of China(#10771180) and a grant of postgraduate innovation fund of Jiangsu Province of China.

она является собственной подгруппой в пересечении всех τ-подгрупп группы G, содержащих H в качестве собственной подгруппы.

Пример 1.2. Для группы G пусть $\tau(G)$ — множество всех подгрупп группы G. Тогда τ — наследственный решеточный подгрупповой функтор.

Пример 1.3. Для группы G пусть $\tau(G)$ — множество всех нормальных подгрупп группы G. Тогда τ — наследственный решеточный подгрупповой функтор. В этом конкретном случае вместо «τ-примитивной подгруппы» будем говорить «нормально примитивная подгруппа».

Пример 1.4. Для группы G пусть $\tau(G)$ — множество всех субнормальных подгрупп группы G. Тогда τ — наследственный решеточный подгрупповой функтор. В этом конкретном случае вместо «τ-примитивной подгруппы» будем говорить «субнормально примитивная подгруппа».

Подгруппа H группы G называется *s-перестановочной в G*, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G.

Пример 1.5. Для группы G пусть $\tau(G)$ — множество всех подгрупп H группы G таких, что H является s-перестановочной в G. Тогда τ — наследственный решеточный подгрупповой функтор в силу [6, теорема 2] и утверждения (2.3) в доказательстве теоремы 1 из [7].

Замечание 1.6. В общем случае решетка $L_\tau(G)$ не обязана являться подрешеткой в решетке $L(G)$ всех подгрупп группы G. Тем не менее для каждого подгруппового функтора из примеров 1.2–1.5 решетка $L_\tau(G)$ является подрешеткой в $L(G)$ для любой группы G. Действительно, это очевидно в примерах 1.2 и 1.3. В случае примера 1.4 это хорошо известный результат Виланда о решетке субнормальных подгрупп. Для примера 1.5 данный факт доказан в [6].

Пример 1.7. 1. Симметрическая группа S_3 степени 3 имеет всего две нормально примитивные подгруппы: силовскую 3-подгруппу P и единичную подгруппу. Ясно, что эти подгруппы являются и субнормально примитивными подгруппами группы G.

2. В знакопеременной группе A_4 степени 4 единичная подгруппа будет нормально примитивной подгруппой группы A_4, но не будет субнормальной примитивной подгруппой в G.

3. Пусть $S_3 = [\langle a\rangle]\langle b\rangle$ — симметрическая группа степени 3 и $C_3 = \langle c\rangle$ — группа порядка 3. Пусть $G = S_3 \times C_3$ и $\Delta = \langle ac\rangle$. Тогда Δ — примитивная и субнормально примитивная, но не нормально примитивная подгруппа группы G.

В настоящей работе изучается влияние τ-примитивных подгрупп на строение групп. Основным результатом является

Теорема 1.8. *Пусть τ — наследственный решеточный подгрупповой функтор такой, что для любой нормальной подгруппы N любой группы A выполнено включение $\tau(N) \subseteq \tau(A)$. Пусть G — разрешимая группа такая, что решетка $L_\tau(G)$ является подрешеткой в $L(G)$. Если любая τ-примитивная подгруппа группы G, не имеющая нильпотентного холлова добавления в G, нормальна в G, то $G = [D]M$ — сверхразрешимая группа, где D и M — нильпотентные холловы подгруппы группы G, $D = G^{\mathscr{N}}$ — $\mathscr{N}$-корадикал группы G и $G = DN_G(D \cap X)$ для любой τ-примитивной подгруппы X группы G. В частности, если любая субнормальная примитивная подгруппа группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G, то G нильпотентна.*

В п. 3 приведены примеры применения данной теоремы.

Все неоговоренные обозначения и термины стандартны. При необходимости читатель может обратиться к [8, 9].

2. Доказательство теоремы 1.8

В следующей лемме перечислены свойства τ-примитивных подгрупп, которые будут использованы далее в работе.

Лемма 2.1. *Пусть G — группа, $H \leq K \leq G$ и τ — наследственно решеточный подгрупповой функтор. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) *Каждая собственная τ-подгруппа H группы G является пересечением некоторых τ-примитивных подгрупп группы G.*

(2) *Пусть $H \leq T \leq G$, где H, T — τ-подгруппы группы G и H — τ-примитивная подгруппа группы T. Тогда $H = T \cap X$ для некоторой τ-примитивной подгруппы X группы G.*

(3) *Пусть $K \leq H \leq G$ и $K \triangleleft G$. Тогда H — τ-примитивная подгруппа группы G тогда и только тогда, когда H/K — τ-примитивная подгруппа группы G/K.*

(4) *Предположим, что $L_\tau(G)$ является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G. Если P и Q — нормальные τ-подгруппы группы G, H — τ-примитивная подгруппа группы G, P и Q имеют взаимно простые порядки, то либо $P \leq H$, либо $Q \leq H$.*

(5) *Предположим, что $L_\tau(G)$ является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G и любая нормальная подгруппа группы G содержится в $\tau(G)$. Если H — τ-примитивная подгруппа группы G и $H_G = 1$, то $F(G) = O_p(G)$ для некоторого простого числа p.*

Доказательство. (1) Если H — τ-примитивная подгруппа группы G, то утверждение (1), очевидно, выполнено. В противном случае $H = H_1 \cap \dots \cap H_t$, где $\{H_1, \dots, H_t\}$ — множество всех τ-подгрупп группы G со свойством $H < H_i < G$. Применяя индукцию по $|G : H|$, получаем, что $H_i = T_{i_1} \cap \dots \cap T_{t_{(i)}}$, где T_{ij} — τ-примитивная подгруппа группы G. Следовательно, (1) выполнено.

(2) Если H — τ-примитивная подгруппа группы G, то утверждение (2), очевидно, выполнено. В противном случае рассмотрим $\{X_1, \dots, X_t\}$ — множество τ-примитивных подгрупп группы G со свойством $H = X_1 \cap \dots \cap X_t$. Тогда

$$H = X_1 \cap \dots \cap X_t = (X_1 \cap \dots \cap X_t) \cap T = (X_1 \cap T) \cap \dots \cap (X_t \cap T).$$

Поскольку H — τ-примитивная подгруппа группы T, существует некоторое $i \in \{1, \dots, t\}$ такое, что $H = T \cap X_i$.

(3) Предположим, что H — τ-примитивная подгруппа группы G. Тогда $H \neq G$ и, значит, $H/K \neq G/K$. Пусть $\{X_i/K \mid i \in I\}$ — множество всех τ-подгрупп группы G/K со свойством $H/K < X_i/K$. Если

$$\bigcap_{i \in I} X_i/K = \big(\bigcap_{i \in I} X_i\big)/K = H/K,$$

то $H = \bigcap\limits_{i \in I} X_i$. Очевидно, что $H < X_i$ для всех $i \in I$. Пусть $\varphi : G \to G/K$ — естественный эпиморфизм из G на G/K. Тогда $\varphi(X_i) = X_i/K$ и $(X_i/K)^{\varphi^{-1}} = X_i$. Следовательно, X_i — τ-подгруппа группы G для любого $i \in I$, но H не является τ-примитивной подгруппой группы G. Это противоречие показывает, что H/K — τ-примитивная подгруппа группы G/K. Аналогично можно доказать, что если H/K — τ-примитивная подгруппа в G/K, то H — τ-примитивная подгруппа в G.

(4) Допустим, что $P \nsubseteq H$ и $Q \nsubseteq H$. Сначала покажем, что PH и QH — τ-подгруппы группы G. Действительно, пусть $\varphi : G \to G/P$ — естественный эпиморфизм из G на G/P. Тогда $\varphi(H) = HP/P \in \tau(G/P)$, поэтому $HP \in \tau(G)$. Аналогично можно показать, что QH — τ-подгруппа группы G. Пусть $n = |PH : H| = |P : H \cap P|$ и $m = |QH : H| = |Q : H \cap Q|$. Тогда $n \neq 1$, $m \neq 1$ и $(n, m) = 1$. Следовательно, $H = PH \cap QH$, что невозможно, так как H — τ-примитивная подгруппа в G.

(5) Непосредственно следует из (4).

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Через $G^{\mathscr{X}}$ обозначим пересечение всех нормальных подгрупп L группы G таких, что $G/L \in \mathscr{X}$. В частности, $G^{\mathscr{N}}$ — наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор по которой нильпотентен, т. е. $G^{\mathscr{N}}$ — это $\mathscr{N}$-корадикал группы G. Следующий факт хорошо известен (см., например, [8, I, лемма 1.2]).

Лемма 2.2. *Для любой нормальной подгруппы N группы G имеет место равенство $(G/N)^{\mathscr{N}} = G^{\mathscr{N}}N/N$.*

τ-Подгруппа H группы G называется *τ-максимальной*, если $H \neq G$ и в G нет τ-подгрупп T таких, что $H < T < G$.

Доказательство теоремы 1.8. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Доказательство состоит в проверке следующих утверждений.

(1) *Условие теоремы выполняется для каждой фактор-группы группы G.*

Пусть H — нормальная подгруппа группы G и T/H — τ-примитивная подгруппа группы G/H. Тогда T — τ-примитивная подгруппа в G по лемме 2.1(3). Следовательно, по условию теоремы либо T нормальна в G, либо $G = TX$ для некоторой нильпотентной холловой подгруппы X группы G. В первом случае T/H нормальна в G/H. Допустим, что имеет место второй случай. Тогда $XH/H \simeq X/X \cap H$ — нильпотентная холлова подгруппа в G/H и $(T/H)(XH/H) = G/H$. Ясно, что решетка $L_\tau(G/H)$ будет подрешеткой в $L(G/H)$. Таким образом, (1) выполнено.

(2) *Условие теоремы выполняется для каждой нормальной подгруппы N группы G.*

Сначала покажем, что $L_\tau(N)$ — подрешетка в $L(N)$. На самом деле достаточно просто доказать, что если $A \in \tau(N)$ и $B \in \tau(N)$, то $\langle A, B\rangle \in \tau(N)$. Поскольку $\tau(N) \subseteq \tau(G)$ по условию, имеем $A \in \tau(G)$ и $B \in \tau(G)$. Но решетка $L_\tau(G)$ — подрешетка в $L(G)$ по условию, поэтому $\langle A, B\rangle \in \tau(G)$, откуда следует, что $\langle A, B\rangle \in \tau(N)$, так как функтор τ наследствен.

Теперь пусть H — τ-примитивная подгруппа в N. Тогда по лемме 2.1(2) группа G содержит τ-примитивную подгруппу X такую, что $H = N \cap X$. Если X нормальна в G, то H нормальна в N. Допустим, что X имеет нильпотентное холлово добавление T в G такое, что $G = XT$. Если $X \leq N$, то $N = N \cap XT = X(N \cap T) = H(N \cap T)$ и $N \cap T$ — нильпотентная холлова подгруппа группы N, так как N нормальна в G. Теперь допустим, что $X \nsubseteq N$, и обозначим через π множество всех простых делителей числа $|XN : X| = |N : N \cap X| = |N : H|$. Тогда каждое число $p \in \pi$ очевидным образом является делителем порядка $|T|$. Значит, по [9, теорема 1.7.8] существует холлова π-подгруппа G_π группы G такая, что $G_\pi \leq T$. Следовательно, $G_\pi \cap N$ — нильпотентная холлова π-

подгруппа в N такая, что $N = H(G_\pi \cap N)^x$ для некоторого $x \in M$. Таким образом, условие теоремы выполнено для N.

(3) *G — сверхразрешимая группа.*

Допустим, что G не сверхразрешима. Тогда в силу утверждения (1) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу H такую, что G/H сверхразрешима, $H = C_G(H) = F(G) = O_p(G) \nsubseteq \Phi(G)$ для некоторого простого числа p и $|H| \neq p$.

Пусть M — максимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $H \leq M$. Пусть q — самый большой простой делитель порядка $|M|$ и M_q — силовская q-подгруппа группы M. Тогда в силу утверждения (2) и выбора группы G группа M сверхразрешима. Значит, $M_q \trianglelefteq M$. Если $q \neq p$, то $M_q \leq C_G(H) = H$, что невозможно, откуда $q = p$. Поскольку $M \trianglelefteq G$ и M_p — характеристическая подгруппа группы M, то $M_p \trianglelefteq G$. Очевидно, $H \leq M_p$, и, значит, $M_p/H \leq O_p(G/H)$. Так как $H = C_G(H)$, то $O_p(G/H) = 1$ по [9, теорема 1.7.11]. Следовательно, $M_p = H$. Допустим, что $|G : M| = p$. Тогда p — наибольший простой делитель числа $|G|$. Группа G/H сверхразрешима, поэтому $O_p(G/H) \neq 1$; противоречие. Значит, $|G : M| = q \neq p$. Отсюда следует, что H — силовская p-подгруппа в G. Пусть H_1 — максимальная подгруппа в H. Поскольку H_1 нормальна в H, по условию выполнено $H_1 \in \tau(H_1) \subseteq \tau(H)$. Таким образом, H_1 — τ-примитивная подгруппа в H, и, значит, $H_1 = X \cap H$ для некоторой τ-примитивной подгруппы X группы G. Предположим, что X нормальна в G. Тогда H_1 нормальна в G, что противоречит минимальности группы H. Следовательно, X не нормальна в G, поэтому по условию в G есть нильпотентная холлова подгруппа T такая, что $G = XT$. Поскольку $p \mid |G : X|$, имеем $H \leq T$. Из равенства $C_G(H) = H$ следует, что $T = H$. Таким образом, $G = HX$, и тем самым $H_1 \trianglelefteq G$. Полученное противоречие показывает, что (3) верно.

(4) *Пусть $D = G^{\mathscr{N}}$ — $\mathscr{N}$-корадикал группы G. Тогда D — нильпотентная холлова подгруппа группы G.*

Группа G сверхразрешима, поэтому $G' \subseteq F(G)$. Очевидно, $D \leq G'$. Значит, D нильпотентна. Теперь покажем, что D — холлова подгруппа в G. Предположим, что это неверно. Тогда $D \neq 1$.

Предположим сначала, что в G есть две минимальные нормальные подгруппы H и R такие, что H — p-группа, R — q-группа и $p \neq q$. Без потери общности можно считать, что $H \leq D$. По лемме 2.2 выполнено равенство $(G/R)^{\mathscr{N}} = (G^{\mathscr{N}})R/R = DR/R$, откуда в силу выбора группы G получаем, что DR/R — холлова подгруппа группы G/R. Пусть D_p — силовская p-подгруппа группы D. Тогда RD_p/R — силовская p-подгруппа группы DR/R и, значит, она также является силовской p-подгруппой группы G/R. Следовательно, D_p — силовская p-подгруппа группы G. Допустим, что $D_p \neq D$, и обозначим через D_r силовскую r-подгруппу группы D, где $r \neq p$. Применяя вышеизложенное рассуждение, получаем, что D_r — силовская r-подгруппа группы G. Таким образом, D — холлова подгруппа в G.

Теперь предположим, что все минимальные нормальные подгруппы группы G являются p-группами. В этом случае $F(G) = O_p(G)$ будет силовской p-подгруппой в G и, значит, $D \leq O_p(G)$. Пусть H — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $H \neq D$, то, используя предыдущие рассуждения, можно установить, что D — силовская p-подгруппа группы G. Значит, можно считать, что $H = D$. Покажем, что $\Phi = \Phi(O_p(G)) = 1$. Действительно, если

$\Phi \neq 1$, то в силу выбора группы G известно, что $\Phi D/\Phi = \Phi G^{\mathscr{N}}/\Phi = (G/\Phi)^{\mathscr{N}}$ — холлова подгруппа в G/Φ. Если $H \leq \Phi$, то G/Φ — нильпотентная группа. Но $O_p(G) \trianglelefteq G$ и, следовательно, $\Phi \leq \Phi(G)$. Таким образом, G нильпотентна, и тем самым $H = G^{\mathscr{N}} = 1$, что противоречит выбору группы G. Значит, $H \nsubseteq \Phi$, и $H\Phi/\Phi$ — неединичная p-группа. Поскольку $(G/\Phi)^{\mathscr{N}} = G^{\mathscr{N}}\Phi/\Phi = H\Phi/\Phi$ — холлова подгруппа группы G/Φ, выполнено равенство $H\Phi = O_p(G)$, поэтому $D = H = O_p(G)$ — холлова подгруппа в G. Полученное противоречие показывает, что $\Phi(O_p(G)) = 1$.

Теперь докажем, что каждая собственная подгруппа T группы $O_p(G)$ нормальна в G. Пусть T — максимальная подгруппа в $O_p(G)$. Тогда T будет τ-примитивной в $O_p(G)$. Из леммы 2.1(2) следует, что $T = O_p(G) \cap X$ для некоторой τ-примитивной подгруппы X группы G. Если X нормальна в G, то $T = O_p(G) \cap X$ нормальна в G. Таким образом, можно считать, что X не нормальна в G. Значит, по условию в G есть нильпотентная холлова подгруппа X_0 такая, что $G = XX_0$. Пусть q — простой делитель индекса $|G : X|$. Тогда $q \mid |X_0|$. Допустим, что $q \neq p$. Поскольку $O_p(G) \cap X = T \neq O_p(G)$, то $p \mid |G : X|$ и, значит, $p \mid |X_0|$. Следовательно, $O_p(G) \leq X_0$. Группа X_0 нильпотентна, поэтому $X_0 \leq C_G(O_p(G))$, что противоречит [9, теорема 1.8.18]. Тем самым $|G : X| = p$. Но $X \cap O_p(G) \trianglelefteq X$, поэтому $T \trianglelefteq G$. Таким образом, каждая максимальная подгруппа группы $O_p(G)$ нормальна в G. Пусть T — немаксимальная подгруппа в $O_p(G)$. Для того чтобы доказать нормальность группы T в G, достаточно показать, что T является пересечением всех максимальных подгрупп T_i группы $O_p(G)$, содержащих T. Поскольку $\Phi(O_p(G)) = 1$, группа $O_p(G)$ — элементарная абелева p-группа. Значит, $O_p(G)/T$ тоже является элементарной абелевой группой, и, следовательно, $\Phi(O_p(G)/T) = 1$. Отсюда вытекает, что T совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы $O_p(G)$, содержащих T.

Поскольку $\Phi(O_p(G)) = 1$, можно считать, что $O_p(G) = \langle a\rangle \times \langle a_2\rangle \times \dots \times \langle a_t\rangle$, где $\langle a_i\rangle$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, $\langle a\rangle = H$ и $|a| = |a_i| = p$. Пусть $a_1 = aa_2\dots a_t$. Тогда из условия $\langle a_1\rangle \cap \langle a_2\rangle \dots \langle a_t\rangle = 1$ следует, что $O_p(G) = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \dots \times \langle a_t\rangle$. Поскольку G не нильпотентна, то $O_p(G) \nsubseteq Z(G)$. Значит, существует индекс i такой, что $a_i \notin Z(G)$. Группа G не является p-группой, поэтому в G есть элемент g такой, что $(|g|, p) = 1$ и $g \notin C_G(a_i)$. Пусть $y = [[a_i, y_1], \dots, y_n]$, где $y_1 = \dots = y_n = g$ и $n = |G|$. Группа $G/H = G/G^{\mathscr{N}}$ нильпотентна, поэтому $y \in H = D$. С другой стороны, поскольку $\langle a_i\rangle \trianglelefteq G$, выполнено $y \in \langle a_i\rangle$. Так как $y_i = g \notin C_G(a_i)$, то $y \neq 1$. Значит, $\langle a_i\rangle = \langle y\rangle = H$; противоречие. Доказательство утверждения (4) завершено.

(5) *Для каждой τ-примитивной подгруппы X группы G выполнено равенство $G = DN_G(X \cap D)$.*

Пусть π_1 — множество всех простых делителей порядка $|D|$. Допустим, что для некоторого $p \in \pi_1$ нашлась силовская p-подгруппа G_p группы G, содержащаяся в X. Поскольку условие теоремы выполнено для G/G_p, по индукции выводим, что

$$(D/G_p)N_{G/G_p}((X/G_p) \cap (D/G_p)) = (D/G_p)N_{G/G_p}((X \cap D)/G_p) = G/G_p.$$

Так как $N_{G/G_p}((X \cap D)/G_p) = N_G(X \cap D)/G_p$, получаем равенство $G = DN_G(X \cap D)$.

Предположим, что $p \mid |G : X|$ для любого $p \in \pi_1$. Тогда из леммы 2.1(4) следует, что $|\pi_1| = 1$. Пусть $\pi_1 = \{p\}$. Тогда $D = G_p$. Пусть π_2 — множество всех простых делителей индекса $|G : X|$. Тогда $p \in \pi_2$. По условию либо в G есть нильпотентная холлова подгруппа X_0 такая, что $G = XX_0$, либо X нормальна в G. Допустим, что имеет место первый случай. Тогда $G_p \subseteq X_0$ и если Q — силовская q-подгруппа группы X_0 для $q \neq p$, то Q — силовская q-подгруппа в G такая, что $Q \subseteq C_G(X \cap G_p)$. Значит, для всех $q \in \pi_2 \setminus \{p\}$ имеем $q \nmid |G : N_G(X \cap G_p)|$. Так как $G_p \cap X \trianglelefteq X$, то $r \nmid |G : N_G(X \cap G_p)|$ для любого $r \notin \{p\} \cup \pi_2$. Отсюда следует, что $|G : N_G(X \cap G_p)| = p^\alpha$ для некоторого $\alpha \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, поэтому $G = G_pN_G(X \cap G_p)$. Наконец, предположим, что X нормальна в G. Тогда $G = N_G(X \cap D) = DN_G(X \cap D)$.

(6) Заключение. Поскольку $D = G^{\mathscr{N}}$ — нормальная холлова подгруппа группы G, из теоремы Шура — Цассенхауза известно, что D обладает дополнением M в G. Группа $G/D \simeq M$ нильпотентна, поэтому M — нильпотентная холлова подгруппа группы G со свойством $G = [D]M$.

Наконец, допустим, что каждая субнормальная примитивная подгруппа группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G. Докажем, что G нильпотентна. Пусть это неверно и G — контрпример наименьшего порядка. Тогда, следуя доказательству утверждения (3), можно показать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу H такую, что G/H нильпотентна и $H = F(G)$. Но тогда 1 является субнормальной примитивной подгруппой в G, поэтому G нильпотентна по условию.

Теорема доказана.

3. Некоторые приложения теоремы 1.8

Целый ряд авторов изучал группы G со следующим свойством: для любой подгруппы H и любого делителя d индекса $|G : H|$ в G есть подгруппа K такая, что $H \leq K$ и $|K : H| = d$ (см. [5, гл. 6, разд. 6]). В частности, было доказано, что такие группы — это группы, в которых каждая подгруппа может быть представлена как пересечение подгрупп, чьи индексы являются попарно взаимно простыми степенями простых чисел (см. [5, гл. 6, теорема 6.1]). В связи с этим естественно возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. *Каково строение групп G, в которых каждая подгруппа может быть представлена как пересечение подгрупп с индексами, равными степеням простых чисел?*

Вопрос 2. *Каково строение групп G, в которых каждая субнормальная подгруппа может быть представлена как пересечение субнормальных подгрупп с индексами, равными степеням простых чисел?*

В настоящем пункте, основываясь на теореме 1.8, мы получим ответ на эти два вопроса и приведем ряд других ее применений.

Пусть A и B — подгруппы группы G и X — непустое подмножество в G. Следуя [10], будем говорить, что *A является X-перестановочной с B*, если существует $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Очевидно, выполнено следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть A, B, X — подгруппы группы G и $K \trianglelefteq G$.*

(1) *Если A является X-перестановочной с B, то AK/K будет XK/K-перестановочна с BK/K в G/K.*

(2) *Если $K \leq A$, то A/K является XK/K-перестановочной с BK/K в G/K тогда и только тогда, когда A является X-перестановочной с B в G.*

Лемма 3.2. *Пусть X — примитивная подгруппа группы G. Группа X будет G-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G тогда и только тогда, когда $|G:X| = p^a$ для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Предположим, что X является G-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G, но индекс $|G:X|$ имеет по крайней мере два различных простых делителя p и q. Тогда для некоторой силовской p-подгруппы P и некоторой силовской q-подгруппы Q группы G выполнено $X < XP = PX$ и $X < XQ = QX$. Следовательно, $X = XP \cap XQ$, что невозможно, так как X — примитивная подгруппа в G. Таким образом, $|G:X| = p^a$ для некоторого простого числа p. Обратно, предположим, что $|G:X| = p^a$ для некоторого простого числа p, и пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. Если $q = p$, то $G = XQ^x$ для некоторого $x \in G$. С другой стороны, если $q \neq p$, то $Q^x \leq X$ для некоторого $x \in G$. Значит, X является G-перестановочной с Q. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть G — группа. Если каждая примитивная подгруппа группы G, не обладающая холловым нильпотентным добавлением в G, нормальна в G, то G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Ясно, что условия леммы остаются верными для каждого фактора и каждой субнормальной подгруппы группы G (см. доказательство теоремы 1.8). Следовательно, G — простая группа. Пусть p — наименьший простой делитель порядка $|G|$ и P — силовская p-подгруппа в G. Пусть M — максимальная подгруппа группы P и $N = N_G(M)$. Поскольку P/M — циклическая группа, N/M будет p-нильпотентна по [11, теорема 10.1.9]. Значит, в N есть максимальная подгруппа T такая, что $M \leq T \trianglelefteq N$ и $|N:T| = p$. Группа T примитивна в N, поэтому $T = N \cap X$ для некоторой примитивной подгруппы X группы G по лемме 2.1(2). Теперь из условия следует, что либо X нормальна в G, либо в G есть нильпотентная холлова подгруппа T_0 такая, что $G = XT_0$. Если выполнен первый случай, то G не проста; противоречие. Следовательно, имеет место второй случай. Если $q \mid |G:X|$ для некоторого простого $q \neq p$, то $q \mid |T_0|$. Покажем, что $p \mid |T_0|$. Действительно, если $p \nmid |T_0|$, то $p \nmid |G:X|$ и, значит, $P^x \subseteq X$ для некоторого $x \in G$. В силу того, что $T \subseteq X$, имеем $N \subseteq X$, откуда $T = N \cap X = N$; противоречие. Следовательно, $p \mid |T_0|$. Пусть Q — силовская p-подгруппа группы T_0 и x — элемент из G со свойством $Q^x = P$. Поскольку T_0^x нильпотентна, $T_0^x \subseteq N$. Следовательно, $q \nmid |G:N|$, и, значит, $q \nmid |G:X|$. Полученное противоречие показывает, что $|G:X| = p^\alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$. Но $M \subseteq X$, поэтому $|G:X| = p$ и, значит, $X \trianglelefteq G$, так как p — наименьший простой делитель порядка $|G|$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.4 [8, II, следствие 7.7.2]. *Пусть G — группа. Если H — нильпотентная субнормальная подгруппа группы G, то $H \subseteq F(G)$.*

В качестве первого применения теоремы 1.8 приведем следующий результат, дающий ответ на вопрос 1.

Теорема 3.5. *Пусть G — группа. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) *Каждая подгруппа группы G может быть представлена как пересечение подгрупп, индексы которых в G являются степенями простых чисел.*

(b) *Каждая примитивная подгруппа групп G имеет индекс, равный степени простого числа.*

(c) *Каждая примитивная подгруппа группы G, не обладающая нильпотентным холловым добавлением в G, нормальна в G.*

(d) *$G = [D]M$ — сверхразрешимая группа, где D и M — нильпотентные холловы подгруппы группы G, $D = G^{\mathscr{N}}$ — $\mathscr{N}$-корадикал группы G и $G = DN_G(D \cap X)$ для любой примитивной подгруппы X группы G.*

(e) *Каждая примитивная подгруппа группы G является $F(G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G.*

Доказательство. Очевидно, что условия (a) и (b) эквивалентны (см. в [5, с. 132]). Импликация (b) $\Rightarrow$ (c) также очевидна. Из теоремы 1.8 и леммы 3.3 следует (c) $\Rightarrow$ (d). Таким образом, в силу леммы 3.2 достаточно доказать импликацию (d) $\Rightarrow$ (e). Во-первых, в силу [6] индекс любой примитивной подгруппы группы G равен степени простого числа. Пусть X — произвольная примитивная подгруппа группы G и P — силовская p-подгруппа в G. Очевидно, $D \subseteq F(G)$. Остается показать, что $XP^d = P^dX$ для некоторого $d \in D$. Если $P \leq D$, то $P \operatorname{char} D \trianglelefteq G$ и, значит, $PX = XP$. Пусть теперь $P \nsubseteq D$. Пусть π — множество всех простых чисел, делящих $|D|$, и E — холлова π'-подгруппа группы G такая, что $P \leq E$. Как доказано выше, $|G : X| = q^a$ для некоторого простого числа q. Если $q = p$, то очевидным образом $G = XP$. Допустим, что $q \neq p$, и пусть X_p — некоторая силовская p-подгруппа группы X. Тогда X_p будет силовской подгруппой группы G. Следовательно, $X_p = P^x$ для некоторого $x \in G$. Тогда $G = DE$ и, значит, $x = de$ для некоторых $d \in D$ и $e \in E$. Поскольку E нильпотентна, $X_p = P^x = P^d$. Таким образом, (e) выполнено.

Следствие 3.6 [12]. *Пусть G — группа. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) *Каждая примитивная подгруппа группы G обладает нильпотентным холловым добавлением в G.*

(b) *$G = [D]M$ — сверхразрешимая группа, где D и M — нильпотентные холловы подгруппы группы G, $D = G^{\mathscr{N}}$ — $\mathscr{N}$-корадикал группы G и $G = DN_G(D \cap X)$ для любой примитивной подгруппы X группы G.*

(c) *Каждая примитивная подгруппа группы G имеет индекс, равный степени простого числа.*

Следствие 3.7 [4]. *Если индекс любой примитивной подгруппы группы G является степенью простого числа, то G сверхразрешима.*

Следствие 3.8. *Если каждая примитивная подгруппа группы G обладает холловым нильпотентным добавлением в G, то G сверхразрешима.*

Еще одно применение теоремы 1.8 дают следующие две теоремы.

Теорема 3.9. *Пусть G — разрешимая группа. Предположим, что каждая субнормальная примитивная подгруппа группы G, не имеющая нильпотентного холлова добавления в G, нормальна в G. Тогда $G = [D]M$ — сверхразрешимая группа, где D и M — нильпотентные холловы подгруппы в G, $D = G^{\mathscr{N}}$ — $\mathscr{N}$-корадикал группы G и $G = DN_G(D \cap X)$ для любой субнормальной примитивной подгруппы X группы G.*

Теорема 3.10. *Пусть G — группа. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) *Каждая субнормальная подгруппа группы G может быть представлена как пересечение субнормальных подгрупп, индексы которых в G равны степеням простых чисел.*

(b) *Индекс любой субнормальной примитивной подгруппы группы G равен степени простого числа.*

(c) *G нильпотентна.*

Доказательство. Условия (a) и (b) эквивалентны по лемме 2.1(1). Импликация (c) $\Rightarrow$ (b) очевидна. Наконец, из теоремы 1.8 и леммы 3.3 следует импликация (b) $\Rightarrow$ (c).

Теорема 3.10 дает ответ на вопрос 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Белорусская наука, 1997.
2. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорусская наука, 2003.
3. *Селькин М. В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Белорусская наука, 1997.
4. *Johnson D. L.* A note on supersoluble groups // Canadian J. Math. 1971. V. 23. P. 562–564.
5. *Between nilpotent and solvable* / M. Weinstein, W. E. Deskins, D. Johnson ets. Passaic NJ: Polygonal Publ. House, 1982.
6. *Kegel O.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 87. S. 205–221.
7. *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Bd 82. S. 125–132.
8. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
9. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press–Kluwer Acad. Publ., 2000.
10. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.
11. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1982.
12. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* On primitive subgroups of finite groups // Indian J. Pure Appl. Math. 2006. V. 37, N 6. P. 369–376.

Статья поступила 27 августа 2007 г.

Nanying Yang (Ян Наньин)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,
Xuzhou, 221116, P.R.China
south0418@126.com

Wenbin Guo (Го Вэньбинь) (corresponding author)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,
Xuzhou 221116, P.R.China
wbguo@xznu.edu.cn