Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.521

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ АНАЛОГЕ РЯДА С ДВУХТОЧЕЧНОЙ ОБЛАСТЬЮ СУММ

О. С. Осипов

Аннотация. Рассматривается несобственный интеграл, соответствующий ряду с двухточечной областью сумм, построенному П. А. Корниловым в пространстве интегрируемых функций. Доказывается, что его область сумм равна множеству всех постоянных функций.

Ключевые слова: перестановка ряда, перестановка интеграла, интеграл Лебега — Бохнера, область сумм ряда, область сумм несобственного интеграла.

§ 1. Постановка задачи

Вскоре после постановки Банахом проблемы линейности области сумм ряда в начале XX в. Марцинкевич предложил ряд, область сумм которого совпадает с множеством всех функций пространства $L_p(0,1)$, $p \geqslant 1$, принимающих целочисленные значения. Позже П. А. Корнилов и К. Возняковский построили примеры рядов с иной областью сумм. В частности, П. А. Корнилов в работе [1] построил ряды с двухточечной областью сумм $\{0,1\}$ в $L_p(0,1)$, с областью сумм, равной всем константам, принимающих целочисленные значения, а также с областью сумм, имеющей вид конечномерной решетки в пространстве $L_p(0,1)$. При изучении линейности области сумм несобственного интеграла особенно интересны свойства интегрального аналога ряда с двухточечной областью сумм. Логично предположить, что его область сумм также состоит из двух точек. Но это не так, она образует одномерное подпространство констант в пространстве $L_p(0,1)$.

Пусть X — банахово пространство, $\mathfrak{L}[0,+\infty)$ — σ-алгебра Лебега подмножеств множества $[0,+\infty)$, μ — мера Лебега, отображение $x : [0,+\infty) \to X$ таково, что существует несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\to+\infty} x(t)\,dt = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

Измеримая биективная функция $\pi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ называется *перестановкой* несобственного интеграла $\int\limits_0^{\to+\infty} x(t)\,dt$ на множестве $[0,+\infty)$, если функция π^{-1} измерима и $\mu(\pi A) = \mu A$ для любого множества $A \in \mathfrak{L}[0,+\infty)$. *Областью сумм* интеграла $\int\limits_0^{\to+\infty} x(t)\,dt$ называется множество $OC\left(\int\limits_0^{\to+\infty} x(t)\,dt\right)$ — совокупность таких $y \in X$, что при некоторой перестановке $\pi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ выполнено равенство $\int\limits_0^{\to+\infty} x(\pi(t))\,dt = y$.

Измеримая функция $\psi : [0,1) \to [0,1)$ называется *равномерно распределенной* на промежутке $[0,1)$, если для любого интервала $I \subset [0,1)$ выполнено условие $\mu(\psi^{-1}I) = \mu I$.

Система действительных, измеримых, определенных на $[0,1)$ функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ называется *системой независимых функций*, если для любых интервалов на числовой прямой I_n, $n = 1, 2, \dots, N$, справедливо равенство

$$\mu\{t \in [0,1); \psi_n(t) \in I_n, n = 1, 2, \dots, N\} = \prod_{n=1}^{N} \mu\{t \in [0,1); \psi_n \in I_n\}.$$

Бесконечная система функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется *последовательностью независимых функций*, если $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ — система независимых функций для любого $N = 1, 2, \dots$.

Введем на промежутке $[0,1)$ обозначение для двоичных полуинтервалов $\Delta_{n,i} = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ для каждого натурального n и для $i = 1, 2, \dots, 2^n$. Пусть $\psi_n : [0,1) \to [0,1)$ для каждого натурального n и система $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ является системой независимых равномерно распределенных функций. Зададим функции $\varphi_{n,i}^{+}$ равенствами

$$\varphi_{n,i}^{+}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi \in \psi_n^{-1}(\Delta_{n,i}), \\ 0, & \text{если } \xi \in [0,1) \setminus \psi_n^{-1}(\Delta_{n,i}), \end{cases}$$

при $n = 1, 2, \dots$ и $i = 1, 2, \dots, 2^n$. Далее определим систему функций:

$$\varphi_{n,i,j}^{-}(\xi) = -\varphi_{n,i}^{+}(\xi) \cdot \varphi_{n+1,j}^{+}(\xi)$$

при $n = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$. Множество

$$J_n^{+} = \left\{\varphi_{n,i}^{+}; i = 1, 2, \dots, 2^n\right\}$$

будем называть *n-й положительной пачкой*, а множество

$$J_n^{-} = \left\{\varphi_{n,i,j}^{-}; i = 1, 2, \dots, 2^n, j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}\right\}$$

— *n-й отрицательной пачкой*. Заметим, что функции из разных положительных пачек, функции из разных отрицательных пачек, а также суммы функций разных пачек независимы.

Пусть $\omega_{m,i} = \bigcap_{n=1}^{m+1} \psi_n^{-1}(\Delta_{n,i_n})$, где $i = (i_1, i_2, \dots, i_{m+1})$, $1 \leqslant i_n \leqslant 2^n$. Получится $2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{m+1} = M_m$ непересекающихся множеств, каждое из которых имеет меру $1/M_m$. Любая функция из $m+1$ положительных и m отрицательных пачек, а значит, и любая их сумма постоянны на каждом $\omega_{m,i}$. В то же время для любой функции φ_k из остальных пачек и для суммы таких функций S_k выполняются равенства

$$\mu\big(\varphi_k^{-1}I \cap \omega_{m,i}\big) = \mu\big(\varphi_k^{-1}I \cap \omega_{m,j}\big), \quad \mu\big(S_k^{-1}I \cap \omega_{m,i}\big) = \mu\big(S_k^{-1}I \cap \omega_{m,j}\big)$$

для любого интервала $I \subset [0,1)$.

В работе [1] доказано, что область сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^n}\left(\varphi_{n,i}^{+} + \sum_{j=1}^{2^{n+1}} \varphi_{n,i,j}^{-}\right)\right)$$

равна множеству $\{0,1\}$ в пространстве $L_p[0,1)$ при $p \geqslant 1$. Далее указанный ряд будем обозначать через $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k$. Естественно ожидать, что область сумм его интегрального аналога также состоит из двух точек. Но это не так.

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 1$ и отображение $\varphi : [0, +\infty) \to L_p[0,1)$ задано по правилу: $\varphi(t) = \varphi_1$ при $t \in [0,1)$, $\varphi(t) = \varphi_2$ при $t \in [1,2), \dots, \varphi(t) = \varphi_{k+1}$ при $t \in [k, k+1), \dots$. Тогда область сумм интеграла $\int\limits_0^{\to +\infty} \varphi(t)\,dt$ равна множеству действительных постоянных функций пространства $L_p[0,1)$.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство состоит из двух частей:

1) область сумм содержит множество постоянных функций,

2) область сумм не содержит функций, отличных от постоянных.

1. Докажем, что область сумм интеграла $\int\limits_0^{\to +\infty} \varphi(t)\,dt$ содержит множество постоянных функций.

Возьмем произвольное вещественное α и составим перестановку π такую, чтобы выполнялось равенство $\int\limits_0^{\to +\infty} \varphi(\pi(t))\,dt = \alpha$. Пусть

$$A_{n,i} = \{t \in [0,+\infty); \varphi(t) = \varphi^+_{n,i}\}, \quad B_{n,i,j} = \{t \in [0,+\infty); \varphi(t) = \varphi^-_{n,i,j}\}.$$

Эти множества представляют собой интервалы единичной длины с целочисленными концами. Через I_n^+ обозначим множество $I_n^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{2^n} A_{n,i}$, через I_n^- — множество $I_n^- = \bigcup\limits_{i=1}^{2^n} \bigcup\limits_{j=1}^{2^{n+1}} B_{n,i,j}$.

Пусть множество J представляет собой объединение конечного числа непересекающихся интервалов, т. е. $J = \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k, b_k)$, $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_m < b_m$. Тогда под *присоединением множества J к интервалу* $[0, b_0)$ будем понимать определение функции π по следующему правилу: $\pi(t) = a_1 + t - b_0$ при $t \in [b_0, b_0 + b_1 - a_1)$, $\pi(t) = a_2 + t - b_0 - b_1 + a_1$ при $t \in [b_0 + b_1 - a_1, b_0 + b_1 - a_1 + b_2 - a_2)$, $\dots$, $\pi(t) = a_m + t - \sum\limits_{i=1}^{m-1}(b_i - a_i) - b_0$ при $t \in \Bigl[b_0 + \sum\limits_{i=1}^{m-1}(b_i - a_i), b_0 + \sum\limits_{i=1}^{m}(b_i - a_i)\Bigr)$. Через $[\alpha]$ обозначим целую часть числа α, через $r = \alpha - [\alpha]$ — дробную часть.

Приступим к построению заявленной перестановки π.

I. Пусть $\alpha \geqslant 0$. На первом шаге присоединим к $\varnothing = [0,0)$ последовательно множества $I_1^+, \dots, I_{[\alpha]}^+$. Разделим каждое из множеств $A_{n,i}$ и $B_{k,i,j}$ при $n > [\alpha]$ и $k \geqslant 1$ на два множества так, чтобы длина первого равнялась r, второго — $(1-r)$:

$$A_{n,i} = A^1_{n,i} \sqcup A^2_{n,i}, \quad B_{k,i,j} = B^1_{k,i,j} \sqcup B^2_{k,i,j},$$
$$\mu A^1_{n,i} = \mu B^1_{k,i,j} = r, \quad \mu A^2_{n,i} = \mu B^2_{k,i,j} = 1 - r.$$

Присоединим к $\bigl[0, \mu I_1^+ + \dots + \mu I^+_{[\alpha]}\bigr)$ множество $\bigcup\limits_{i=1}^{2^{[\alpha]+1}} A^1_{[\alpha]+1,i}$. Пусть

$$t_1 = \mu I_1^+ + \dots + \mu I^+_{[\alpha]} + \sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+1}} \mu A^1_{[\alpha]+1,i}.$$

Разделим каждое из множеств $A^2_{[\alpha]+1,i}$, $A^1_{[\alpha]+2,i}$, $B^1_{1,i,j}$, $B^2_{1,i,j}$ на два равных по длине множества:

$$A^2_{[\alpha]+1,i} = A^{2,1}_{[\alpha]+1,i} \sqcup A^{2,2}_{[\alpha]+1,i}, \quad A^1_{[\alpha]+2,i} = A^{1,1}_{[\alpha]+2,i} \sqcup A^{1,2}_{[\alpha]+2,i},$$

$$B^1_{1,i,j} = B^{1,1}_{1,i,j} \sqcup B^{1,2}_{1,i,j}, \quad B^2_{1,i,j} = B^{2,1}_{1,i,j} \sqcup B^{2,2}_{1,i,j}.$$

Присоединим последовательно

$$\bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+1}} A^{2,1}_{[\alpha]+1,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2}\bigcup_{j=1}^{4} B^{2,1}_{1,i,j}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+1}} A^{2,2}_{[\alpha]+1,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2}\bigcup_{j=1}^{4} B^{2,2}_{1,i,j}.$$

Далее присоединим

$$\bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+2}} A^{1,1}_{[\alpha]+2,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2}\bigcup_{j=1}^{4} B^{1,1}_{1,i,j}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+2}} A^{1,2}_{[\alpha]+2,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2}\bigcup_{j=1}^{4} B^{1,2}_{1,i,j}.$$

Пусть

$$t_2 = t_1 + \sum_{k=1}^{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+1}} \mu A^{2,k}_{[\alpha]+1,i} + \sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+2}} \mu A^{1,k}_{[\alpha]+2,i} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} \mu B^{2,k}_{1,i,j} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} \mu B^{1,k}_{1,i,j}\Bigg).$$

На этом заканчивается первый шаг.

На k-м шаге ($k = 2, 3, \dots$) проделываем следующие действия. Разделим каждое из множеств $A^2_{[\alpha]+k,i}$, $B^2_{k,i,j}$, $A^1_{[\alpha]+k+1,i}$, $B^1_{k,i,j}$ на 2^k равных по длине множеств:

$$A^2_{[\alpha]+k,i} = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} A^{2,m}_{[\alpha]+k,i}, \quad B^2_{k,i,j} = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} B^{2,m}_{k,i,j},$$

$$A^1_{[\alpha]+k+1,i} = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} A^{1,m}_{[\alpha]+k+1,i}, \quad B^1_{k,i,j} = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} B^{1,m}_{k,i,j}.$$

Присоединим последовательно

$$\bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+k}} A^{2,1}_{[\alpha]+k,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^k}\bigcup_{j=1}^{2^{k+1}} B^{2,1}_{k,i,j}, \dots, \bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+k}} A^{2,2^k}_{[\alpha]+k,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^k}\bigcup_{j=1}^{2^{k+1}} B^{2,2^k}_{k,i,j},$$

затем —

$$\bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+k+1}} A^{1,1}_{[\alpha]+k+1,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^k}\bigcup_{j=1}^{2^{k+1}} B^{1,1}_{k,i,j}, \dots, \bigcup_{i=1}^{2^{[\alpha]+k+1}} A^{1,2^k}_{[\alpha]+k+1,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^k}\bigcup_{j=1}^{2^{k+1}} B^{1,2^k}_{k,i,j}.$$

По завершении шага получим определение функции π на сегменте $[0, t_{k+1}]$, и т. д.

В итоге получим перестановку π. Докажем, что $\int\limits_0^{\to+\infty} \varphi(\pi(t))\,dt = \alpha$. Пусть $\varepsilon > 0$ и p — целое положительное число такое, что $2^{-p} < \varepsilon$. Тогда для любого числа $T > t_p$ выполнено

$$\left\|\int\limits_0^T \varphi(\pi(t))\,dt - \alpha\right\| = \left\|\int\limits_0^{t_1} \varphi(\pi(t))\,dt + \ldots + \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} \varphi(\pi(t))\,dt + \ldots + \int\limits_{t_{q-1}}^{t_q} \varphi(\pi(t))\,dt\right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_q}^{T} \varphi(\pi(t))\,dt - \alpha\right\| = \left\|[\alpha] + r + \sum_{m=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+1}} \int\limits_{A^{2,m}_{[\alpha]+1,i}} \varphi(t)\,dt\right.\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} \int\limits_{B^{2,m}_{1,i,j}} \varphi(t)\,dt + \sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+2}} \int\limits_{A^{1,m}_{[\alpha]+2,i}} \varphi(t)\,dt + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} \int\limits_{B^{1,m}_{1,i,j}} \varphi(t)\,dt\right) + \ldots$$

$$+ \sum_{m=1}^{2^p}\left(\sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+p}} \int\limits_{A^{2,m}_{[\alpha]+p,i}} \varphi(t)\,dt + \sum_{i=1}^{2^p}\sum_{j=1}^{2^{p+1}} \int\limits_{B^{2,m}_{p,i,j}} \varphi(t)\,dt + \sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+p+1}} \int\limits_{A^{1,m}_{[\alpha]+p+1,i}} \varphi(t)\,dt\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{2^p}\sum_{j=1}^{2^{p+1}} \int\limits_{B^{1,m}_{p,i,j}} \varphi(t)\,dt\right) + \ldots + \int\limits_{t_q}^{T} \varphi(\pi(t))\,dt - \alpha\right\| = \left\|[\alpha] + r\mu A^{+}_{[\alpha]+1,i}\right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+1}} \frac{1-r}{2}\varphi^{+}_{[\alpha]+1,i} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}\frac{1-r}{2}\varphi^{-}_{1,i,j} + \sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+2}} \frac{r}{2}\varphi^{+}_{[\alpha]+2,i} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}\frac{r}{2}\varphi^{-}_{1,i,j}\right)$$

$$\left. + \cdots + \int\limits_{t_q}^{T} \varphi(\pi(t))\,dt - \alpha\right\| = \left\|\int\limits_{t_q}^{T} \varphi(\pi(t))\,dt\right\| \leqslant \frac{1}{2^q}\sum_{i=1}^{2^{[\alpha]+q}} \left\|\varphi^{+}_{[\alpha]+q,i}\right\| = \frac{1}{2^q} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{\to+\infty} \varphi(\pi(t))\,dt = \alpha$.

II. Пусть $\alpha < 0$. На первом шаге присоединим к $\varnothing = [0,0)$ последовательно множества $I_1^-, \ldots, I^-_{|[\alpha]|}$. Разделим каждое из множеств $A_{n,i}$ и $B_{k,i,j}$ при $n \geqslant 1$ и $k > |[\alpha]|$ на два множества так, чтобы длина первого равнялась r, второго — $(1-r)$:

$$A_{n,i} = A^1_{n,i} \sqcup A^2_{n,i}, \quad B_{k,i,j} = B^1_{k,i,j} \sqcup B^2_{k,i,j},$$
$$\mu A^1_{n,i} = \mu B^1_{k,i,j} = r, \quad \mu A^2_{n,i} = \mu B^2_{k,i,j} = 1 - r.$$

Присоединим $\bigcup\limits_{i=1}^{2} A^1_{1,i}$. Пусть $t_1 = \mu I_1^- + \ldots + \mu I^-_{|[\alpha]|} + \sum\limits_{i=1}^{2} \mu A^1_{1,i}$.

Разделим каждое из множеств $A^2_{1,i}$, $A^1_{2,i}$, $B^1_{|[\alpha]|+1,i,j}$, $B^2_{|[\alpha]|+1,i,j}$ на два равных по длине множества:

$$A^2_{1,i} = A^{2,1}_{1,i} \sqcup A^{2,2}_{1,i}, \quad A^1_{2,i} = A^{1,1}_{2,i} \sqcup A^{1,2}_{2,i},$$

$$B^1_{|[\alpha]|+1,i,j} = B^{1,1}_{|[\alpha]|+1,i,j} \sqcup B^{1,2}_{|[\alpha]|+1,i,j}, \quad B^2_{|[\alpha]|+1,i,j} = B^{2,1}_{|[\alpha]|+1,i,j} \sqcup B^{2,2}_{|[\alpha]|+1,i,j}.$$

Присоединим последовательно

$$\bigcup_{i=1}^{2} A^{2,1}_{1,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+1}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+2}} B^{2,1}_{|[\alpha]|+1,i,j}, \quad \bigcup_{i=1}^{2} A^{2,2}_{1,i}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+1}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+2}} B^{2,2}_{|[\alpha]|+1,i,j}.$$

Далее присоединим

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_{2,i}^{1,1}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+1}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+2}} B_{|[\alpha]|+1,i,j}^{1,1}, \quad \bigcup_{i=1}^{4} A_{2,i}^{1,2}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+1}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+2}} B_{|[\alpha]|+1,i,j}^{1,2}.$$

Пусть

$$t_2 = t_1 + \sum_{k=1}^{2} \Biggl(\sum_{i=1}^{2} \mu A_{1,i}^{2,k} + \sum_{i=1}^{4} \mu A_{2,i}^{1,k} + \sum_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+1}} \sum_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+2}} \mu B_{|[\alpha]|+1,i,j}^{2,k} + \sum_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+1}} \sum_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+2}} \mu B_{|[\alpha]|+1,i,j}^{1,k} \Biggr).$$

На этом заканчивается первый шаг.

На k-м шаге проделываем следующие действия. Разделим каждое из множеств $A_{k,i}^2$, $B_{|[\alpha]|+k,i,j}^2$, $A_{k+1,i}^1$, $B_{|[\alpha]|+k,i,j}^1$ на 2^k равных по длине множества:

$$A_{k,i}^2 = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} A_{k,i}^{2,m}, \quad B_{|[\alpha]|+k,i,j}^2 = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} B_{|[\alpha]|+k,i,j}^{2,m},$$

$$A_{k+1,i}^1 = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} A_{k+1,i}^{1,m}, \quad B_{|[\alpha]|+k,i,j}^1 = \bigsqcup_{m=1}^{2^k} B_{|[\alpha]|+k,i,j}^{1,m}.$$

Присоединим последовательно

$$\bigcup_{i=1}^{2^k} A_{k,i}^{2,1}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+k}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+k+1}} B_{|[\alpha]|+k,i,j}^{2,1}, \dots, \bigcup_{i=1}^{2^k} A_{k,i}^{2,2^k}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+k}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+k+1}} B_{|[\alpha]|+k,i,j}^{2,2^k},$$

затем —

$$\bigcup_{i=1}^{2^{k+1}} A_{k+1,i}^{1,1}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+k}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+k+1}} B_{|[\alpha]|+k,i,j}^{1,1}, \dots, \bigcup_{i=1}^{2^{k+1}} A_{k+1,i}^{1,2^k}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^{|[\alpha]|+k}} \bigcup_{j=1}^{2^{|[\alpha]|+k+1}} B_{|[\alpha]|+k,i,j}^{1,2^k}.$$

По завершении шага получим определение функции π на сегменте $[0, t_{k+1}]$, и т. д.

В итоге получим перестановку π. Равенство $\int\limits_0^{\to+\infty} \varphi(\pi(t))\,dt = \alpha$ доказывается совершенно аналогично случаю положительного α.

2. Докажем, что область сумм интеграла $\int\limits_0^{\to+\infty} \varphi(t)\,dt$ не содержит функций, отличных от постоянных

Допустим, что область сумм содержит непостоянную функцию

$$f = \int\limits_0^{\to+\infty} \varphi(\pi(t))\,dt,$$

и выберем такие $y \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, что $0 < \alpha = \mu(f^{-1}[y-\delta, y+\delta]) < 1$. Пусть $\varepsilon = \min\{\alpha, 1-\alpha\}/5$ (следовательно, $5\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1 - 5\varepsilon$). Пусть, далее, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $0 < \gamma_n < \gamma_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty$, $A_n \in \mathfrak{L}[0, +\infty)$, $A \subset [0, \gamma_n]$,

$$\int\limits_{[0,\gamma_n]\setminus A_n} \varphi(\pi(t))\,dt = \sum_{k=1}^{m_n} c_k^n \varphi_k = S_n,$$

$$\Bigg\|\int\limits_{A_n}\varphi(\pi(t))\,dt\Bigg\|<\frac{1}{n},\quad \mu A_n<\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\|S_n-f\|=\Bigg\|\int\limits_0^{\gamma_n}\varphi(\pi(t))\,dt-\int\limits_{A_n}\varphi(\pi(t))\,dt-f\Bigg\|$$
$$\leqslant\Bigg\|\int\limits_0^{\gamma_n}\varphi(\pi(t))\,dt-f\Bigg\|+\Bigg\|\int\limits_{A_n}\varphi(\pi(t))\,dt\Bigg\|\to 0$$

при $n\to+\infty$.

Преобразуем последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ следующим образом.

1. Выберем n_1 такое, что

$$\Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_1,\\ \varphi_k\in J_1^+}}c_k^{n_1}\varphi_k-1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2},\quad \Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_1,\\ \varphi_k\in J_1^-}}c_k^{n_1}\varphi_k+1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Удалим из S_n при $1\leqslant n\leqslant n_1$ функции из J_1^+ и J_1^-.

2. Выберем n_2 такое, что

$$\Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_2,\\ \varphi_k\in J_1^+}}c_k^{n_2}\varphi_k-1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 2^2},\quad \Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_2,\\ \varphi_k\in J_1^-}}c_k^{n_2}\varphi_k+1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 2^2},$$

$$\Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_2,\\ \varphi_k\in J_2^+}}c_k^{n_2}\varphi_k-1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 2^2},\quad \Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_2,\\ \varphi_k\in J_2^-}}c_k^{n_2}\varphi_k+1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 2^2}.$$

Удалим из S_n при $n_1<n\leqslant n_2$ функции из J_1^+, J_1^-, J_2^+, J_2^-.

3. Выберем n_3 такое, что

$$\Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_3,\\ \varphi_k\in J_1^+}}c_k^{n_3}\varphi_k-1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^2},\quad \Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_3,\\ \varphi_k\in J_1^-}}c_k^{n_3}\varphi_k+1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^2},$$

$$\Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_3,\\ \varphi_k\in J_2^+}}c_k^{n_3}\varphi_k-1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^2},\quad \Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_3,\\ \varphi_k\in J_2^-}}c_k^{n_3}\varphi_k+1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^2},$$

$$\Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_3,\\ \varphi_k\in J_3^+}}c_k^{n_3}\varphi_k-1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^2},\quad \Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_3,\\ \varphi_k\in J_3^-}}c_k^{n_3}\varphi_k+1\Bigg\|\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^2}.$$

Удалим из S_n при $n_2<n\leqslant n_3$ функции из J_1^+, J_1^-, J_2^+, J_2^-, J_3^+, J_3^-, и т. д. Получим последовательность $\{\widetilde{S}_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}=\{\sigma_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Поскольку

$$\|S_{n_k}-\sigma_k\|=\Bigg\|\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_k,\\ \varphi_i\in J_1^+}}c_i^{n_k}\varphi_i-1+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_k,\\ \varphi_i\in J_1^-}}c_i^{n_k}\varphi_i+1+\dots$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_k,\\ \varphi_i\in J_k^+}}c_i^{n_k}\varphi_i-1+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_k,\\ \varphi_i\in J_k^-}}c_i^{n_k}\varphi_i+1\Bigg\|\leqslant\frac{2k}{2k^2}=\frac{1}{k},$$

то $\lim\limits_{k\to+\infty}\sigma_k=f$ в пространстве $L_p[0,1)$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to+\infty}\sigma_k=f$ по мере.

Пусть $\eta>0$ такое, что $\mu(f^{-1}(y-\delta-7\eta,y+\delta+7\eta))<\alpha+\varepsilon$, $K_1\geqslant 0$ такое, что для любых $k\geqslant K_1$ выполняется неравенство

$$\mu\{x\in[0,1);|\sigma_k(x)-f(x)|\geqslant\eta\}<\varepsilon.$$

Тогда для любых $k_1,k_2\geqslant K_1$ верно условие $\mu\{x\in[0,1);|\sigma_{k_1}(x)-\sigma_{k_2}(x)|\geqslant 2\eta\}<2\varepsilon$. Заметим, что из выбора ε и выполнения неравенств

$$\begin{aligned}&\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-6\eta,y+\delta+6\eta)\big)\\&\quad=\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-6\eta,y+\delta+6\eta)\cap f^{-1}(y-\delta-7\eta,y+\delta+7\eta)\big)\\&\quad+\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-6\eta,y+\delta+6\eta)\setminus f^{-1}(y-\delta-7\eta,y+\delta+7\eta)\big)<\alpha+2\varepsilon,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\alpha\leqslant\mu(f^{-1}(y-\delta-\eta,y+\delta+\eta))\\&\quad=\mu\big(f^{-1}(y-\delta-\eta,y+\delta+\eta)\cap\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-2\eta,y+\delta+2\eta)\big)\\&\quad+\mu\big(f^{-1}(y-\delta-\eta,y+\delta+\eta)\setminus\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-2\eta,y+\delta+2\eta)\big)\\&\quad\leqslant\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-2\eta,y+\delta+2\eta)\big)+\varepsilon\end{aligned}$$

следует, что

$$\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-6\eta,y+\delta+6\eta)\big)<\alpha+2\varepsilon<1-3\varepsilon,$$
$$\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-2\eta,y+\delta+2\eta)\big)>\alpha-\varepsilon>4\varepsilon.$$

Пусть m — максимум из первых индексов функций, входящих в σ_{K_1}. Тогда в множество $\sigma_{K_1}^{-1}((-\infty,y-\delta-6\eta)\cup(y+\delta+6\eta,+\infty))$ входит более $3\varepsilon M_m$ множеств $\omega_{m,i}$, в множество $\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-2\eta,y+\delta+2\eta)$ — более $4\varepsilon M_m$ множеств.

Пусть σ_{K_2}, $K_2>K_1$, не содержит функции первых $m+1$ положительных и отрицательных пачек. Тогда выполняется равенство $\mu\big(\sigma_{K_2}^{-1}I\cap\omega_{m,i}\big)=\mu\big(\sigma_{K_2}^{-1}I\cap\omega_{m,j}\big)$ для любого интервала I и любых $i\neq j$. Пусть

$$\mu\big(\big(\sigma_{K_2}^{-1}((-\infty,y-\delta-4\eta)\cup(y+\delta+4\eta,+\infty))\cap\omega_{m,i}\big)\big)=\nu,$$
$$\mu\big(\big(\sigma_{K_2}^{-1}(y-\delta-4\eta,y+\delta+4\eta)\big)\cap\omega_{m,i}\big)=1/M_m-\nu.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\mu\{x\in[0,1);|\sigma_{K_1}(x)-\sigma_{K_2}(x)|\geqslant 2\eta\}\\&>\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}((-\infty,y-\delta-6\eta)\cup(y+\delta+6\eta,+\infty))\cap\sigma_{K_2}^{-1}(y-\delta-4\eta,y+\delta+4\eta)\big)\\&+\mu\big(\sigma_{K_1}^{-1}(y-\delta-2\eta,y+\delta+2\eta)\cap\sigma_{K_2}^{-1}((-\infty,y-\delta-4\eta)\cup(y+\delta+4\eta,+\infty))\big)\\&\qquad\geqslant 3\varepsilon M_m(1/M_m-\nu)+4\varepsilon M_m\nu=3\varepsilon+\varepsilon M_m\nu;\end{aligned}$$

противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнилов П. А.* О множестве сумм условно сходящегося функционального ряда // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 1. С. 114–127.
2. *Kadets M. I., Kadets V. M.* Series in Banach spaces: conditional and unconditional convergence. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

Статья поступила 3 апреля 2008 г., окончательный вариант — 16 сентября 2009 г.

Осипов Олег Сергеевич
Томский гос. университет, пр. Ленина, 36, Томск 634050
osipov-os@math.tsu.ru