Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 519.233.5

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Ю. Ю. Линке, А. И. Саханенко

Аннотация. Рассмотрена задача оценивания неизвестного одномерного параметра в задаче линейной регрессии в случае, когда независимые переменные (называемые в работе коэффициентами) сами измеряются с ошибками, а дисперсии основных наблюдений могут зависеть от основного параметра. Изучено поведение двухшаговых оценок, введенных авторами ранее, которые асимптотически оптимальны в случае, когда независимые переменные измерялись без ошибок. При достаточно общих предположениях найдены необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности и асимптотической оптимальности этих оценок в новой ситуации.

Ключевые слова: линейная регрессия, ошибки в независимых переменных, двухшаговые оценки, асимптотически нормальные оценки.

§ 1. Введение

1.1. Предположим, что наблюдаются случайные величины $\{Y_i\}$, которые представимы в виде

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где β — неизвестный числовой параметр, $\{\epsilon_i\}$ — независимые ненаблюдаемые ошибки, распределения которых могут быть неизвестны, причем

$$\mathbf{E}\epsilon_i = 0, \quad 0 < \mathbf{D}\epsilon_i = \sigma^2/w_i(\beta, x_i) < \infty \quad \text{при всех } i = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $\{w_i(\cdot,\cdot)\}$ — известные функции, а параметр $\sigma^2 > 0$ может быть неизвестным.

Если значения чисел $\{x_i\}$ известны, то в модели линейной регрессии (1), (2) в качестве оценок параметра β обычно используются статистики вида

$$\beta_n^* = \sum_{i=1}^n c_i Y_i \Big/ \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad \text{при } \sum_{i=1}^n c_i x_i \neq 0, \tag{3}$$

где числа $\{c_i\}$ выбираются статистиком.

Положим $d_{n,\mathrm{opt}}^2 = \sigma^2 / \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 w_i(\beta, x_i)$. Все линейные оценки вида (3) несмещенные, и для них справедлива (см., например, [1, теорема 3.2])

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00962) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3695.2008.1).

Теорема A. *Если функции $w_i(\beta, x_i) = w_i(x_i) > 0$ не зависят от первого аргумента, то оценка β_n^* при $c_i = x_i w_i(x_i)$ имеет минимальную дисперсию $d^2_{n,\mathrm{opt}}$ в классе всех линейных несмещенных оценок вида* (3). *Если дополнительно величины $\{\epsilon_i\}$ имеют нормальное распределение, то оценка β_n^* при $c_i = x_i w_i(x_i)$ является эффективной.*

Заметим еще, что если мы домножим обе части соотношения (1) на $\sqrt{w_i(x_i)}$, то задача сведется к классической задаче линейной регрессии, когда $\mathbf{D}\epsilon_i = \sigma^2$ не зависят от i. В этом случае утверждение теоремы A хорошо известно (см., например, [2]).

Если же функции $w_i(\beta, x_i)$ зависят от β, то задача оценивания параметра β становится существенно сложнее. Мы, конечно, можем использовать оценки (3) при соответственно подобранных $\{c_i\}$, но, как показано в [3], оптимальные оценки в этом классе не существуют. В [3] с целью построить некоторые оптимальные оценки для β предложено использовать «улучшенные» оценки

$$\beta_n^{**} = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\beta_n^*, x_i) Y_i \Big/ \sum_{i=1}^n \gamma_i(\beta_n^*, x_i) x_i \tag{4}$$

при некоторых специально подобранных функциях $\{\gamma_i(\cdot,\cdot)\}$ и оценке «первого шага» β_n^* из (3).

Приведем один результат из [3]. Нам потребуется

Предположение 1.1. *Случайные величины $\{\epsilon_i\}$ независимы, верно условие* (2) *и*

$$\inf_i \min\bigl\{c_i x_i, x_i\gamma_i(\beta, x_i), \gamma_i^2(\beta, x_i), w_i(\beta, x_i)\bigr\} > 0,$$

$$\sup_i \max\{c_i^2, x_i^2, \gamma_i^2(\beta, x_i), w_i(\beta, x_i)\} < \infty.$$

Кроме того, случайные величины $\{\gamma_i(\beta, x_i)\epsilon_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга.

Из теоремы 4 в [3] нетрудно извлечь следующее утверждение.

Теорема B. *Пусть выполнено предположение* 1.1, *а функции $\{\gamma_i(t, x)\}$ дифференцируемы по первому аргументу, причем*

$$\sup_i \tilde\gamma_i(\beta, x_i) < \infty \quad \text{при } \tilde\gamma_i(\beta, x) = \sup_{\beta-1\le t\le\beta+1} |\partial\gamma_i(t,x)/\partial t|. \tag{5}$$

В этом случае

$$\frac{\beta_n^{**} - \beta}{d_{n\gamma}} \Rightarrow N(0,1) \quad \text{при } d^2_{n\gamma} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \gamma_i^2(\beta, x_i)\mathbf{D}\epsilon_i}{\Bigl(\sum\limits_{i=1}^n \gamma_i(\beta, x_i) x_i\Bigr)^2}. \tag{6}$$

В частности, если $\gamma_i(\cdot, x_i) = x_i w_i(\cdot, x_i)$ при всех i, то сходимость в (6) *имеет место при $d_{n\gamma} = d_{n,\mathrm{opt}}$.*

В теореме B и всюду далее мы считаем, что все пределы берутся при $n \to \infty$, а сходимость $\eta \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ означает, что распределение случайной величины $\eta = \eta_n$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению.

1.2. Подчеркнем, что во многих практических задачах предположение о неслучайности $\{x_i\}$ не выполнено. Более естественным является предположение, что истинные значения величин $\{x_i\}$ нам неизвестны, а даны наблюдения $\{X_i\}$, представимые в виде

$$X_i = x_i + \delta_i, \quad \text{где } \mathbf{E}\delta_i = 0,\ 0 < \mathbf{D}\delta_i < \infty,\ i = 1, 2, \dots . \tag{7}$$

Таким образом, $\{\delta_i\}$ — это ненаблюдаемые случайные ошибки, распределения которых могут быть неизвестными и, в частности, неизвестными могут быть и дисперсии этих величин. В такой ситуации естественно переопределить оценки β_n^* и β_n^{**} из (3) и (4), полагая

$$\beta_n^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^n c_i Y_i}{\sum\limits_{i=1}^n c_i X_i,} \quad \text{и} \quad \beta_n^{**} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \gamma_i(\beta_n^*, X_i) Y_i}{\sum\limits_{i=1}^n \gamma_i(\beta_n^*, X_i) X_i}. \tag{8}$$

Возникает естественный вопрос о том, при каких условиях эти оценки сохранят свои свойства в новой ситуации. Нам потребуется

Предположение 1.2. *Случайные величины $\{\delta_i\}$ независимы между собой и не зависят от величин $\{\epsilon_i\}$, причем $\mathbf{D}\delta_n \to 0$. Кроме того, функции $\gamma_i(\beta, x)$ дифференцируемы по обоим аргументам, при этом*

$$\sup_i \sup_{x \in \mathscr{X}_i} ((1 + |x|)^{-1} \tilde{\gamma}_i(\beta, x) + |\partial \gamma_i(\beta, x)/\partial x|) < \infty, \tag{9}$$

где $\mathscr{X}_i$ — некоторые промежутки такие, что $\mathbf{P}(X_i \in \mathscr{X}_i) = 1$ при всех i.

Приведем один частный случай следствия 3 из § 3.

Теорема 1. *Пусть верны предположения* 1.1 *и* 1.2, *а погрешности* $\{\delta_i\}$ *таковы, что*

$$\bar{\sigma}_n = o(n^{-1/4}) \quad \text{при } \bar{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}\delta_i. \tag{10}$$

В этом случае для оценок β_n^{**} из (8) *имеет место* (6).

Оказывается, что условие (10) близко к необходимому для сходимости (6). Следующее утверждение является частным случаем следствия 4 из § 3.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1.1 *и* 1.2, *случайные величины $\{\delta_i\}$ нормально распределены, а функции $\{\gamma_i(\beta, \cdot)\}$ являются монотонно неубывающими функциями своего второго аргумента, причем*

$$\inf_i \inf\{\partial \gamma_i(\beta, x)/\partial x : |x - x_i| \le \sqrt{\mathbf{D}\delta_i}\} > 0.$$

Тогда условие (10) *необходимо и достаточно для сходимости* (6).

Напомним еще, что если условия теорем 1 или 2 выполнены при $\gamma_i(t, x) = x w_i(t, x)$, то сходимость (6) имеет место при $d_{n\gamma} = d_{n,\mathrm{opt}}$.

1.3. В § 2, 3 работы будет рассмотрено обобщение модели (1), (7) на более общий случай схемы серий. Первая цель настоящей работы — получить аналоги или усиления основных результатов работы [3], где отсутствовали ошибки $\{\delta_i\}$ в коэффициентах. В § 2 мы вначале найдем (теорема 3) общие необходимые и достаточные условия для асимптотической нормальности оценок β_n^{**}

при по возможности минимальных предположениях на неизвестные нам распределения наблюдений, а также на функции $\{\gamma_i(\cdot,\cdot)\}$. Далее в § 2 мы приведем несколько следствий из указанной общей теоремы. Некоторые частные вопросы и примеры составляют § 3, где, в частности, получены условия асимптотической нормальности оценок в регулярных случаях. Доказательства всех утверждений отнесены в отдельный § 4.

Наш интерес к описанной простейшей одномерной модели регрессии вызван тем, что для этой модели все идеи можно изложить достаточно просто, без привлечения значительно уменьшающих наглядность матричных обозначений. Полученные же в данной работе результаты позволят нам в дальнейшем обобщить все идеи нашего метода оценивания для общей многомерной модели линейной регрессии. Подчеркнем, что наличие случайных ошибок в коэффициентах существенно усложняет оценивание. Отметим еще, что в случае практического применения утверждений, полученных в данной работе, мы должны проверять выполнение условий этих утверждений при всех возможных значениях всех неизвестных параметров, т. е. так же, как это всегда делается в математической статистике (см., например, [2]).

Условимся всюду далее использовать символ $\sum$ без индексов вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$; т. е. только тогда, когда суммирование ведется по переменной i от 1 до n. При определении некоторых величин нам иногда удобнее вместо привычного равенства использовать символ $:=$, подчеркивающий, что слева от этого символа стоит обозначение для выражения, стоящего справа от него. Всегда считаем, что $0/0 = 0 = 0\cdot\infty$ и $c/0 = \infty$ при $c > 0$. Во всех случаях, когда используются условия вида $a_n/b_n \to 0$, предполагаем, что $b_n \neq 0$ начиная с некоторого n.

§ 2. Общий подход к изучению оценок β_n^{**}

2.1. Рассмотрим более общую ситуацию, когда для любого n нам даны наблюдения $\{(X_{ni}, Y_{ni})\}$, представимые в следующем виде:

$$X_{ni} = x_{ni} + \delta_{ni}, \quad Y_{ni} = \beta_n x_{ni} + \epsilon_{ni}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

при этом значение числового параметра β_n нам неизвестно и подлежит оцениванию, $\{x_{ni}\}$ — неизвестная числовая последовательность, а $\{\epsilon_{ni}\}$ и $\{\delta_{ni}\}$ — ненаблюдаемые случайные ошибки, распределения которых могут быть неизвестны статистику, относительно которых всюду мы предполагаем выполненным

Предположение 2.1. *При каждом n случайные векторы $(\epsilon_{ni}, \delta_{ni})$, $i = 1, \ldots, n$, независимы в совокупности и состоят из независимых компонент, при этом*

$$\forall i, n \quad \mathbf{E}\epsilon_{ni} = \mathbf{E}\delta_{ni} = 0,\ \mathbf{D}\epsilon_{ni} < \infty,\ \mathbf{D}\delta_{ni} < \infty.$$

Отметим, что первый индекс n у всех вводимых величин подчеркивает, что эти величины могут зависеть от числа наблюдений n. В качестве оценок для параметра β_n мы будем изучать «двухшаговые» статистики β_n^{**}, определяемые соотношениями

$$\beta_n^{**} = \frac{\sum \gamma_{ni}(\beta_n^*, X_{ni}) Y_{ni}}{\sum \gamma_{ni}(\beta_n^*, X_{ni}) X_{ni}} \quad \text{при } \beta_n^* = \frac{\sum c_{ni} Y_{ni}}{\sum c_{ni} X_{ni}}, \tag{12}$$

где $\{\gamma_{ni}(\cdot,\,\cdot)\}$ и $\{c_{ni}\}$ — некоторые выбираемые статистиком функции и константы, вопрос о выборе которых мы обсудим в конце этого параграфа. Условимся доопределять оценки β_n^* и β_n^{**} произвольным измеримым образом всякий раз, когда соответствующие знаменатели в (12) обращаются в нуль. Подчеркнем (см. ниже предложение 3.1), что вводимые ниже условия гарантируют, что знаменатели в определениях (12) могут обращаться в нуль лишь с вероятностями, стремящимися к нулю. Поэтому способ доопределения оценок β_n^* и β_n^{**} не играет никакой роли.

Положим

$$A_{nc} := \sum c_{ni}x_{ni}, \quad \tau_{ni} := \epsilon_{ni} - \beta_n\delta_{ni}. \tag{13}$$

Всюду далее считаем, что $A_{nc} \neq 0$ начиная с некоторого n и

$$d_{nc\delta}^2 := \sum c_{ni}^2 \mathbf{D}\delta_{ni}/A_{nc}^2 \to 0, \quad d_{nc}^2 := \sum c_{ni}^2 \mathbf{D}\tau_{ni}/A_{nc}^2 \to 0. \tag{14}$$

В сделанном предположении собраны все ограничения на постоянные $\{c_{ni}\}$, которые нам потребуются в работе. Среди других ограничений надо в первую очередь выделить следующие условия:

$$w_n(B_n) := \sum \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})\tau_{ni}/B_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \tag{15}$$

$$\alpha_n(A_n) := \sum \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})X_{ni}/A_n \xrightarrow{p} 1. \tag{16}$$

Именно эти два условия определяют вид числовых последовательностей $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, которые будут играть важную роль в остальных ограничениях на функции $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$.

Главная цель данного параграфа — найти общие необходимые и достаточные условия, при которых имеет место следующая сходимость:

$$W_n := (\beta_n^{**} - \beta_n)/d_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d_n = B_n/A_n. \tag{17}$$

Кроме того, нас интересуют достаточные условия для сходимости

$$W_n^* := \frac{\beta_n^{**} - \beta_n}{d_n^{**}} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d_n^{**} := \frac{\left(\sum \gamma_{ni}^2(\beta_n^*, X_{ni})(Y_{ni} - \beta_n^{**}X_{ni})^2\right)^{1/2}}{\sum \gamma_{ni}(\beta_n^*, X_{ni})X_{ni}}. \tag{18}$$

Подчеркнем, что величина d_n^{**} в (18) является статистикой, т. е. в левой части первого соотношения в (18) имеется ровно один неизвестный параметр β_n, а потому эта сходимость может быть особенно полезна при построении доверительных интервалов для параметра β_n и при проверке гипотез.

Нам потребуются следующие два обозначения:

$$K_{ni} := \sup\left\{\frac{|\gamma_{ni}(v, X_{ni}) - \gamma_{ni}(u, X_{ni})|}{|v-u|} : \beta_n - 1 \le u < v \le \beta_n + 1\right\},\ K_{noi}^2 := \mathbf{E}K_{ni}^2. \tag{19}$$

Самым важным условием в работе является

Предположение 2.2. *Справедливо условие* (14) *и*

$$d_{nc}^2 \sum K_{noi}^2 \mathbf{D}\epsilon_{ni}/B_n^2 \to 0, \quad \beta_n d_{nc} \sum K_{noi}\sqrt{\mathbf{D}\delta_{ni}}/B_n \to 0, \tag{20}$$

$$d_{nc} \sum K_{noi}(|x_{ni}| + \sqrt{\mathbf{D}\delta_{ni}})/|A_n| \to 0 \tag{21}$$

для некоторых неслучайных числовых последовательностей $\{A_n\}$ *и* $\{B_n\}$ *таких, что* $A_n \neq 0$ *и* $B_n > 0$ *начиная с некоторого* n.

2.2. Теперь мы можем сформулировать основное утверждение работы.

Теорема 3. *Если верны условие* (16) *и предположения* 2.1 *и* 2.2, *то условие* (15) *является необходимым и достаточным для сходимости* (17).

Установим теперь общие достаточные условия для сходимости (18). Нам потребуются следующие ограничения:

$$\bar{\alpha}_n^2(A_n) := \sum \gamma_{ni}^2(\beta_n, X_{ni}) X_{ni}^2 / A_n^2 \xrightarrow{p} 0, \tag{22}$$

$$\overline{w}_n^2(B_n) := \sum \gamma_{ni}^2(\beta_n, X_{ni}) \tau_{ni}^2 / B_n^2 \xrightarrow{p} 1. \tag{23}$$

Следствие 1. *Если предположения* 2.1 *и* 2.2 *выполнены вместе с условиями* (15), (16), (22) *и* (23), *то имеют место сходимости* (17) *и* (18).

Замечание 2.3. Как мы уже отмечали во введении, общие необходимые и достаточные условия для асимптотической нормальности оценок β_n^{**} найдены в теореме 3 при по возможности минимальных предположениях на неизвестные нам распределения наблюдений. Как следует из этой теоремы, задача об асимптотической нормальности оценок β_n^{**} эквивалентна в некотором смысле вопросу об асимптотической нормальности суммы $\sum \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})\tau_{ni}$ специально подобранных независимых случайных величин. Такая форма записи условий асимптотической нормальности оценок позволяет нам, исходя из вида этих случайных величин, удобнее всего решать вопрос о том, какие характеристики распределений ошибок и в какой степени влияют на поведение оценок β_n^{**}.

Замечание 2.4. Отметим, что в теореме 3 и следствии 1 труднее всего проверять условия (15), (16) и (22), (23). Дело в том, что проверка остальных условий теоремы сводится к вычислениям некоторых числовых характеристик случайных величин, участвующих в определении оценок β_n^{**}, и только в отмеченных условиях ограничения накладываются непосредственно на поведение некоторых случайных величин. Но, с другой стороны, отмеченные сходимости представляют собой хорошо изученный объект. Действительно, условие (15) — это предположение о том, что сумма независимых случайных величин $\{\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})\tau_{ni}\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме при соответственно подобранной нормировке. Условия (16), (22), (23) и используемое далее условие (29) — это предположения о том, что сумма соответствующих независимых случайных величин удовлетворяет закону больших чисел.

2.3. Введем следующие обозначения:

$$A_{n\gamma} := \sum \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni}) x_{ni}, \quad B_{n\gamma}^2 := \sum \gamma_{ni}^2(\beta_n, x_{ni}) \mathbf{D}\epsilon_{ni}, \quad d_{n\gamma} := B_{n\gamma}/A_{n\gamma}, \tag{24}$$

$$\rho_{ni} := \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni} + \delta_{ni}) - \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni}), \quad \rho_{noi}^2 := \mathbf{E}\rho_{ni}^2. \tag{25}$$

Рассмотрим поставленный во введении вопрос об условиях, при которых наличие случайных ошибок в коэффициентах не влияет на предельное распределение нормированных погрешностей оценивания в (17). Другими словами, нас интересуют условия, при которых сходимость (17) можно записать в следующем виде:

$$W_n := (\beta_n^{**} - \beta_n)/d_{n\gamma} \Rightarrow \mathscr{N}(0, 1). \tag{26}$$

Для удобства читателя напомним

Определение 2.5. Будем говорить, что случайные величины $\{\eta_{ni}\}$ удовлетворяют *условию Линдеберга*, если при каждом n величины $\{\eta_{ni} : i = 1, \ldots, n\}$ независимы в совокупности, $0 < \sum \mathbf{D}\eta_i < \infty$ начиная с некоторого n и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum \mathbf{E}\left\{(\eta_{ni} - \mathbf{E}\eta_{ni})^2;\ (\eta_{ni} - \mathbf{E}\eta_{ni})^2 > \varepsilon^2 \sum \mathbf{D}\eta_{ni}\right\} \Big/ \sum \mathbf{D}\eta_{ni} \to 0.$$

Отметим, что в предложении 2.9 в [4] можно найти способ получения простых достаточных условий для выполнения условия Линдеберга в задачах рассматриваемого типа.

Предположение 2.6. *Случайные величины* $\{\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})\epsilon_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, предположение* 2.2 *выполнено при* $A_n = A_{n\gamma}$ *и* $B_n = B_{n\gamma}$ *и, кроме того,*

$$\beta_n^2 \sum \gamma_{ni}^2(\beta_n, x_{ni}) \mathbf{D}\delta_{ni}/B_{n\gamma}^2 \to 0, \quad \sum \rho_{noi}^2 \mathbf{D}\epsilon_{ni}/B_{n\gamma}^2 \to 0, \tag{27}$$

$$\sum \rho_{noi}(|x_{ni}| + \sqrt{\mathbf{D}\delta_{ni}})/|A_{n\gamma}| \to 0, \quad \sum \gamma_{ni}^2(\beta_n, x_{ni}) \mathbf{D}\delta_{ni}/A_{n\gamma}^2 \to 0. \tag{28}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* 2.1 *и* 2.6. *Тогда*

(А) *необходимым и достаточным для справедливости* (26) *является следующее условие:*

$$\alpha_{n\rho\delta} := \beta_n \sum \rho_{ni}\delta_{ni}/B_{n\gamma} \xrightarrow{p} 0; \tag{29}$$

(Б) *если же все функции* $\{\gamma_{ni}(\beta_n, \cdot)\}$ *являются либо монотонно неубывающими, либо монотонно невозрастающими функциями своего второго аргумента, то условие*

$$\sum \mathbf{E}\min\{|\beta_n \rho_{ni}\delta_{ni}|, B_{n\gamma}\}/B_{n\gamma} \to 0 \tag{30}$$

также является необходимым и достаточным для выполнения (26).

Следствие 2. *Пусть справедливы предположения* 2.1, 2.6 *и условие* (30). *В этом случае имеет место* (26). *Если дополнительно*

$$\bar{\alpha}_{no}^2 := \sum \gamma_{ni}^2(\beta_n, x_{ni}) x_{ni}^2/A_{n\gamma}^2 \to 0, \tag{31}$$

то верно и (18).

2.4. Рассмотрим теперь вопрос о выборе оптимальных функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$, напрямую связанный с задачей минимизации коэффициента $d_{n\gamma}$. Нам потребуется

Предположение 2.7. *При некотором* n

$$\mathbf{D}\epsilon_{ni} = \sigma_n^2/w_{ni}(\beta_n, x_{ni}) \quad \text{и} \quad w_{ni}(\beta_n, x_{ni}) > 0 \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, n, \tag{32}$$

где $\{w_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ *— известные функции, а параметр* σ_n^2 *может быть неизвестным.*

Для удобства читателя приведем следующее утверждение, первая часть которого хорошо известна, а вторая доказана в [3].

Теорема C. *Пусть при некотором* n *выполнено предположение* 2.7 *и определена величина* $d_{n\gamma}$. *В этом случае*

$$d_{n\gamma}^2 \geq d_{n,\mathrm{opt}}^2 \equiv \sigma_n^2 / \sum x_{ni}^2 w_{ni}(\beta_n, x_{ni}).$$

Если дополнительно $\operatorname{sign}\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni}) = \operatorname{sign} x_{ni}$ *при всех* i *и, кроме того,*

$$h := \min_{i: x_i \neq 0} \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})/\gamma_{ni}^{\mathrm{opt}}(\beta_n, x_{ni}) > 0,$$

$$H := \max_{i: x_i \neq 0} \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})/\gamma_{ni}^{\mathrm{opt}}(\beta_n, x_{ni}) < \infty$$

при $\gamma_{ni}^{\mathrm{opt}}(t,x) := xw_{ni}(t,x)$, *то справедливо следующее неравенство:*

$$1 \le \frac{d^2_{n\gamma}}{d^2_{n,\mathrm{opt}}} \le 1 + \frac{(\sqrt{H/h}-1)^2}{2\sqrt{H/h}}. \tag{33}$$

Замечание 2.8. Теорема C дает нам метод поиска оптимальных функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$. Действительно, если справедливо предположение 2.7, то мы рекомендуем использовать оценку β_n^{**} при $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot) \equiv \gamma_{ni}^{\mathrm{opt}}(\cdot,\cdot)\}$ и при некоторых $\{c_i\}$ (при выборе констант $\{c_{ni}\}$ проще всего положить $c_{ni} \equiv 1$ при всех i). В силу теоремы C в этом случае оценка β_n^{**} будет иметь оптимальную асимптотическую дисперсию.

Если же $\{\gamma_{ni}(\cdot) = \gamma_{ni}^{\mathrm{opt}}(\cdot,\cdot)\}$ не удовлетворяют условиям соответствующего утверждения (об асимптотической нормальности β_n^{**}), то можно использовать функции $\{\gamma_{ni}(\cdot) = \tilde{\gamma}_{ni}^{\mathrm{opt}}(\cdot,\cdot)\}$, где $\tilde{\gamma}_{ni}^{\mathrm{opt}}(t,x) = x\widetilde{w}_{ni}(t,x)$ и $\widetilde{w}_{ni}(\cdot,\cdot)$ получены в результате соответствующего сглаживания функций $w_{ni}(\cdot,\cdot)$.

Отметим еще, что неравенства в (33) можно интерпретировать как некое свойство устойчивости оценок β_n^{**} как функционалов, зависящих от $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$. Из числовых примеров, приведенных в [3, замечание 11], следует, что мы немного потеряем, если будем использовать функции, которые повторяют поведение оптимальных функций лишь с точностью до константы. Именно поэтому, чтобы расширить область возможного практического применения наших оценок и не исключать возможности использовать исследуемые оценки в случаях, когда мы не имеем надежной информации о точном виде дисперсий «основных» наблюдений, в утверждениях об асимптотической нормальности мы использовали произвольные функции $\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)$, а не оптимальные $\gamma_{ni}^{\mathrm{opt}}(\cdot,\cdot)$.

§ 3. Некоторые частные вопросы

3.1. Рассмотрим сначала вопрос о существовании введенных в (12) оценок β_n^* и β_n^{**}.

Предложение 3.1. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* (14). *Тогда*

(А) *имеет место следующая сходимость:*

$$\alpha_{nc} := \sum c_{ni}X_{ni}/A_{nc} \xrightarrow{p} 1; \tag{34}$$

(Б) *если дополнительно верны условия* (16) *и* (21), *то*

$$\alpha_n^*(A_n) := \sum \gamma_{ni}(\beta_n^*, X_{ni})X_{ni}/A_n \xrightarrow{p} 1. \tag{35}$$

Нетрудно заметить, что если имеют место обе сходимости (34) и (35), то оба знаменателя в (12) могут обращаться в нуль лишь с вероятностями, стремящимися к нулю.

Рассмотрим теперь вопрос о простых достаточных условиях для сходимостей (16) и (22) при некоторых интересующих нас числах A_n.

Предложение 3.2. *Пусть справедливо предположение* 2.1. *Тогда*

(А) *если выполнено условие* (28), *то сходимость* (16) *имеет место при* $A_n = A_{n\gamma}$;

(Б) *условия* (28) *и* (31) *достаточны для справедливости* (22) *при* $A_n = A_{n\gamma}$;

(В) *если*

$$\forall n > n_o \quad A_{no} := \sum \mathbf{E}(\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})X_{ni}) \neq 0 \text{ и } \sum \mathbf{D}(\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})X_{ni})/A_{no}^2 \to 0,$$

то (16) *выполнено при* $A_n = A_{no}$.

Отметим, что при $A_n = A_{no}$ условия для выполнения (16) имеют наиболее простой вид.

3.2. Перейдем теперь к более трудному вопросу о необходимых и достаточных условиях для сходимости (15). На первый взгляд наиболее естественным в этом случае представляется предложение наложить условие Линдеберга непосредственно на случайные величины из (15). Действительно, в этом случае все утверждения имеют наиболее простой вид.

Предложение 3.3. *Пусть случайные величины* $\{\zeta_{ni} := \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})\tau_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга и выполнено предположение* 2.1. *Тогда*

(А) *условие*

$$\beta_n \sum \mathbf{E}(\rho_{ni}\delta_{ni})/B_{no} \to 0, \quad \text{где} \quad B_{no}^2 := \sum \mathbf{D}(\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})\tau_{ni}),$$

является необходимым и достаточным для справедливости (15) *при* $B_n = B_{no}$;

(Б) *условия*

$$\beta_n \sum \mathbf{E}(\rho_{ni}\delta_{ni})/B_{n\gamma} \to 0 \quad \text{и} \quad B_{no}^2/B_{n\gamma}^2 \to 0$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы сходимость (15) *имела место при* $B_n = B_{n\gamma}$.

Пример. Пусть $\gamma_{ni}(\beta, x) = x$. В этом случае ввиду обозначений (11) и (13) справедливо равенство $\zeta_{ni} = (x_{ni} + \delta_{ni})(\epsilon_{ni} - \beta_n\delta_{ni})$, т. е.

$$\beta_n\delta_{ni}^2 = \zeta_{noi} - \zeta_{ni} \quad \text{при } \zeta_{noi} = (x_{ni} + \delta_{ni})\epsilon_{ni} - \beta_n x_{ni}\delta_{ni}.$$

Таким образом, если случайные величины $\{\zeta_{ni}\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, то $\mathbf{E}\zeta_{ni}^2 < \infty$ и

$$|\beta_n|\big(\mathbf{E}\delta_{ni}^4\big)^{1/2} = (\mathbf{E}(\zeta_{noi} - \zeta_{ni})^2)^{1/2} \leq \big(\mathbf{E}\zeta_{noi}^2\big)^{1/2} + \big(\mathbf{E}\zeta_{ni}^2\big)^{1/2}$$
$$= \big(x_{ni}^2\mathbf{D}\epsilon_{ni} + \mathbf{D}\delta_{ni}\mathbf{D}\epsilon_{ni} + x_{ni}^2\beta_n^2\mathbf{D}\delta_{ni}\big)^{1/2} + \big(\mathbf{E}\zeta_{ni}^2\big)^{1/2} < \infty.$$

Приведенный пример показывает, что простые и естественные по виду условия из предложения 3.3 даже в самых простых случаях могут оказаться ограничительными, так как могут содержать в себе требование существования $\mathbf{E}\delta_{ni}^4$. Этот факт является основной причиной, по которой в теореме 4 мы избрали другой, менее простой, путь, который основан на следующем утверждении.

Предложение 3.4. *Пусть случайные величины* $\{\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})\epsilon_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, выполнены предположение* 2.1 *и условие* (27). *В этом случае*

(А) *условие* (29) *необходимо и достаточно для сходимости* (15) *при* $B_n = B_{n\gamma}$;

(Б) *если дополнительно*

$$\beta_n^2 \sum \rho_{ni}^2\delta_{ni}^2/B_\gamma^2 \xrightarrow{p} 0, \tag{36}$$

то при $B_n = B_{n\gamma}$ *также справедливо и условие* (23).

3.3. Рассмотрим вопрос о простых условиях для появившихся сходимостей (29) и (36). Положим $\Gamma_{ni}(z) := \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni} + z) - \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})$ и

$$\overline{\Gamma}_n := \max_{i \le n} \sup_{z \ne 0} \frac{|\Gamma_{ni}(z)|}{|z|}, \quad \check{\Gamma}_{ni}(r) := \inf_{z \ne 0} \frac{z\Gamma_{ni}(z)}{\min\{z^2, r^2\}}, \quad r > 0. \tag{37}$$

Далее будем говорить, что некоторые величины *одного знака*, если все эти величины либо неотрицательны, либо неположительны.

Предложение 3.5. *Имеют место следующие утверждения:*

(A) *выполнение условия* (30) *всегда достаточно для справедливости* (29) *и* (36)*;*

(A$'$) *условие*

$$|\beta_n|\overline{\Gamma}_n \sum \mathbf{E}\delta_{ni}^2 / B_{n\gamma} \to 0 \tag{38}$$

достаточно для справедливости (30), (29) *и* (36)*;*

(Б) *если же при каждом* n *случайные величины* $\{\rho_{ni}\delta_{ni}, i = 1, \dots, n\}$ *независимы и все одного знака, то условие* (30) *необходимо и достаточно для сходимости* (29)*;*

(Б$'$) *если числа* $\{r_{ni}\}$ *и* $\{\check{\gamma}_{ni}\}$ *таковы, что*

$$\forall n \ge n_0 \, \forall i \quad r_{ni} > 0, \quad \check{\Gamma}_{ni}(r_{ni}) \ge \check{\gamma}_{ni} \ge 0 \quad \text{и} \quad |\beta_n|\check{\gamma}_{ni} r_{ni}^2 \le B_{n\gamma}, \tag{39}$$

то следующее условие:

$$|\beta_n| \sum \check{\gamma}_{ni} \mathbf{E} \min\{\delta_{ni}^2, r_{ni}^2\} / B_{n\gamma} \to 0, \tag{40}$$

необходимо для справедливости (30) *и* (29).

Замечание 3.6. Если $\gamma_{ni}(\beta, \cdot)$ является монотонно неубывающей функцией своего второго аргумента, то $\check{\Gamma}_{ni}(r) \ge 0$ при всех $r > 0$. Если же, кроме того, функция $\gamma_{ni}(\beta, \cdot)$ дифференцируема по своему второму аргументу, то

$$\check{\Gamma}_{ni}(r) \ge \inf\{\partial\gamma_{ni}(\beta_n, x)/\partial x : \ |x - x_{ni}| \le r\}. \tag{41}$$

Отметим еще, что если все функции $\{\gamma_{ni}(\beta, \cdot)\}$ дифференцируемы по своему второму аргументу, то

$$\overline{\Gamma}_n \le \max_{i \le n} \sup_x |\partial\gamma_{ni}(\beta_n, x)/\partial x|. \tag{42}$$

3.4. В заключение параграфа приведем еще более простые условия для справедливости интересующей нас сходимости (26). Положим

$$\bar{\sigma}_n^2 := n^{-1} \sum \mathbf{D}\delta_{ni} \quad \text{и} \quad \overline{K}_n := \max_{i \le n} K_{noi}. \tag{43}$$

Предположение 3.7. *Случайные величины* $\{\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})\epsilon_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, выполнено предположение* 2.1, *и, кроме того,*

$$\inf_{n,i} \min\{c_{ni}x_{ni}, \, x_{ni}\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni}), \, \gamma_{ni}^2(\beta_n, x_{ni})\mathbf{D}\epsilon_{ni}\} > 0, \tag{44}$$

$$\sup_{n,i} \max\{c_{ni}^2, \, x_{ni}^2, \, \gamma_{ni}^2(\beta_n, x_{ni}), \, \mathbf{D}\epsilon_{ni}\} < \infty, \tag{45}$$

$$(1 + \overline{\Gamma}_n + |\beta_n|)\bar{\sigma}_n \to 0 \quad \text{и} \quad \overline{K}_n(|\beta_n|\bar{\sigma}_n + 1/\sqrt{n}) \to 0. \tag{46}$$

Как будет показано в доказательстве леммы 4.7, из предположения 3.7 вытекает, что в этом случае

$$d_{n\gamma}^2 + d_{nc}^2 + d_{nc\delta}^2 + 1/B_{n\gamma}^2 + 1/|A_{n\gamma}| = O(1/n), \quad 1/d_{n\gamma}^2 + B_{n\gamma}^2 + |A_{n\gamma}| = O(n). \tag{47}$$

По этой причине случай, когда выполнены условия (44)–(46), естественно назвать *регулярным*.

Следствие 3. *Пусть верно предположение* 3.7. *Тогда*

(A) *условие* $\sqrt{n}|\beta_n|\overline{\Gamma}_n\bar{\sigma}_n^2 \to 0$ *является достаточным для справедливости* (26);

(A′) *в частности, если* $\sup\limits_{n,i}|\beta_n|\overline{\Gamma}_n < \infty$, *то предположение*

$$\bar{\sigma}_n = o(n^{-1/4}) \tag{48}$$

также достаточно для выполнения (26);

(Б) *если же выполнено* (39), *то условие* (40) *при замене в нем* $B_{n\gamma}$ *на* $\sqrt{n}$ *является необходимым для справедливости* (26).

Рассмотрим отдельно случай нормальных распределений.

Следствие 4. *Пусть при всех* n *и* i *случайные величины* $\{\delta_{ni}\}$ *нормально распределены, а функции* $\{\gamma_{ni}(\beta,\cdot)\}$ *являются монотонно неубывающими дифференцируемыми функциями своего второго аргумента, причем*

$$\inf_{n,i}\inf\{|\beta_n|\partial\gamma_{ni}(\beta_n,x)/\partial x:\ |x-x_{ni}| \le \sqrt{\mathbf{D}\delta_{ni}}\} > 0 \quad \text{и} \quad \max_i \mathbf{D}\delta_{ni}/\sqrt{n} \to 0. \tag{49}$$

Пусть также верно предположение 3.7. *Тогда условие* (48) *является необходимым для выполнения* (26).

Приведем простейший пример, когда условие (48) будет необходимым и достаточным для справедливости (26).

Пример. Рассмотрим случай, когда $\beta_n = \beta \ge 1$ не зависит от n и

$$\forall n, i \quad c_{ni} = 1 \quad \text{и} \quad \gamma_{ni}(\beta, x) = \beta + x. \tag{50}$$

При этих предположениях $\overline{K}_n = \overline{\Gamma}_n = \check{\Gamma}_{ni}(r_{ni}) = 1$ при всех $r_{ni} > 0$.

Пусть, кроме того, случайные величины $\{\gamma_{ni}(\beta, x_{ni})\epsilon_{ni}\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, выполнено предположение 2.1, а величины $\{\delta_{ni}\}$ имеют нормальные распределения, причем $\bar{\sigma}_n \to 0$ и

$$\forall n, i \quad x_{ni} \ge 1, \quad \mathbf{D}\epsilon_{ni} \ge 1, \quad \sup_{n,i}\max\{x_{ni}, \mathbf{D}\epsilon_{ni}, \mathbf{D}\delta_{ni}\} < \infty.$$

В этом случае выполнены все условия предположения 3.7 и следствия 4, тем самым условие (48) будет необходимым и достаточным для справедливости (26).

Отметим еще, что если $\mathbf{D}\epsilon_{ni} = \sigma_n^2 x_{ni}/(\beta_n + x_{ni})$ при всех n, i, то, как следует из теоремы C, выбор функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ в (50) будет оптимальным для оценивания параметра β_n.

§ 4. Доказательства

4.1. В пп. 4.1–4.3 докажем теорему 3 и следствие 1. Чтобы не загромождать обозначения, условимся в этом параграфе в большинстве случаев опускать дополнительный индекс n у введенных ранее величин, подчеркивающий, что эти величины зависят от числа наблюдений n.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* (14). *В этом случае существует такая случайная величина* $\tilde{\beta}$, *что одновременно верны следующие неравенства:*

$$\mathbf{P}(\tilde{\beta} \ne \beta^*) \le 4d_c^2 + 4d_{c\delta}^2 \to 0, \quad |\tilde{\beta} - \beta| \le 1, \quad \mathbf{E}|\tilde{\beta} - \beta|^2 \le 4d_c^2,$$

$$\mathbf{E}\left|\sum \Delta_i\epsilon_i\right| \le 8(1+2d_{c\delta})d_c\Big(\sum K_{oi}^2\mathbf{D}\epsilon_i\Big)^{1/2} \quad \textit{при } \Delta_i := \gamma_i(\tilde\beta, X_i) - \gamma_i(\beta, X_i).$$

Кроме того, в этом случае справедливо (34).

Доказательство этого утверждения представляет значительную техническую трудность. Но ввиду (11)–(13) имеем

$$\beta^* = \beta + \frac{U}{1+V} \quad \text{при } U = \sum c_i\tau_i/A_c,\ V = \sum c_i\delta_i/A_c.$$

Поэтому все утверждения доказываемого предложения следуют из теоремы 5 в [5] при

$$u_i = c_i\tau_i/A_c, \quad v_i = c_i\delta_i/A_c, \quad \theta = 2, \quad g_i(t) = \gamma_i(t+\beta-2, X_i)\epsilon_i,$$
$$\bar g_i = K_i\epsilon_i, \quad G_i = K_{oi}\sqrt{\mathbf{D}\epsilon_i}, \quad r = 1.$$

Кроме того, в этом случае $\mathbf{E}V = 0$ и $\mathbf{D}V = d_{c\delta}^2 \to 0$, а потому $\alpha_c = 1 + V \xrightarrow{p} 1$, что дает (34). $\square$

Для любой последовательности $\{a_i\}$ далее по аналогии с [4, 5] будет использоваться евклидова норма $\|a_\bullet\|$, которая обладает следующими известными свойствами:

$$\|a_\bullet\| := \Big(\sum a_i^2\Big)^{1/2} \le \sum |a_i| \quad \text{и} \quad \|a_\bullet + b_\bullet\| \le \|a_\bullet\| + \|b_\bullet\|. \tag{51}$$

С целью упростить обозначения положим

$$\gamma_{oi} = \gamma_i(\beta, x_i), \quad \gamma_i = \gamma_i(\beta, X_i), \quad \gamma_i^* = \gamma_i(\beta^*, X_i), \quad \tilde\gamma_i = \gamma_i(\tilde\beta, X_i). \tag{52}$$

Заметим, что ввиду (11) и (13)

$$\tau_i = \epsilon_i - \beta\delta_i = Y_i - \beta X_i, \quad \tau_i^{**} := \tau_i - (\beta^{**} - \beta)X_i = Y_i - \beta^{**}X_i. \tag{53}$$

Изучение поведения оценки β^{**} в данной работе будет основано на следующих равенствах:

$$\beta^{**} - \beta = \sum \gamma_i^*\tau_i \Big/ \sum \gamma_i^* X_i, \quad d^{**} = \|\gamma_\bullet^*\tau_\bullet^{**}\| \Big/ \sum \gamma_i^* X_i, \tag{54}$$

которые нетрудно извлечь из (12), (18) и (53).

4.2. Существует некоторая аналогия между представлениями (54) и похожими свойствами оценки θ^{**}, изучавшейся в работе [4]. В данном пункте мы извлечем из результатов работы [4] несколько нужных нам вспомогательных утверждений. Конечно, эти утверждения можно было доказать напрямую, но это увеличило бы объем статьи.

Подчеркнем, что при доказательстве всех лемм в данном пункте мы будем пользоваться результатами из § 5 и § 6 работы [4] при

$$Y_i = 1, \quad X_{ai} = 0, \quad X_{bi} = X_i, \quad \theta = \beta, \quad \tilde\theta = \tilde\beta, \quad \delta_i = \Delta_i. \tag{55}$$

Отметим, что в этом случае в § 5, 6 и формуле (21) работы [4] мы должны сделать также следующие замены: $\epsilon_{abi} = -\beta\delta_i$, $\sigma_{abi}^2 = \beta^2\mathbf{D}\delta_i$, $\epsilon_{ui} = \tau_i$,

$$y_i = 1, \quad \sigma_{yi} = 0, \quad b_i = x_i, \quad \sigma_{bi}^2 = \mathbf{D}\delta_i, \quad \gamma_{\theta i} = \gamma_{oi}, \quad \gamma_{xi} = \gamma_i, \quad \zeta_i = \gamma_i\tau_i. \tag{56}$$

После таких замен в указанных местах работы [4] используемые там величины ϵ_i, A_γ, B_γ, $\rho_\bullet$, $\rho_{\bullet\bullet}$ и $\Delta_{\bullet\bullet}$ будут обладать нужными нам свойствами. Кроме того, мы используем аналогию между срезками $\tilde\theta$ и $\tilde\beta$, имеющую место ввиду леммы 4.1.

Лемма 4.2. *Пусть справедливы предположение* 2.1 *и условие* (14). *Тогда*
(А) *если выполнено условие* (20), *то* $\tilde{\rho}_u := \sum \tilde{\gamma}_i \tau_i / B - w(B) \xrightarrow{p} 0$;
(Б) *если верны условия* (20) *и* (23), *то* $\tilde{\rho}_{uu} := \|\tilde{\gamma}_\bullet \tau_\bullet\| / B - 1 \xrightarrow{p} 0$;
(В) *если имеет место условие* (21), *то* $\rho_{v1} := \sum |\Delta_i X_i| / |A| \xrightarrow{p} 0$;
(Г) *если справедливы условия* (16) *и* (21), *то* $\tilde{\rho}_v := \sum \tilde{\gamma}_i X_i / A - 1 \xrightarrow{p} 0$;
(Д) *из условий* (21) *и* (22) *вытекает, что* $\tilde{\rho}_{vv} := \|\tilde{\gamma}_\bullet X_\bullet\| / |A| \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Утверждения (А) и (Б) вытекают из лемм 5.5 и 5.6 работы [4]. Заметим теперь, что в данной работе в отличие от [4] в условии (21) не предполагается, что $A = A_\gamma$ и $A > 0$. Поэтому для доказательства утверждения (В) достаточно повторить аналогичный вывод из доказательства леммы 5.7 в [4], заменив в нем A_γ на $|A|$.

Утверждение (Г) вытекает из очевидного неравенства

$$\left|\sum \tilde{\gamma}_i X_i / A - \alpha(A)\right| = \left|\sum \Delta_i X_i\right| / |A| \le \rho_{v1}.$$

Утверждение (Д) следует из свойств (51) норм и уже доказанного утверждения (В):

$$\tilde{\rho}_{vv} = \|(\gamma_\bullet + \Delta_\bullet) X_\bullet\| / |A| \le \|\gamma_\bullet X_\bullet\| / |A| + \|\Delta_\bullet X_\bullet\| / |A| \le \bar{\alpha}(A) + \rho_{v1}. \qquad \square$$

Обозначим через $\rho^*_\bullet$ и $\rho^*_{\bullet\bullet}$ величины, которые получатся, если заменить $\tilde{\gamma}_\bullet$ на $\gamma^*_\bullet$ в определениях величин $\tilde{\rho}_\bullet$ и $\tilde{\rho}_{\bullet\bullet}$.

Лемма 4.3. *Пусть справедливы предположение* 2.1 *и условие* (14). *Тогда*
(А) *если выполнено условие* (20), *то* $\rho^*_u \xrightarrow{p} 0$;
(Б) *если верны условия* (20) *и* (23), *то* $\rho^*_{uu} \xrightarrow{p} 0$;
(В) *если справедливы условия* (16) *и* (21), *то* $\rho^*_v = \alpha^*(A) - 1 \xrightarrow{p} 0$;
(Г) *из условий* (21) *и* (22) *вытекает, что* $\rho^*_{vv} \xrightarrow{p} 0$;
(Д) *справедливо неравенство* $|\rho^{**}| \le |\rho^*_{uu}| + |W| \rho^*_{vv}$ *при* $\rho^{**} := \|\gamma^*_\bullet \tau^{**}_\bullet\| / B - 1$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{P}(\beta^* \ne \tilde{\beta}) \to 0$ в силу леммы 4.1, то $\mathbf{P}(\gamma^*_\bullet \ne \tilde{\gamma}_\bullet) \to 0$. Значит, первые четыре утверждения леммы вытекают соответственно из утверждений (А), (Б), (Г) и (Д) леммы 4.2, если еще учесть определение (35) величины $\alpha^*(A)$.

Утверждение (Д) на самом деле доказано в [4] при выводе формул (72) и (73). $\square$

Лемма 4.4. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* (28). *Тогда*
(А) *имеют место сходимости*

$$\rho_{v2} := \sum |\rho_i X_i| / |A_\gamma| \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_{v3} := \sum \gamma_{oi} \delta_i / A_\gamma \xrightarrow{p} 0; \quad \rho_{v4} := \|\gamma_{o\bullet} \delta_\bullet\| / |A_\gamma| \xrightarrow{p} 0;$$

(Б) *справедливо соотношение* $|\alpha(A_\gamma) - 1| \le \rho_{v2} + |\rho_{v3}| \xrightarrow{p} 0$;
(В) *верно неравенство* $\bar{\alpha}(A_\gamma) \le \bar{\alpha}_o + \rho_{v2} + \rho_{v4}$.

Доказательство Утверждение (А) вытекает из леммы 5.7 в [4], поскольку в ней можно положить $\zeta_{vi} = X_i / A_\gamma$ и $\bar{\zeta}_{vi} = \delta_i / A_\gamma$ в соответствии с соглашениями (55) и (56) и учесть, что в настоящей работе $A_\gamma \ne 0$ в отличие от [4], где мы считали, что $A_\gamma > 0$.

Для вывода утверждений (Б) и (В) нам надо несколько изменить доказательство леммы 5.8 в [4]. Надо воспользоваться равенством

$$\gamma_i X_i = \gamma_{oi} X_i + \rho_i X_i = \gamma_{oi} x_i + \rho_i X_i + \gamma_{oi} \delta_i. \tag{57}$$

Суммируя, получим, что $\alpha(A_\gamma) = 1 + \sum \rho_i X_i / A_\gamma + \rho_{v3}$, откуда следует утверждение (Б). Далее, из (57) и свойств нормы (51) имеем

$$|A_\gamma| \bar{\alpha}(A_\gamma) = \|\gamma_\bullet X_\bullet\| \le \|\gamma_{o\bullet} x_\bullet\| + \|\rho_\bullet X_\bullet\| + \|\gamma_{o\bullet}\delta_\bullet\| \le |A_\gamma|(\bar{\alpha}_o + \rho_{v2} + \rho_{v4}),$$

что доказывает (В). □

Лемма 4.5. *Пусть справедливы предположение* 2.1 *и условие* (27). *Тогда* (А) *имеют место следующие сходимости:*

$$\Delta_{\gamma 1} := -\beta \sum \gamma_{oi}\delta_i / B_\gamma \xrightarrow{p} 0, \quad \overline{\Delta}_{\gamma 1} := |\beta| \, \|\gamma_{o\bullet}\delta_\bullet\| / B_\gamma \xrightarrow{p} 0,$$

$$\Delta_{\gamma 2} := \sum \rho_i \epsilon_i / B_\gamma \xrightarrow{p} 0, \quad \overline{\Delta}_{\gamma 2} := \|\rho_\bullet \epsilon_\bullet\| / B_\gamma \xrightarrow{p} 0;$$

(Б) *если случайные величины* $\{\gamma_{oi}\epsilon_i\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, то*

$$W_\gamma := \sum \gamma_{oi}\epsilon_i / B_\gamma \Longrightarrow N(0,1), \quad \overline{W}_\gamma := \|\gamma_{o\bullet}\epsilon_\bullet\| / B_\gamma \xrightarrow{p} 1;$$

(В) *справедливо соотношение* $w(B_\gamma) - W_\gamma - \alpha_{\rho\delta} = \Delta_{\gamma 1} + \Delta_{\gamma 2} \xrightarrow{p} 0$*;*

(Г) *верно неравенство* $|\overline{w}(B_\gamma) - \overline{W}_\gamma| \le \overline{\Delta}_{\gamma 1} + \overline{\Delta}_{\gamma 2} + \|\beta \rho_\bullet \delta_\bullet\| / B_\gamma$.

Доказательство. Утверждение (А) следует из леммы 6.5 в [4], а утверждение (Б) вытекает из леммы 6.6 указанной работы. Утверждения (В) и (Г) немедленно получаются из формул (80) и (82) работы [4], если в них положить $\Delta_{\gamma 3} = \alpha_{\rho\delta}$ и $\overline{\Delta}_{\gamma 3} = \|\beta \rho_\bullet \delta_\bullet\| / B_\gamma$. □

4.3. Доказательство теоремы 3. Из (54) с учетом определений, введенных в (15), лемме 4.2 и перед леммой 4.3, имеем

$$W = \frac{\beta^{**} - \beta}{d} = \frac{\sum \gamma_i^* \tau_i / B}{\sum \gamma_i^* X_i / A} = \frac{w(B) + \rho_u^*}{1 + \rho_v^*}. \tag{58}$$

Таким образом, если $w(B) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, то $W \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ в силу (58) и утверждений (А) и (В) леммы 4.3. Если, наоборот, $W \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, то $w(B) = (1 + \rho_v^*)W - \rho_u^* \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ ввиду опять же утверждений (А) и (В) леммы 4.3. Тем самым теорема 3 доказана. □

Доказательство следствия 1. Используя равенства (54), а также определения из лемм 4.2 и 4.3, имеем

$$W^* = \frac{\beta^{**} - \beta}{d^{**}} = \frac{\sum \gamma_i^* \tau_i}{\|\gamma_\bullet^* \tau_\bullet^{**}\|} = \frac{w(B) + \rho_u^*}{1 + \rho^{**}}. \tag{59}$$

Но ввиду теоремы 3 имеет место сходимость $W \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, поэтому $\rho^{**} \xrightarrow{p} 0$ в силу утверждений (Д), (Б) и (Г) леммы 4.3. Утверждение следствия, т. е. сходимость $W^* \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, немедленно вытекает теперь из представления (59), условия (15) и утверждения (А) леммы 4.3. □

4.4. В этом пункте мы докажем все предложения.

Доказательство предложения 3.1. Утверждение (А) этого предложения установлено в лемме 4.1, а утверждение (Б) — в п. (В) леммы 4.3. □

Доказательство предложения 3.2. Утверждение (А), т. е. сходимость $\alpha(A_\gamma) \xrightarrow{p} 1$, доказана в п. (Б) леммы 4.4. Утверждение (Б) предложения, т. е. сходимость $\bar{\alpha}(A_\gamma) \xrightarrow{p} 0$, следует из пп. (В), (А) той же леммы с учетом дополнительного условия (31). Утверждение (В), т. е. сходимость $\alpha(A_o) \xrightarrow{p} 1$, очевидным образом вытекает из неравенства Чебышёва, так как $\mathbf{E}\alpha(A_o) = 1$ ввиду выбора $A_o = A_{no}$ и $\mathbf{D}\alpha(A_o) = \sum \mathbf{D}(\gamma_i X_i)/A_o^2 \to 0$ в силу условий предложения. $\square$

Доказательство предложения 3.3. Воспользуемся доказательством следствия 3 из работы [4], сделав в нем замену $\zeta_i = \gamma_i \tau_i$ из (56). В этом случае ввиду предположения 2.1 из определений (13), (25) и (52) вытекают равенства

$$B_\zeta^2 = \sum \mathbf{D}(\zeta_i) = \sum \mathbf{D}(\gamma_i \tau_i) = B_o^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\zeta_i = \mathbf{E}\gamma_i\tau_i = -\beta\mathbf{E}\gamma_i\delta_i \equiv -\beta\mathbf{E}\rho_i\delta_i.$$

Теперь утверждение (А) доказываемого предложения получаем из леммы 6.4 в [4], а утверждение (Б) оказывается частным случаем при $B = B_\gamma$ более общего факта из доказательства п. (А) следствия 3 в [4]. $\square$

Доказательство предложения 3.4. Утверждение (Б) предложения, т. е. сходимость $\overline{w}(B_\gamma) \xrightarrow{p} 1$, немедленно следует из пп. (А), (Б) и (Г) леммы 4.5.

Далее, из пп. (Б), (В) леммы 4.5 имеем

$$W_\gamma \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad w(B_\gamma) - W_\gamma - \alpha_{\rho\delta} \xrightarrow{p} 0. \tag{60}$$

Таким образом, условие (29), т. е. сходимость $\alpha_{\rho\delta} \xrightarrow{p} 0$, является достаточным для (15) при $B = B_\gamma$, т. е. для сходимости $w(B_\gamma) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

Рассмотрим обратную ситуацию, когда выполнено условие (15) при $B = B_\gamma$. В силу (60) в этом случае одновременно имеют место следующие две сходимости:

$$W_\gamma \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad W_\gamma + \alpha_{\rho\delta} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1).$$

Переходя к характеристическим функциям, получаем, что при всех вещественных t

$$\mathbf{E}e^{it\alpha_{\rho\delta}} = \mathbf{E}e^{it(W_\gamma + \alpha_{\rho\delta})}/\mathbf{E}e^{itW_\gamma} \to e^{-t^2/2}/e^{-t^2/2} = 1,$$

т. е. с необходимостью $\alpha_{\rho\delta} \xrightarrow{p} 0$.

Таким образом, и достаточность и необходимость в утверждении (А) доказаны. $\square$

Для доказательства предложения 3.5 нам потребуется

Лемма 4.6. *Пусть $\{\eta_{ni} : i = 1,\dots,n,\ n = 1,2,\dots\}$ — произвольные случайные величины. Тогда условие*

$$M_n := \sum \mathbf{E}\min\{|\eta_{ni}|, 1\} \to 0 \tag{61}$$

всегда достаточно для сходимостей $S_n := \sum \eta_{ni} \xrightarrow{p} 0$ и $S_{n2} := \sum \eta_{ni}^2 \xrightarrow{p} 0$. Если дополнительно при каждом n случайные величины $\{\eta_{ni},\ i = 1,\dots,n\}$ независимы и все одного знака, то условие (61) является также необходимым для сходимости $S_n \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Пусть выполнено (61). При $k \ge 1$ положим

$$\xi_{ni} := \min\{|\eta_{ni}|, 1\}, \quad Z_{nk} := \sum \xi_{ni}^k, \quad S_{nk} := \sum |\eta_{ni}|^k.$$

Нетрудно понять, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$

$$\mathbf{P}(S_{nk} > \varepsilon) = \mathbf{P}(Z_{nk} > \varepsilon) \le \mathbf{E}Z_{nk}/\varepsilon \le M_n/\varepsilon \to 0.$$

Следовательно, $S_{nk} \xrightarrow{p} 0$ при всех $k \ge 1$ и $|S_n| \le S_{n1} \xrightarrow{p} 0$.

Если теперь $S_n \xrightarrow{p} 0$, причем при каждом n случайные величины $\{\eta_{ni},\, i = 1,\dots,n\}$ независимы и все одного знака, то

$$\max_i \xi_{ni} \le Z_{n1} \le S_{n1} = |S_n| \xrightarrow{p} 0,$$

т. е. в этом случае величины $\{\xi_{ni}\}$ удовлетворяют условию равномерной бесконечной малости, а их сумма сходится к вырожденному нормальному распределению $\mathscr{N}(a,\sigma)$ с $a = \sigma = 0$. Но из критерия нормальной сходимости (см. [6, § 22.5,1°]) при $\tau > 1$ вытекает, в частности, что в этом случае с необходимостью $M_n = \sum \mathbf{E}\xi_{ni} \to 0$. □

Доказательство предложения 3.5. Утверждения (А) и (Б) немедленно следуют из леммы 4.6 при $\eta_{ni} = \beta_n\rho_{ni}\delta_{ni}$. Далее, из определений (37) и (25), имеем $|\rho_i| \le \overline{\Gamma}|\delta_i|$. Следовательно, левая часть в (30) мажорируется левой частью в (38), т. е. утверждение (А$'$) является частным случаем утверждения (А).

Наконец, из определения (37) и условия (39) имеем

$$|\beta\rho_i\delta_i| \ge |\beta|\rho_i\delta_i = |\beta|\frac{\Gamma_i(\delta_i)\delta_i}{\min\{\delta_i^2, r_i^2\}}\min\{\delta_i^2, r_i^2\} \ge |\beta|\check{\gamma}_i\min\{\delta_i^2, r_i^2\}.$$

Учитывая неравенство $|\beta|\check{\gamma}_i r_i^2 \le B_\gamma$, из (39) получаем, что

$$\min\{|\beta\rho_i\delta_i|, B_\gamma\} \ge \min\{|\beta|\check{\gamma}_i\min\{\delta_i^2, r_i^2\}, B_\gamma\} = |\beta|\check{\gamma}_i\min\{\delta_i^2, r_i^2\}.$$

Следовательно,

$$\sum \mathbf{E}\min\{|\beta\rho_i\delta_i|, B_\gamma\}/B_\gamma \ge |\beta|\sum \check{\gamma}_i\mathbf{E}\min\{\delta_i^2, r_i^2\}/B_\gamma.$$

Из последнего неравенства вытекает, что условие (40) необходимо для справедливости условия (30), что доказывает утверждение (Б$'$) предложения 3.5. □

4.5. Завершим доказательство основных результатов работы.

Доказательство теоремы 4. Поскольку справедливость условия (16) при $A = A_\gamma$ мы уже установили в п. (А) предложения 3.2, согласно теореме 3 условие $w(B_\gamma) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ необходимо и достаточно для сходимости (26). Но ввиду п. (А) предложения 3.4 сходимость $w(B_\gamma) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ верна тогда и только тогда, когда имеет место условие (29). Тем самым мы доказали утверждение (А) теоремы.

Далее, если при всех $i = 1,\dots,n$ функции $\gamma_i(\beta_n,\cdot)$ монотонно не убывают по второму аргументу, то $\operatorname{sign}\rho_i = \operatorname{sign}\delta_i$ ввиду определения (25), а потому все величины $\{\rho_i\delta_i\}$ неотрицательны. Если же функции $\gamma_i(\beta_n,\cdot)$ монотонно невозрастающие по второму аргументу, то $\operatorname{sign}\rho_i = -\operatorname{sign}\delta_i$ и величины $\{\rho_i\delta_i\}$ неположительны. Таким образом, в утверждении (Б) теоремы 4 величины $\{\rho_i\delta_i\}$ всегда одного знака, тем самым это утверждение немедленно следует из уже доказанного утверждения (А) этой теоремы и утверждения (Б) предложения 3.5. □

Доказательство следствия 2. Первое утверждение следствия очевидным образом извлекается из п. (А) теоремы 4 и п. (А) предложения 3.5. Второе утверждение следствия вытекает из следствия 1, если только мы заметим, что условие (15) выполнено ввиду п. (А) предложения 3.4 и п. (А) предложения 3.5, условие (23) имеет место в силу п. (Б) предложения 3.4 и п. (А) предложения 3.5, а справедливость (16) и (22) мы установили соответственно в пп. (А), (Б) предложения 3.2. □

Обозначим через c^2 и C^2 левые части в условиях (44) и (45) соответственно.

Лемма 4.7. *Пусть выполнено предположение* 3.7. *Тогда* $c\sqrt{n} \le B_\gamma \le C^2\sqrt{n}$ *и выполнены все условия предположения* 2.6. *В частности, в этом случае условие* (29) *необходимо и достаточно для сходимости* (26).

Доказательство. Используя определения из (13), (24) и предположение 2.1, имеем

$$A_c \ge c^2 n, \quad C^4 n \ge B_\gamma^2 \ge c^2 n, \quad A_\gamma \ge c^2 n, \quad \mathbf{D}\tau_i = \mathbf{D}\epsilon_i + \beta^2 \mathbf{D}\delta_i \le C^2 + \beta^2 \mathbf{D}\delta_i, \tag{62}$$

а потому с учетом (14)

$$d_{c\delta}^2 \le C_1 \bar\sigma^2/n \quad \text{и} \quad d_c^2 \le C_2^2/n \quad \text{при } C_1 := C^2/c^4,\ C_2^2 = C_1(C^2 + \beta^2\bar\sigma^2). \tag{63}$$

В частности, из (62) и (63) вытекают все соотношения в (47).

Обозначим теперь через α_1 и α_2 левые части в сходимостях из условия (20) при $B = B_\gamma$, а через α_3 — левую часть в (21). Тогда с учетом (63) находим

$$\alpha_1 \le C_3 C_2^2 \overline{K}^2/n, \quad |\alpha_2| \le C_2 |\beta| \overline{K}\bar\sigma/c, \quad \alpha_3 \le C_2 C_4 \overline{K}/\sqrt{n}, \tag{64}$$

где $C_3 := C^2/c^2$ и $C_4 := (C + \bar\sigma)/c^2$. При выводе соотношений в (64) мы использовали также обозначения (43) и неравенство $\sum \sqrt{\mathbf{D}\delta_i}/n \le \bar\sigma$.

Через α_4, α_5 и α_6, α_7 обозначим соответственно левые части из условий в (27) и (28). Проводя рассуждения, аналогичные выводу соотношений из (64), и используя еще оценку $\rho_{oi}^2 \le \overline{\Gamma}^2 \mathbf{D}\delta_i$, получаем

$$\alpha_4 \le C_3 \beta^2 \bar\sigma^2, \quad \alpha_5 \le C_3 \overline{\Gamma}^2 \bar\sigma^2, \quad \alpha_6 \le C_4 \overline{\Gamma}\bar\sigma, \quad \alpha_7 \le C_1 \bar\sigma^2/n. \tag{65}$$

Из оценок (63)–(65) и условий (46) нетрудно извлечь все сходимости, требуемые в предположении 2.6. Из п. (A) теоремы 4 вытекает последнее утверждение леммы. □

Доказательство следствия 3. Утверждение (A) следует из леммы 4.7 и п. (A′) предложения 3.5 ввиду неравенства $B_\gamma \ge c\sqrt{n}$. Утверждение (Б) немедленно получается из леммы 4.7 и п. (Б′) предложения 3.5, если только учтем еще неравенство $B_\gamma \le C^2\sqrt{n}$. □

Доказательство следствия 4. Заметим прежде всего, что

$$\forall i \quad \mathbf{E}\min\{\delta_i^2, \mathbf{D}\delta_i\} = C_o \mathbf{D}\delta_i \quad \text{при } C_o = \mathbf{E}\min\{\eta_o^2, 1\}, \tag{66}$$

где случайная величина η_o имеет стандартное нормальное распределение.

Обозначим через c_o левую часть в первом условии в (49). Из условия (49) и неравенства (41) вытекает, что

$$|\beta|\check\Gamma_i(\sqrt{\mathbf{D}\delta_i}) \ge c_o > 0 \quad \text{и} \quad c_o \max_i \mathbf{D}\delta_{ni}/B_\gamma \to 0, \tag{67}$$

поскольку еще $B_\gamma \ge c\sqrt{n}$ в силу леммы 4.7. Но из (67) следует, что все условия в (39) выполнены при $r_i = \sqrt{\mathbf{D}\delta_i}$ и $\check\gamma_i = c_o/|\beta|$. Таким образом, мы можем воспользоваться утверждением (Б′) предложения 3.5 и получим, что для справедливости (26) необходимым является условие (40). Но из (40) и (66) с учетом неравенства $B_\gamma \le C^2\sqrt{n}$ имеем

$$\sum |\beta|\check\gamma_i \mathbf{E}\min\{\delta_i^2, \mathbf{D}\delta_i\}/B_\gamma = \sum c_o C_o \mathbf{D}\delta_i/B_\gamma = c_o C_o n\bar\sigma^2/B_\gamma \ge c_o C_o \sqrt{n}\bar\sigma^2/C^2.$$

Полученное неравенство показывает, что сходимость (40) влечет справедливость условия (48), что доказывает требуемое утверждение. □

Лемма 4.8. *Пусть верны предположения* 1.1 *и* 1.2, *а параметр* β *не зависит от* n. *В этом случае выполнены все условия предположения* 3.7 *и, кроме того,*

$$\sup_n \overline{\Gamma}_n < \infty \quad \text{и} \quad \sup_n \overline{K}_n = \sup_i \overline{K}_{oi} < \infty. \tag{68}$$

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{C}$ левую часть в (9). В этом случае из (9) и (42) вытекает, что $\overline{\Gamma}_n \le \widetilde{C}$. Тем самым доказано первое неравенство в (68). Далее, из (9) с учетом определений (5) и (19) находим, что

$$K_i \le \widetilde{C}(1 + |X_i|) \le \widetilde{C}(1 + |x_i| + |\delta_i|) \quad \text{и} \quad K_{oi} \le \widetilde{C}(1 + |x_i| + \sqrt{\mathbf{D}\delta_i}).$$

Этот факт и предположение 1.1 показывают, что $\sup\limits_i \overline{K}_{oi} < \infty$. Отсюда, учитывая определения (43), получаем второе соотношение в (68).

В рассматриваемом случае последовательности наблюдений условие $\mathbf{D}\delta_n \to 0$ влечет сходимость $\bar{\sigma}^2 \to 0$. Из этого факта и (68) следует справедливость всех условий в (46). Выполнение остальных условий предположения 3.7 вытекает из предположения 1.1. □

В силу леммы 4.8 теорема 1 немедленно следует из утверждения (A′) следствия 3, а теорема 2 вытекает из следствия 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
2. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.
3. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание параметра в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых классических предположений // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 380–396.
4. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 592–619.
5. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1372–1400.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 28 октября 2008 г.

Линке Юлиана Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
linke@math.nsc.ru

Саханенко Александр Иванович
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
aisakh@mail.ru