*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2010. Том 51, № 2*

*УДК 517.518.8*

# ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ $\mathcal{L}$–СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**В. А. Ким**

**Аннотация.** Построена функция Лебега и найдены точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных на вещественной прямой $L$-сплайнов третьего порядка с равномерными узлами интерполяции и разрывами второй производной, выбранными таким образом, чтобы $L$-сплайны третьего порядка удовлетворяли определенному экстремальному свойству относительно интерполируемых функций.

**Ключевые слова:** сплайн, $L$-сплайн, аппроксимация, приближение, интерполяция, константа Лебега.

**1. Введение.** Как известно, к числу основных характеристик процесса интерполяции относится норма соответствующего интерполяционного оператора, называемая *точной константой Лебега.* Данная статья посвящена вычислению точных констант Лебега из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ процесса интерполяции непрерывных ограниченных на вещественной оси функций ограниченными на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайнами третьего порядка с равномерными узлами.

Начало исследованию точных констант Лебега из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ процесса сплайн-интерполяции положено в 1968 г., когда в [1] были вычислены точные константы Лебега для интерполяционных периодических полиномиальных кубических сплайнов с равномерными узлами. Годом позже в [2] была решена аналогичная задача для периодических полиномиальных сплайнов пятой степени. В 1973 г. в [3] обобщены предыдущие результаты и решена задача вычисления точных констант Лебега для интерполяционных периодических и ограниченных на вещественной оси полиномиальных сплайнов произвольной степени с равномерными узлами. В 1975 г. в [4] найдена асимптотика (по степени) точных констант Лебега для интерполяционных ограниченных на вещественной оси полиномиальных сплайнов с равномерными узлами. Задача отыскания асимптотики (по степени и числу узлов интерполяции на периоде) точных констант Лебега для интерполяционных периодических полиномиальных сплайнов с равномерными узлами решена в 2000 г. Ю. Н. Субботиным и С. А. Теляковским [5].

В 2008 г. автором [6] вычислены точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка с равномерными узлами, составленных из элементов ядра формально-самосопряженного дифференциального оператора третьего порядка $\mathcal{L} = D(D^2 - \alpha^2)$, $\alpha > 0$. Данная статья является обобщением на случай более общего дифференциального оператора третьего порядка

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00320) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1071.2008.1).

$\mathcal{L} = D(D-\alpha)(D-\beta)$, $\alpha < 0 < \beta$, результата вычисления точных констант Лебега для интерполяционных ограниченных на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка, изложенного в [6].

Точная постановка задачи представлена в п. 2. В п. 3 получено удобное представление интерполяционного ограниченного на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайна третьего порядка, которое применено к построению функции Лебега в п. 4 и отысканию точной константы Лебега в п. 5.

**2. Постановка задачи.** Под $\mathcal{L}$-сплайном третьего порядка будем понимать непрерывно дифференцируемую на вещественной оси функцию, кусочно полиномиальную по системе $\{1, e^{x\alpha}, e^{x\beta}\}$, $\alpha < 0 < \beta$. $\mathcal{L}$-сплайн третьего порядка составлен из элементов ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L} = D(D-\alpha)(D-\beta)$, где $\alpha < 0 < \beta$, $D$ — оператор дифференцирования. Пусть $h > 0$. Обозначим через $\mathbb{C}_\infty$ пространство непрерывных ограниченных на вещественной оси функций. Под $\mathrm{S}_\infty^{\mathcal{L}}$ будем понимать пространство ограниченных на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка с возможными разрывами второй производной в узлах $\{2hi - \omega,\ i \in \mathbb{Z}\}$, где $\omega$ — единственный корень уравнения

$$\frac{2\alpha\beta\omega - 2h\alpha\beta + 2\beta + 2\alpha}{4\alpha^2\beta^2} + \frac{e^{\alpha\omega}}{\alpha^2(\alpha-\beta)(e^{2h\alpha}+1)} + \frac{e^{\beta\omega}}{\beta^2(\beta-\alpha)(e^{2h\beta}+1)} = 0. \quad (2.1)$$

Такой выбор $\omega$ обусловлен [7], так как тогда для $\widetilde{W}_\infty(\mathcal{L}) = \{f : f \in \mathbb{C}_\infty, f'' \in \operatorname{loc} AC, \|\mathcal{L}f\|_\infty \le 1\}$ выполнено следующее экстремальное свойство:

$$\sup_{f \in \widetilde{W}_\infty(\mathcal{L})} \|f - S^{\mathcal{L}}(f)\|_\infty = \sup_{f \in \widetilde{W}_\infty(\mathcal{L})} \inf_{S^{\mathcal{L}} \in S_\infty^{\mathcal{L}}} \|f - S^{\mathcal{L}}\|_\infty,$$

где $S^{\mathcal{L}}(f)$ — единственный для $f \in \mathbb{C}_\infty$ $\mathcal{L}$-сплайн третьего порядка, удовлетворяющий $f(2hi) = S^{\mathcal{L}}(f; 2hi)$, $i \in \mathbb{Z}$. Единственность $S^{\mathcal{L}}(f)$ и $\omega$ также описана в [7]. Класс $\mathbb{C}_\infty$ несколько шире класса $\widetilde{W}_\infty(\mathcal{L})$, но задача сплайн-интерполяции в общем случае разрешима и для него, поэтому в дальнейшем будем считать, что $L_\infty^{\mathcal{L}} : \mathbb{C}_\infty \to \mathrm{S}_\infty^{\mathcal{L}}$ действует по правилу $L_\infty^{\mathcal{L}} f = S^{\mathcal{L}}(f)$. Норма оператора $L_\infty^{\mathcal{L}}$ является искомой точной константой Лебега.

**3. Представление интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна третьего порядка.** Согласно [8] $B$-сплайны для дифференциального оператора $\mathcal{L} = D(D-\alpha)(D-\beta)$, $\alpha < 0 < \beta$, имеют вид

$$B_0(y) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[\beta - \alpha - \beta e^{2h\alpha+\omega\alpha+y\alpha} + \alpha e^{2h\beta+\omega\beta+y\beta}] \text{ при } y \in [-2h-\omega, -\omega], \\ \frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[-(e^{2h\alpha} + e^{2h\beta})(\beta-\alpha) \\ \quad +\beta(1+e^{2h\beta})e^{\omega\alpha+y\alpha} - \alpha(1+e^{2h\alpha})e^{\omega\beta+y\beta}] \text{ при } y \in [-\omega, 2h-\omega], \\ \frac{e^{2h(\alpha+\beta)}}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[\beta - \alpha - e^{-4h\alpha+\omega\alpha+y\alpha} + e^{-4h\beta+\omega\beta+y\beta}] \text{ при } y \in [2h-\omega, 4h-\omega], \\ 0 \qquad \text{при } y \in \mathbb{R}\backslash[-2h-\omega, 4h-\omega], \end{cases} \quad (3.1)$$

$$B_k(y) \triangleq B_0(y - 2kh) \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Будем искать интерполяционный ограниченный на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайн третьего порядка в виде

$$S^{\mathcal{L}}(f; y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k B_k(y). \quad (3.2)$$

Используя (3.1) и условия интерполяции $f(2hi) = S^{\mathcal{L}}(f;2hi)$, $i \in \mathbb{Z}$, получим следующую систему разностных уравнений:

$$cC_{k-1} + bC_k + aC_{k+1} = f(2hk), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} a = B_0(-2h) &= \frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[\beta - \alpha - \beta e^{\omega\alpha} + \alpha e^{\omega\beta}], \\ b = B_0(0) &= \frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[-(\beta-\alpha)(e^{2h\alpha} + e^{2h\beta}) \\ &\qquad + \beta(1+e^{2h\beta})e^{\omega\alpha} - \alpha(1+e^{2h\alpha})e^{\omega\beta}], \\ c = B_0(2h) &= \frac{e^{2h(\alpha+\beta)}}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[\beta - \alpha - \beta e^{-2h\alpha+\omega\alpha} + \alpha e^{-2h\beta+\omega\beta}]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

**Лемма 1.** $a > 0$.

**Лемма 2.** $b > 0$.

**Лемма 3.** $c > 0$.

Доказательства лемм 1–3 следуют из определения (3.4) и неотрицательности $B$-сплайна [9].

**Лемма 4.** $D = b^2 - 4ac > 0$.

Доказательство. Положим

$$f(y,z) = \frac{e^{(2h-\omega)y} - 1}{y} + \frac{1 - e^{-\omega y}}{y} e^{2hz}.$$

Подставим (3.4) в

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= \left[\frac{e^{\omega(\alpha+\beta)}}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}\right]^2 \Bigg\{ \Bigg[ \frac{\beta(1-e^{2h\beta})}{e^{\omega\beta}} \\ &\qquad + \frac{\alpha(1-e^{2h\alpha})}{e^{\omega\alpha}} + \frac{(\beta-\alpha)(e^{2h\beta} - e^{2h\alpha})}{e^{\omega(\alpha+\beta)}} \Bigg]^2 \\ -4\frac{\alpha(1-e^{2h\alpha})}{e^{\omega\alpha}}\frac{\beta(1-e^{2h\beta})}{e^{\omega\beta}} \Bigg\} &= \left[\frac{e^{\omega(\alpha+\beta)}}{\beta-\alpha}\right]^2 \Bigg\{ \Bigg[ \left( \frac{e^{(2h-\omega)\alpha} - 1}{\alpha} + \frac{1-e^{-\omega\alpha}}{\alpha} e^{2h\beta} \right) e^{-\omega\beta} \\ + \left( \frac{e^{(2h-\omega)\beta} - 1}{\beta} + \frac{1-e^{-\omega\beta}}{\beta} e^{2h\alpha} \right) e^{-\omega\alpha} \Bigg]^2 &- 4e^{-\omega(\alpha+\beta)} \left( \frac{e^{2h\alpha}-1}{\alpha} \right) \left( \frac{e^{2h\beta}-1}{\beta} \right) \Bigg\} \\ &= \left[\frac{e^{\omega(\alpha+\beta)}}{\beta-\alpha}\right]^2 \Bigg\{ \Big[ f(\alpha,\beta)e^{-\omega\beta} + f(\beta,\alpha)e^{-\omega\alpha} \Big]^2 - 4e^{-\omega(\alpha+\beta)} f(\alpha,\alpha) f(\beta,\beta) \Bigg\} \\ &= \left[\frac{e^{\omega(\alpha+\beta)}}{\beta-\alpha}\right]^2 \Bigg\{ \Big[ f(\alpha,\beta)e^{-\omega\beta} - f(\beta,\alpha)e^{-\omega\alpha} \Big]^2 \\ &\qquad + 4e^{-\omega(\alpha+\beta)} \Big[ f(\alpha,\beta)f(\beta,\alpha) - f(\alpha,\alpha)f(\beta,\beta) \Big] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &f(\alpha,\beta)f(\beta,\alpha) - f(\alpha,\alpha)f(\beta,\beta) \\ &\qquad = \frac{e^{2h\beta} - e^{2h\alpha}}{\alpha\beta}[(1-e^{-\omega\alpha})(e^{(2h-\omega)\beta} - 1) - (1-e^{-\omega\beta})(e^{(2h-\omega)\alpha} - 1)], \end{aligned}$$

следовательно,

$$f(\alpha,\beta)f(\beta,\alpha)-f(\alpha,\alpha)f(\beta,\beta)>0 \Leftrightarrow h(\alpha)<h(\beta), \quad \text{где } h(y)=\frac{e^{(2h-\omega)y}-1}{1-e^{-\omega y}}. \tag{3.6}$$

В силу (3.6)

$$h'(y)=\frac{e^{\omega y}}{(e^{\omega y}-1)^2}u(y), \quad \text{где } u(y)=(2h-\omega)e^{2hy}-2he^{(2h-\omega)y}+\omega, \tag{3.7}$$

$$u'(y)=2h(2h-\omega)(1-e^{-\omega y})e^{2hy}. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что $u'(y)>0$ при $y>0$, $u'(y)=0$ при $y=0$ и $u'(y)<0$ при $y<0$. Учитывая $u(0)=0$, получаем $u(y)\geq 0$ при любом $y\in\mathbb{R}$. Тогда в силу (3.7) $h(y)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$, $\alpha<0<\beta$ дает $h(\alpha)<h(\beta)$ и по (3.6) $f(\alpha,\beta)f(\beta,\alpha)-f(\alpha,\alpha)f(\beta,\beta)>0$. В итоге представление (3.5) обеспечивает $D>0$. Лемма 4 доказана.

Введем в рассмотрение характеристический многочлен системы разностных уравнений (3.3):

$$R_2(x)=ax^2+bx+c. \tag{3.9}$$

**Лемма 5.** $R_2(-1)<0$.

Доказательство. Подставим (3.4) и $x=-1$ в (3.9):

$$R_2(-1)=a-b+c=\frac{(1+e^{2h\beta})(1+e^{2h\alpha})}{\beta-\alpha}W(\omega), \tag{3.10}$$

где $W(\upsilon)=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{2}{\alpha(1+e^{2h\alpha})}e^{\upsilon\alpha}+\frac{2}{\beta(1+e^{2h\beta})}e^{\upsilon\beta}$. Положим

$$V(\upsilon)=\frac{2\alpha\beta\upsilon-2h\alpha\beta+2\beta+2\alpha}{4\alpha^2\beta^2}+\frac{e^{\alpha\upsilon}}{\alpha^2(\alpha-\beta)(e^{2h\alpha}+1)}+\frac{e^{\beta\upsilon}}{\beta^2(\beta-\alpha)(e^{2h\beta}+1)},$$

тогда по (2.1) $V(\omega)=0$ и

$$V'(\upsilon)=\frac{1}{2\alpha\beta}+\frac{e^{\alpha\upsilon}}{\alpha(\alpha-\beta)(e^{2h\alpha}+1)}+\frac{e^{\beta\upsilon}}{\beta(\beta-\alpha)(e^{2h\beta}+1)}=\frac{W(\upsilon)}{2(\beta-\alpha)} \tag{3.11}$$

и далее

$$V(0)=\frac{-2h\alpha\beta+2\beta+2\alpha}{4\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2(\alpha-\beta)(1+e^{2h\alpha})}+\frac{1}{\beta^2(\beta-\alpha)(1+e^{2h\beta})}=f(2h), \tag{3.12}$$

$$V(2h)=\frac{2h\alpha\beta+2\beta+2\alpha}{4\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2(\alpha-\beta)(1+e^{-2h\alpha})}+\frac{1}{\beta^2(\beta-\alpha)(1+e^{-2h\beta})}=f(-2h), \tag{3.13}$$

где

$$f(x)=\frac{-\alpha\beta x+2\beta+2\alpha}{4\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2(\alpha-\beta)(1+e^{\alpha x})}+\frac{1}{\beta^2(\beta-\alpha)(1+e^{\beta x})}. \tag{3.14}$$

Из (3.14) следует, что

$$f'(x)=-\frac{1}{4\alpha\beta}-\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha-\beta)(1+e^{\alpha x})^2}-\frac{e^{\beta x}}{\beta(\beta-\alpha)(1+e^{\beta x})^2} \tag{3.15}$$

и $f'(0) = 0$. Положим $g(x) = \frac{e^{\gamma x}}{(1+e^{\gamma x})^2}$, тогда

$$g'(x) = \frac{\gamma e^{\gamma x}(1 - e^{\gamma x})}{(1 + e^{\gamma x})^3} \text{ и } \max_{x \in (-\infty,\infty)} g(x) = g(0) = 0. \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16) вытекает, что $f'(x) > f'(0) = 0$ при $x \neq 0$ и $f(-2h) < f(2h)$. В силу (3.12) и (3.13) $V(2h) < V(0)$, из [7] также известно, что $V(\upsilon)$ имеет единственный нуль на $[0, 2h)$ при $\upsilon = \omega$ и этот нуль простой. Тогда $V(\upsilon)$ строго убывает при $\upsilon = \omega$. Таким образом, $V'(\omega) < 0$, и по (3.11) $W(\omega) < 0$. Возвращаясь к (3.10), получаем $R_2(-1) < 0$. Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** *$R_2(x)$ имеет два различных вещественных отрицательных нуля $x_1$ и $x_2$, причем $x_2 < -1 < x_1 < 0$.*

Доказательство. $D > 0$ по лемме 4, тогда $R_2(x) = 0$ имеет два различных вещественных решения. Положительность $a$ (лемма 1) гарантирует, что ветви параболы $y = R_2(x)$ направлены вверх. Более того, $b > 0$ (лемма 2), и вершина параболы $y = R_2(x)$ имеет отрицательную абсциссу. В силу леммы 3 выполнено $c > 0$, что обеспечивает отрицательность обоих корней уравнения $R_2(x) = 0$. По лемме 5 оба корня лежат по разные стороны от $x = -1$. Лемма 6 доказана.

Таким образом, $R_2(x)$ не обращается в нуль на единичной окружности комплексной плоскости, и выполнены условия теоремы B из [10]. Сформулируем ее.

**Теорема 1.** *Если $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} |\gamma_m| < +\infty$ и $R(Z) = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m Z^m$ не обращается в нуль на единичной окружности $|Z| = 1$, то уравнение*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m+k} C_m = f_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

*имеет решение*

$$C_m = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \eta_{-s-m} f_s, \quad m \in \mathbb{Z},$$

*где $\frac{1}{R(Z)} = \sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} \eta_s Z^s$, при этом*

$$\|C_m\|_{l_p} \leq \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |\eta_s| \|f_s\|_{l_p}.$$

*Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} |\eta_s|$ следует из теоремы Винера.*

Чтобы использовать теорему B из [10], потребуется

**Лемма 7.** *Ряд Лорана $1/R_2(Z)$ в кольце $|x_1| < |Z| < |x_2|$, содержащем единичную окружность, имеет вид*

$$\frac{1}{R_2(Z)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[ \sum_{s=-\infty}^{-1} x_1^{|s+1|} Z^s + \sum_{s=0}^{+\infty} x_2^{-|s+1|} Z^s \right].$$

По теореме B из [10] для любой ограниченной последовательности $\{f(2hk), k \in \mathbb{Z}\}$ система разностных уравнений (3.3) имеет единственное ограниченное решение, подстановка которого в (3.2) дает искомое представление интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна третьего порядка. Данное представление выпишем в следующей теореме.

**Теорема 2.** *Для любой непрерывной ограниченной на вещественной оси функции $f$ интерполяционный ограниченный на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайн третьего порядка $S^{\mathcal{L}}$ представим в виде*

$$S^{\mathcal{L}}(f;y) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{s=-\infty}^{k} x_1^{|s-k|} f_s + \sum_{s=k+1}^{+\infty} x_2^{-|s-k|} f_s \right] B_k(y), \tag{3.17}$$

*где $\Delta = 1/\sqrt{D}$ и $D$ определено выражением* (3.5), $f_s = f(2hs)$ *и* $x_1$, $x_2$ — *два вещественных различных отрицательных нуля* $R_2(x)$ (*см.* (3.9)), *причем* $x_2 < -1 < x_1 < 0$.

**4. Функция Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка.** Оценим функцию Лебега

$$\mathfrak{L}_{\infty}^{\Phi}(y) \triangleq \sup_{f \in \mathbb{C}_{\infty}^{*}} |S^{\mathcal{L}}(f;y)|, \tag{4.1}$$

где $\mathbb{C}_{\infty}^{*} = \{f : f \in \mathbb{C}_{\infty},\ \|f\|_{\infty} \le 1\}$. Используя (3.1), (4.1) и перестановочное свойство абсолютно сходящихся рядов в (3.17), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\infty}^{\Phi}(y) &= \sup_{f \in \mathbb{C}_{\infty}^{*}} \left| \Delta \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{q=-\infty}^{t-1} x_2^{-|t-q|} B_q(y) + \sum_{q=t}^{+\infty} x_1^{|t-q|} B_q(y) \right] f_t \right| \\ &= \sup_{f \in \mathbb{C}_{\infty}^{*}} \left| \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{s-1} x_2^{-|s-k|} B_k(x) + \sum_{k=s}^{+\infty} x_1^{|s-k|} B_k(x) \right] f_{s+i} \right|, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi-\omega, 2hi+2h-\omega]$, $x = y - 2hi$, $k = q - i$ и $s = t - i$. В силу (4.2) будем использовать следующие функции:

$$\phi_s(x) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{s-1} x_2^{-|s-k|} B_k(x) + \sum_{k=s}^{+\infty} x_1^{|s-k|} B_k(x) \quad \text{при } s \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Так как $x \in [-\omega, 2h-\omega]$, исключим нулевые слагаемые из (4.3):

$$\phi_s(x) = \begin{cases} x_2^{-s-1} B_{-1}(x) + x_2^{-s} B_0(x) + x_2^{-s+1} B_1(x) & \text{при } s = 1, 2, 3, \dots, \\ x_2^{-1} B_{-1}(x) + B_0(x) + x_1 B_1(x) & \text{при } s = 0, \\ x_1^{-s-1} B_{-1}(x) + x_1^{-s} B_0(x) + x_1^{-s+1} B_1(x) & \text{при } s = -1, -2, -3, \dots. \end{cases} \tag{4.4}$$

С учетом (4.4) функция Лебега имеет представление

$$\mathfrak{L}_{\infty}^{\Phi}(y) = \sup_{f \in \mathbb{C}_{\infty}^{*}} \left| \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \phi_s(x) f_{s+i} \right|, \tag{4.5}$$

и справедлива следующая оценка:

$$\mathfrak{L}_{\infty}^{\Phi}(y) \le \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |\phi_s(x)|, \tag{4.6}$$

где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi-\omega, 2hi+2h-\omega]$ и $x = y - 2hi$. Для получения оценки снизу докажем следующую серию вспомогательных утверждений.

**Лемма 8.** *Справедливы оценки*

$$x_2 < -\frac{B_0(2h-\omega)}{B_0(-\omega)} < x_1. \tag{4.7}$$

Доказательство. График функции $y = R_2(x)$ — парабола с ветвями вверх, так как $a > 0$ (лемма 1), $R_2(x_1) = R_2(x_2) = 0$. Тогда для справедливости леммы достаточно доказать, что $R_2(-p) < 0$, где $p = B_0(2h-\omega)/B_0(-\omega)$. Обозначим

$$\begin{gathered} d_+ = B_0(2h-\omega) = \frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[(\beta-\alpha)e^{2h(\alpha+\beta)} - \beta e^{2h\beta} + \alpha e^{2h\alpha}], \\ d_- = B_0(-\omega) = \frac{1}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}[\beta-\alpha-\beta e^{2h\alpha}+\alpha e^{2h\beta}]. \end{gathered} \tag{4.8}$$

В силу (3.4) выполнено $b = -a - c + (1-e^{2h\alpha})(1-e^{2h\beta})/(\alpha\beta)$, тогда

$$R_2(-p) = \frac{1}{d_-^2}\left[(d_+ + d_-)(ad_+ + cd_-) - \frac{(1-e^{2h\alpha})(1-e^{2h\beta})}{\alpha\beta}d_+d_-\right].$$

Из (4.8) следует, что $d_+ + d_- = (1-e^{2h\alpha})(1-e^{2h\beta})/(\alpha\beta)$, и тем самым

$$R_2(-p) = \frac{1}{d_-^2}\frac{(1-e^{2h\alpha})(1-e^{2h\beta})}{\alpha\beta}[ad_+ + cd_- - d_+d_-]. \tag{4.9}$$

Непосредственная подстановка (3.4) и (4.8) в (4.9) дает

$$R_2(-p) = \frac{1}{d_-^2}\frac{(1-e^{\omega\alpha})(1-e^{2h\alpha})(e^{\omega\beta}-1)(e^{2h\beta}-1)(e^{2h\beta}-e^{2h\alpha})}{\alpha^2\beta^2(\beta-\alpha)^2}[f(\alpha)-f(\beta)], \tag{4.10}$$

где $f(x) = (e^{2hx}-1)/(e^{\omega x}-1)$. Вычислим $f'(x) = e^{\omega x}h(x)/(e^{\omega x}-1)^2$, где $h(x) = (2h-\omega)e^{2hx} - 2he^{(2h-\omega)x} + \omega$. Далее, $h'(x) = 2h(2h-\omega)(1-e^{-\omega x})e^{2hx}$ и, следовательно, $h'(x) < 0$ при $x < 0$, $h'(0) = 0$ и $h'(x) > 0$ при $x > 0$. Таким образом, для любого $x \in \mathbb{R}\backslash 0$ выполнено $h(x) > h(0) = 0$. Тогда $f'(x)$ неотрицательна на $\mathbb{R}$ и $f(x)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}\backslash 0$. Учитывая $\alpha < 0 < \beta$ и (4.10), получаем требуемое $R_2(-p) < 0$. Лемма 8 доказана.

**Лемма 9.** *Для любого $x \in [-\omega, 2h-\omega]$ выполнено $\phi_0(x) > 0$.*

Доказательство. Используя (3.1), (4.4) и $R_2(x_1) = R_2(x_2) = 0$, вычислим значения функций $\phi_0(x)$ в точках $x = -\omega, 0, 2h-\omega$:

$$\phi_0(2h-\omega) = B_0(2h-\omega) + x_1B_0(-\omega), \quad \phi_0(-\omega) = [B_0(2h-\omega) + x_2B_0(-\omega)]x_2^{-1}.$$

В силу леммы 8 выполнено $\phi_0(2h-\omega) > 0$ и $\phi_0(-\omega) > 0$. Теперь исследуем знак $\phi_0(x)$ в точке экстремума. Из (4.4) следует, что

$$\phi_0'(x) = \frac{e^{2h\beta}(1-x_2^{-1}) + (1-x_1)}{\beta-\alpha}e^{(x+\omega)\alpha} - \frac{e^{2h\alpha}(1-x_2^{-1}) + (1-x_1)}{\beta-\alpha}e^{(x+\omega)\alpha},$$

$$\phi_0'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{(x+\omega)\beta} = \frac{e^{2h\beta}(1-x_2^{-1}) + (1-x_1)}{e^{2h\alpha}(1-x_2^{-1}) + (1-x_1)}e^{(x+\omega)\alpha}. \tag{4.11}$$

Подставим (4.11) в выражения для $\phi_0(x)$ в (4.4): $\phi_0(x) = \frac{h(x)}{\alpha\beta}$, где $h(x) = e^{2h(\alpha+\beta)}x_2^{-1} - (e^{2h\alpha} + e^{2h\beta}) + x_1 + \left[e^{2h\beta}(1-x_2^{-1}) + (1-x_1)\right]e^{(x+\omega)\alpha}$. Так как $x_2 < -1 < x_1 < 0$, имеем $h(x) \le h(2h-\omega) = -(e^{2h\beta} - x_1)(1-e^{2h\alpha}) < 0$. Таким образом, $\phi_0(2h-\omega) > 0$, $\phi_0(-\omega) > 0$, и в точке экстремума $\phi_0(x) > 0$. К тому же $\phi_0(x)$ является полиномом по системе $\{1, e^{x\alpha}, e^{x\beta}\}$ и тем самым имеет не более одной точки экстремума. В итоге для любого $x \in [-\omega, 2h-\omega]$ выполнено $\phi_0(x) > 0$. Лемма 9 доказана.

**Лемма 10.** *Для любого* $x \in [-\omega, 0]$ *выполнено* $\operatorname{sgn}\phi_s(x) = (-1)^s$ *при* $s = 1, 2, 3, \ldots$ *и* $\operatorname{sgn}\phi_s(x) = (-1)^{-s-1}$ *при* $s = -1, -2, -3, \ldots$. *Для любого* $x \in [0, 2h-\omega]$ *выполнено* $\operatorname{sgn}\phi_s(x) = (-1)^{s-1}$ *при* $s = 1, 2, 3, \ldots$ *и* $\operatorname{sgn}\phi_s(x) = (-1)^{-s}$ *при* $s = -1, -2, -3, \ldots$.

Используя (3.1) и (4.4), вычислим значения функций $\phi_s(x)$ в точках $x = -\omega, 0, 2h-\omega$:

$$\phi_s(-\omega) = \begin{cases} [B_0(2h-\omega) + x_2 B_0(-\omega)] x_2^{-s-1} & \text{при } s = 1, 2, 3, \ldots, \\ [B_0(2h-\omega) + x_1 B_0(-\omega)] x_1^{-s-1} & \text{при } s = -1, -2, -3, \ldots, \end{cases}$$

$$\phi_s(0) = 0 \quad \text{при } s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

$$\phi_s(2h-\omega) = \begin{cases} [B_0(2h-\omega) + x_2 B_0(-\omega)] x_2^{-s} & \text{при } s = 1, 2, 3, \ldots, \\ [B_0(2h-\omega) + x_1 B_0(-\omega)] x_1^{-s} & \text{при } s = -1, -2, -3, \ldots. \end{cases}$$

Из (4.7) $B_0(2h-\omega) + x_1 B_0(-\omega) > 0$ и $B_0(2h-\omega) + x_2 B_0(-\omega) < 0$, тогда $\phi_s(2h-\omega)$ и $\phi_s(-\omega)$ имеют следующий знак:

$$\operatorname{sgn}\phi_s(-\omega) = \begin{cases} (-1)^s & \text{при } s = 1, 2, 3, \ldots, \\ (-1)^{-s-1} & \text{при } s = -1, -2, -3, \ldots, \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}\phi_s(2h-\omega) = \begin{cases} (-1)^{s-1} & \text{при } s = 1, 2, 3, \ldots, \\ (-1)^{-s} & \text{при } s = -1, -2, -3, \ldots. \end{cases}$$

Функции $\phi_s(x)$ при $s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ являются полиномами по системе $\{1, e^{x\alpha}, e^{x\beta}\}$ и, следовательно, имеют не более двух нулей с учетом кратности на $\mathbb{R}$. Кроме того, функции $\phi_s(x)$ при $s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ принимают значения разного знака в точках $x = -\omega, 2h-\omega$ и обращаются в нуль при $x = 0$. Тогда функции $\phi_s(x)$ при $s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ не меняют знаки на $[-\omega, 0]$ и $[0, 2h-\omega]$ и при любых $x \in [-\omega, 0]$ и $s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ выполнено $\operatorname{sgn}\phi_s(x) = \operatorname{sgn}\phi_s(-\omega)$, при любых $x \in [0, 2h-\omega]$ и $s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ выполнено $\operatorname{sgn}\phi_s(x) = \operatorname{sgn}\phi_s(2h-\omega)$. Лемма 10 доказана.

В силу (4.5), лемм 9 и 10 для непрерывной линейной между соседними узлами интерполяции функции $f^{(-)}$, интерполирующей значения $f^{(-)}(2hs) = \operatorname{sgn}\phi_{s-i}(y-2hi)$ при $s \in \mathbb{Z}$, справедливо следующее соотношение:

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(y) \geq \left| \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \phi_s(x) f_{s+i}^{(-)} \right| = \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |\phi_s(x)|, \tag{4.12}$$

где $x = y - 2hi$ и $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi-\omega, 2hi]$.

В силу (4.5), лемм 10 и 11 для непрерывной линейной между соседними узлами интерполяции функции $f^{(+)}$, интерполирующей значения $f^{(+)}(2hs) = \operatorname{sgn}\phi_{s-i}(y-2hi)$ при $s \in \mathbb{Z}$, справедливо следующее соотношение:

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(y) \geq \left| \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \phi_s(x) f_{s+i}^{(+)} \right| = \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |\phi_s(x)|, \tag{4.13}$$

где $x = y - 2hi$ и $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi, 2hi+2h-\omega]$.

Из (4.6), (4.12) и (4.13) получим представление функции Лебега:

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(y) = \Delta \sum_{s=-\infty}^{+\infty} |\phi_s(x)|, \tag{4.14}$$

где $x = y - 2hi$ и $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi - \omega, 2hi + 2h - \omega]$.

Теперь найдем явный вид функции Лебега (4.14). В силу лемм 9 и 10 на отрезке $[-\omega, 0]$

$$\mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(x) = \Delta \left[ \sum_{s=-\infty}^{-1} (-1)^{-s-1} \phi_s(x) + \phi_0(x) + \sum_{s=1}^{+\infty} (-1)^s \phi_s(x) \right] = I_{-1} B_{-1}(x) + I_0 B_0(x) + I_1 B_1(x), \tag{4.15}$$

где

$$I_{-1} = \Delta \left[ \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \right], \quad I_0 = \Delta \left[ \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} \right], \quad I_1 = \Delta \left[ \frac{2x_1^2 + x_1}{1+x_1} - \frac{x_2}{1+x_2} \right]. \tag{4.16}$$

В силу лемм 9 и 10 на отрезке $[0, 2h - \omega]$

$$\mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(x) = \sum_{s=-\infty}^{-1} (-1)^{-s} \phi_s(x) + \phi_0(x) + \sum_{s=1}^{+\infty} (-1)^{s-1} \phi_s(x) = J_{-1} B_{-1}(x) + J_0 B_0(x) + J_1 B_1(x), \tag{4.17}$$

где

$$J_{-1} = \Delta \left[ \frac{-1}{1+x_1} + \frac{2+x_2}{x_2(1+x_2)} \right], \quad J_0 = \Delta \left[ \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \right], \quad J_1 = \Delta \left[ \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} \right]. \tag{4.18}$$

Объединяя (3.1), (4.15) и (4.17), получим явный вид функции Лебега.

**Теорема 3.** *Функция Лебега для интерполяционных ограниченных на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка с узлами интерполяции $\{2hk, k \in \mathbb{Z}\}$ и возможными разрывами второй производной в узлах $\{2hk - \omega, k \in \mathbb{Z}\}$ имеет вид*

$$\mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)} [e^{2h\beta} I_{-1} - (1 + e^{2h\beta}) I_0 + I_1] e^{(x+\omega)\alpha} \\ \quad + \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)} [e^{2h\alpha} I_{-1} - (1 + e^{2h\alpha}) I_0 + I_1] e^{(x+\omega)\beta} \\ \quad + \frac{1}{\alpha\beta} [e^{2h(\alpha+\beta)} I_{-1} - (e^{2h\alpha} + e^{2h\beta}) I_0 + I_1] \text{ при } y \in [2hi - \omega, 2hi], \\ \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)} [e^{2h\beta} J_{-1} - (1 + e^{2h\beta}) J_0 + J_1] e^{(x+\omega)\alpha} \\ \quad + \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)} [e^{2h\alpha} J_{-1} - (1 + e^{2h\alpha}) J_0 + J_1] e^{(x+\omega)\beta} \\ \quad + \frac{1}{\alpha\beta} [e^{2h(\alpha+\beta)} J_{-1} - (e^{2h\alpha} + e^{2h\beta}) J_0 + J_1] \text{ при } y \in [2hi, 2hi + 2h - \omega], \end{cases} \tag{4.19}$$

*где $x = y - 2hi$ и $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $y \in [2hi - \omega, 2hi + 2h - \omega]$.*

Докажем непрерывность функции Лебега.

**Лемма 11.** $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(-\omega) = \mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(2h - \omega)$.

Доказательство. Подставим $y = -\omega$, $2h - \omega$ в (4.19):

$$\mathfrak{L}^{\Phi}_{\infty}(-\omega) = -\left[ \frac{1 + e^{2h\beta}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{1 + e^{2h\alpha}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{e^{2h\alpha} + e^{2h\beta}}{\alpha\beta} \right] I_0 + \left[ \frac{e^{2h\beta}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{e^{2h\alpha}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{e^{2h(\alpha+\beta)}}{\alpha\beta} \right] I_{-1},$$

$$\mathfrak{L}_\infty^\Phi(2h-\omega) = \left[\frac{e^{2h\alpha}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{e^{2h\beta}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\alpha\beta}\right] J_1 \\ - \left[\frac{e^{2h\alpha}+e^{2h(\alpha+\beta)}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{e^{2h\beta}+e^{2h(\alpha+\beta)}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{e^{2h\alpha}+e^{2h\beta}}{\alpha\beta}\right] J_0.$$

В силу (4.16) и (4.18) $I_{-1} = J_0$ и $I_0 = J_1$. Докажем равенство коэффициентов при $I_{-1}$ и $J_0$, $I_0$ и $J_1$:

$$\left[\frac{1+e^{2h\beta}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{1+e^{2h\alpha}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{e^{2h\alpha}+e^{2h\beta}}{\alpha\beta}\right] + \left[\frac{e^{2h\alpha}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{e^{2h\beta}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\alpha\beta}\right] \\ = (1+e^{2h\alpha}+e^{2h\beta})\left[\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\alpha\beta}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{e^{2h\beta}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{e^{2h\alpha}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{e^{2h(\alpha+\beta)}}{\alpha\beta}\right] + \left[\frac{e^{2h\alpha}+e^{2h(\alpha+\beta)}}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{e^{2h\beta}+e^{2h(\alpha+\beta)}}{\beta(\beta-\alpha)} \right. \\ \left. + \frac{e^{2h\alpha}+e^{2h\beta}}{\alpha\beta}\right] = (e^{2h\alpha}+e^{2h(\alpha+\beta)}+e^{2h\beta})\left[\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\alpha\beta}\right] = 0.$$

Лемма 11 доказана.

**5. Точная константа Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка.** Найдем максимум функции Лебега. В силу $2h$-периодичности функции Лебега достаточно рассмотреть ее на $[-\omega, 2h-\omega]$.

**Лемма 12.** *Если $a \geq c$, то функция Лебега достигает максимума на $[-\omega, 0]$. Если $a \leq c$, то функция Лебега достигает максимума на $[0, 2h-\omega]$.*

Доказательство. Найдем производную (4.19) на $[-\omega, 2h-\omega]$:

$$\left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-\beta}[e^{2h\beta}I_{-1} - (1+e^{2h\beta})I_0 + I_1]e^{(x+\omega)\alpha} \\ \quad +\frac{1}{\beta-\alpha}[e^{2h\alpha}I_{-1} - (1+e^{2h\alpha})I_0 + I_1]e^{(x+\omega)\beta} \text{ при } x \in [-\omega, 0], \\ \frac{1}{\alpha-\beta}[e^{2h\beta}J_{-1} - (1+e^{2h\beta})J_0 + J_1]e^{(x+\omega)\alpha} \\ +\frac{1}{\beta-\alpha}[e^{2h\alpha}J_{-1} - (1+e^{2h\alpha})J_0 + J_1]e^{(x+\omega)\beta} \text{ при } x \in [0, 2h-\omega]. \end{cases} \tag{5.1}$$

Из (4.1) следует, что $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(0) = 1$ и $\mathfrak{L}_\infty^\Phi(y) \geq 1$ при $y \in [-\omega, 2h-\omega]$. Тогда

$$\left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(-0) \leq 0 \quad \text{и} \quad \left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(+0) \geq 0. \tag{5.2}$$

Вычислим

$$\left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(-\omega) = \frac{e^{2h\beta}-e^{2h\alpha}}{\beta-\alpha}[I_0 - I_{-1}] = \frac{e^{2h\beta}-e^{2h\alpha}}{\beta-\alpha}\left[\frac{x_1-1}{1+x_1} + \frac{x_2-1}{1+x_2}\right]$$

и

$$\left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(2h-\omega) = \frac{e^{2h\beta}-e^{2h\alpha}}{\beta-\alpha}[J_0 - J_{-1}] = \frac{e^{2h\beta}-e^{2h\alpha}}{\beta-\alpha}\left[\frac{x_1-1}{1+x_1} + \frac{x_2-1}{1+x_2}\right].$$

Исследуем

$$\frac{x_1-1}{1+x_1} + \frac{x_2-1}{1+x_2} \geq 0 \Leftrightarrow x_1x_2 \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{D}-b}{2a}\right)\left(\frac{-\sqrt{D}-b}{2a}\right) \leq 1 \Leftrightarrow a \geq c. \tag{5.3}$$

Подведем итоги. Если $a \geq c$, то в силу (5.2) и (5.3)

$$\left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(-\omega) \geq 0, \quad \left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(-0) \leq 0, \quad \left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(+0) \geq 0, \quad \left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(2h-\omega) \geq 0.$$

Функция Лебега является полиномом по системе $\{1, e^{x\alpha}, e^{x\beta}\}$ и, следовательно, имеет не более одной точки экстремума как на $[-\omega, 0]$, так и на $[0, 2h-\omega]$. Объединим эти два факта, тогда на $[0, 2h-\omega]$ функция Лебега достигает максимума в точке $x = 2h - \omega$ и с учетом леммы 11 максимум на $[-\omega, 0]$ является глобальным.

Если $a \leq c$, то в силу (5.2) и (5.3)

$$\left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(-\omega) \leq 0, \quad \left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(-0) \leq 0, \quad \left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(+0) \geq 0, \quad \left(\mathfrak{L}_\infty^\Phi\right)'(2h-\omega) \leq 0.$$

Функция Лебега является полиномом по системе $\{1, e^{x\alpha}, e^{x\beta}\}$ и, следовательно, имеет не более одной точки экстремума как на $[-\omega, 0]$, так и на $[0, 2h-\omega]$. Объединим эти два факта, тогда на $[-\omega, 0]$ функция Лебега достигает максимума в точке $x = -\omega$ и с учетом леммы 11 максимум на $[0, 2h-\omega]$ является глобальным. Лемма 12 доказана.

Далее будем заменять $a \geq c \Leftrightarrow (\beta-\alpha)(1-e^{2h(\alpha+\beta)}) - \beta(1-e^{2h\beta})e^{\omega\alpha} + \alpha(1-e^{2h\alpha})e^{\omega\beta} \leq 0$. Из леммы 12 следует

**Лемма 13.** *Функция Лебега достигает максимума в случае* $(\beta-\alpha)(1-e^{2h(\alpha+\beta)}) - \beta(1-e^{2h\beta})e^{\omega\alpha} + \alpha(1-e^{2h\alpha})e^{\omega\beta} \leq 0$ *в точке*

$$x = -\omega + \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\frac{e^{2h\alpha}I_{-1} - (1+e^{2h\alpha})I_0 + I_1}{e^{2h\beta}I_{-1} - (1+e^{2h\beta})I_0 + I_1}$$

*отрезка* $[-\omega, 0]$, *а в случае* $(\beta-\alpha)(1-e^{2h(\alpha+\beta)}) - \beta(1-e^{2h\beta})e^{\omega\alpha} + \alpha(1-e^{2h\alpha})e^{\omega\beta} \geq 0$ — *в точке*

$$x = -\omega + \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\frac{e^{2h\alpha}J_{-1} - (1+e^{2h\alpha})J_0 + J_1}{e^{2h\beta}J_{-1} - (1+e^{2h\beta})J_0 + J_1}$$

*отрезка* $[0, 2h-\omega]$.

Теорема 3 и лемма 13 позволяют найти точную константу Лебега.

**Теорема 4.** *Точная константа Лебега для интерполяционных ограниченных на вещественной оси $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка с узлами интерполяции $\{2hk,\ k \in \mathbb{Z}\}$ и возможными разрывами второй производной в узлах $\{2hk-\omega,\ k \in \mathbb{Z}\}$ равна: если* $(\beta-\alpha)(1-e^{2h(\alpha+\beta)}) - \beta(1-e^{2h\beta})e^{\omega\alpha} + \alpha(1-e^{2h\alpha})e^{\omega\beta} \leq 0$, *то*

$$\begin{aligned}\left\|L_\infty^{\mathcal{L}}\right\|_\infty^\infty = -\frac{1}{\alpha\beta}\big[&(e^{2h\alpha}I_{-1} - (1+e^{2h\alpha})I_0 + I_1)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \\ &\times (e^{2h\beta}I_{-1} - (1+e^{2h\beta})I_0 + I_1)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} \\ &- (e^{2h(\alpha+\beta)}I_{-1} - (e^{2h\alpha} + e^{2h\beta})I_0 + I_1)\big],\end{aligned}$$

*если* $(\beta-\alpha)(1-e^{2h(\alpha+\beta)}) - \beta(1-e^{2h\beta})e^{\omega\alpha} + \alpha(1-e^{2h\alpha})e^{\omega\beta} \geq 0$, *то*

$$\begin{aligned}\left\|L_\infty^{\mathcal{L}}\right\|_\infty^\infty = -\frac{1}{\alpha\beta}\big[&(e^{2h\alpha}J_{-1} - (1+e^{2h\alpha})J_0 + J_1)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \\ &\times (e^{2h\beta}J_{-1} - (1+e^{2h\beta})J_0 + J_1)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} \\ &- (e^{2h(\alpha+\beta)}J_{-1} - (e^{2h\alpha} + e^{2h\beta})J_0 + J_1)\big].\end{aligned}$$

Замечание. В случае $\alpha = -\beta$ имеем $\omega = h$ и найденная здесь точная константа Лебега принимает вид, как в [6].

Автор благодарен Ю. Н. Субботину за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Schurer F., Cheney E. W.* On interpolating cubic splines with equally-spaced nodes // Proc. Nederlande Acad. van Wetenschappen. 1968. Bd 71, Heft 5. P. 517–524.
2. Schurer F. On interpolating periodic quintic spline functions with equally spaced nodes. Tech. Univ. Eindhoven Report 69-WSK-01, Eindhoven, Netherlands, 1969.
3. *Richards F. B.* Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. V. 7, N 3. P. 302–317.
4. *Richards F. B.* The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. V. 14, N 2. P. 83–92.
5. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
6. *Ким В. А.* Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
7. *Novikov S. I.* On $\mathcal{L}$-spline interpolation and approximation on the whole real line // Approximation and function spaces. Warsaw, 1989. P. 293–299. (Banach center publications; V. 22).
8. *Micchelli C. A.* Cardinal $L$-splines // Studies in spline functions and approximation theory. New York: Acad. Press, 1976. P. 203–250.
9. *Karlin S.* Total positivity. Stanford, Ca.: Stanford Univ. Press, 1968. V. 1.
10. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Приближение функций и операторов / Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.


*Статья поступила 8 октября 2008 г.*

Ким Владимир Аркадьевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
vkim@k66.ru