Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.552.4

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ АМИЦУРА — ЛЕВИЦКОГО ДЛЯ МАТРИЧНЫХ СУПЕРАЛГЕБР

Л. М. Самойлов

Аннотация. Для матричной супералгебры $M_{n,k}$ над полем нулевой характеристики строится полиномиальное тождество степени $2(nk+n+k)-\min\{n,k\}$. Выдвигается гипотеза, что тождеств меньшей степени у алгебры $M_{n,k}$ нет.

Ключевые слова: матричная супералгебра, полиномиальное тождество, тождество со следом.

Введение. Все рассматриваемые в работе алгебры будем предполагать ассоциативными алгебрами над полем F нулевой характеристики.

Пусть M_n — алгебра матриц порядка n над полем F, G — алгебра Грассмана счетного ранга с единицей с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $G=G_0\oplus G_1$; G_0 и G_1 — подпространства алгебры G, порожденные всеми словами четной и нечетной длины соответственно. Для $n,k\geq 0$ рассмотрим в алгебре $M_{n+k}(G)=M_{n+k}\otimes G$ подмножество $M_{n,k}$, состоящее из блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A и D — квадратные матрицы размера $n\times n$ и $k\times k$ соответственно с элементами из G_0, B и C — прямоугольные матрицы размера $n\times k$ и $k\times n$ соответственно с элементами из G_1. Легко проверить, что $M_{n,k}$ является подалгеброй алгебры $M_n(G)$. Алгебры $M_{n,k}$ называются *матричными супералгебрами.*

Как показал А. Р. Кемер, алгебры $M_n(G)$ и $M_{n,k}$ играют фундаментальную роль в теории многообразий ассоциативных алгебр. Это связано с тем, что все первичные многообразия ассоциативных алгебр над полями нулевой характеристики порождаются алгебрами $M_n(G)$ или $M_{n,k}$, $n\geq k$ [1]. Отметим, что алгебры $M_{n,0}$ и M_n имеют одинаковые идеалы тождеств.

О тождествах алгебр $M_{n,k}$ известно крайне мало. В частности, при $n\cdot k>1$ неизвестна минимальная степень тождеств этих алгебр. Для $k=0$ теорема Амицура — Левицкого утверждает, что минимальная степень тождеств алгебры матриц M_n (следовательно, и алгебры $M_{n,0}$) равна $2n$. Минимальная степень тождеств алгебры $M_{1,1}$ равна 5.

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. *Над полем характеристики нуль у алгебры $M_{n,k}$ есть тождества степени* $2(nk+n+k)-\min\{n,k\}$.

Отметим, что в силу теоремы Амицура — Левицкого при $k=0$ число $2(nk+n+k)-\min\{n,k\}=2n$ совпадает с минимальной степенью тождеств алгебры

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–0080–а).

M_n. Аналогично при $n = k = 1$ число $2(nk + n + k) - \min\{n, k\} = 5$ совпадает с минимальной степенью тождеств алгебры $M_{1,1}$. Это мотивирует следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Верно ли, что над полем характеристики* 0 *минимальная степень тождеств алгебры* $M_{n,k}$ *равна* $2(nk + n + k) - \min\{n, k\}$?

Отметим, что над полями характеристики $p > 0$ при некоторых n и k алгебры $M_{n,k}$ имеют тождества меньшей степени. Действительно, можно показать, что алгебра $M_{n+k}(G)$ удовлетворяет симметрическому тождеству степени $p(n + k)$. Если n и k велики по сравнению с p, то $p(n + k)$ меньше, чем $2(nk + n + k) - \min\{n, k\}$.

Наше доказательство теоремы 1 обобщает доказательство Ю. П. Размыслова [2] теоремы Амицура — Левицкого.

Доказательство теоремы 1. Вкратце приведем некоторые результаты о тождествах со следом матричных супералгебр.

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра с единицей над полем F, R — ассоциативная и коммутативная алгебра с единицей над F, $C(A)$ — центр A, $\pi : R \to C(A)$ — гомоморфизм F-алгебр. Положим $ar = a\pi(r)$ для $a \in A$, $r \in R$. Это определение превращает A в R-алгебру. Пусть $\mathrm{Tr} : A \to R$ — произвольное R-линейное отображение, удовлетворяющее свойству $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ для всех $a, b \in A$. Четверка (A, R, π, Tr) называется *алгеброй со следом.*

Рассмотрим две алгебры со следом $(A, R, \theta, \mathrm{Tr})$ и $(A', R', \theta', \mathrm{Tr}')$. Пара (μ, ν) гомоморфизмов F-алгебр $\mu : A \to A'$ и $\nu : R \to R'$ называется *гомоморфизмом алгебр со следом*, если $\mu\theta = \theta'\nu$ и $\nu\,\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}'\,\mu$.

Обозначим через X счетное множество $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, а через $F^\sharp\langle X\rangle$ — свободную ассоциативную алгебру с единицей, порожденную множеством X. Определим отношение эквивалентности на свободной полугруппе с единицей $\langle X\rangle$, порожденной множеством X, полагая $u_1 \sim u_2$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $u, v \in \langle X\rangle$ такие, что $u_1 = vw, u_2 = wv$. Если $u \in \langle X\rangle$, то положим $\bar{u} = \{v \in \langle X\rangle \mid v \sim u\}$. Обозначим через $T\langle X\rangle$ свободную ассоциативную и коммутативную алгебру с единицей, порожденную всеми элементами $\mathrm{Tr}(\bar{u})$, где $u \in \langle X\rangle$.

Рассмотрим алгебру $\widetilde{F}\langle X\rangle = F^\sharp\langle X\rangle \otimes T\langle X\rangle$. Определим гомоморфизмы F-алгебр $\theta : T\langle X\rangle \to C\big(\widetilde{F}\langle X\rangle\big)$ и $\mathrm{Tr} : \widetilde{F}\langle X\rangle \to T\langle X\rangle$ по формулам $\theta(t) = 1 \otimes t$ и $\mathrm{Tr}\Big(\sum u \otimes t\Big) = \sum \mathrm{Tr}(\bar{u})t$. Из определения отображения Tr следует, что оно удовлетворяет свойству $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)\ \forall a, b \in \widetilde{F}\langle X\rangle$. Четверка $\big(\widetilde{F}\langle X\rangle, T\langle X\rangle, \theta, \mathrm{Tr}\big)$ является алгеброй со следом, которая называется *свободной алгеброй со следом*, порожденной множеством X. После отождествления алгебр $F^\sharp\langle X\rangle \otimes 1$ и $F^\sharp\langle X\rangle$ получаем включение

$$X \subset F^\sharp\langle X\rangle \subset \widetilde{F}\langle X\rangle.$$

Название «свободная алгебра со следом» объясняется тем, что для произвольной алгебры со следом A отображение множеств $X \to A$ может быть единственным образом продолжено до гомоморфизма алгебр со следом $\widetilde{F}\langle X\rangle \to A$.

Произвольный элемент $f \in \widetilde{F}\langle X\rangle$ однозначно можно представить в виде F-линейной комбинации элементов $\mathrm{Tr}(1)^s u_0\,\mathrm{Tr}(u_1)\dots\mathrm{Tr}(u_n)$, где $u_0 \in \langle X\rangle$, $u_1, \dots, u_n \in \langle X\rangle \setminus \{1\}$, $n, s \geq 0$. Элементы алгебры $\widetilde{F}\langle X\rangle$ называются *полиномами со следом.*

Пусть A — алгебра со следом, $\tilde f = \tilde f(x_1, \dots, x_m) \in \widetilde F\langle X\rangle$. Будем говорить, что алгебра A *удовлетворяет тождеству со следом* $\tilde f = 0$, если для произвольных $a_1, \dots, a_n \in A$ в алгебре A выполнено равенство $\tilde f(a_1, \dots, a_m) = 0$. Идеал

$$\widetilde T[A] = \{\tilde f \in \widetilde F\langle X\rangle \mid \tilde f = 0 \text{ — тождество со следом алгебры} A\}$$

называется *идеалом тождеств со следом алгебры* A. Очевидно, что идеал тождеств со следом произвольной алгебры содержит идеал обычных тождеств этой алгебры.

Далее будем рассматривать только алгебры со следом, удовлетворяющие тождеству нулевой степени $\mathrm{Tr}(1) = \gamma$, $\gamma \in F$. Обозначим через $\widetilde P_m$ множество всех полилинейных полиномов со следом степени m, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_m$ и являющихся линейной комбинацией слагаемых $u_0 \,\mathrm{Tr}(u_1) \dots \mathrm{Tr}(u_n)$, где $u_0 \in \langle X\rangle$, $u_1, \dots, u_n \in \langle X\rangle \setminus \{1\}$, $n, s \geq 0$. Пусть FS_{m+1} — групповая алгебра (над F) симметрической группы S_{m+1}, действующей на множестве $\{0, 1, \dots, m\}$. Определим F-линейное отображение $\tilde\lambda_m : \widetilde P_m \to FS_{m+1}$, полагая

$$\tilde\lambda_m(x_{i_1} \dots x_{i_s} \,\mathrm{Tr}(x_{j_1} \dots x_{j_t}) \,\mathrm{Tr}(x_{k_1} \dots x_{k_l}) \dots) = \sigma \in S_{m+1},$$

где σ — перестановка, которая раскладывается на независимые циклы следующим образом:

$$\sigma = (0, i_1, \dots, i_s)(j_1, \dots, j_t)(k_1, \dots, k_l) \dots .$$

При этом символ 0 играет роль метки, отделяющей неследовую часть монома. Из определения свободной алгебры со следом вытекает, что $\tilde\lambda_m$ является изоморфизмом линейных пространств.

Алгебра $M_{n,k}$ превращается в алгебру со следом, если положить

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(D),$$

где $\mathrm{Tr}(A)$ и $\mathrm{Tr}(D)$ — суммы диагональных элементов матриц A и D. При этом $\mathrm{Tr}(1) = n - k$.

Обозначим через $D_{n+1,k+1}$ минимальный двусторонний идеал алгебры FS_{nk+n+k}, соответствующий прямоугольной диаграмме Юнга из $n+1$ строк и $k+1$ столбцов.

Идеал тождеств со следом алгебр $M_{n,k}$ над полями нулевой характеристики найден Ю. П. Размысловым в [3]. В работе [4] предложено более короткое доказательство, основанное на других идеях. Следующая теорема содержит описание базиса тождеств со следом алгебры $M_{n,k}$.

Теорема 2 [3, 4]**.** *Пусть поле F имеет нулевую характеристику. Тогда*

1. *Для каждого m множество $\tilde\lambda_m(\widetilde T[M_{n,k}] \cap \widetilde P_m)$ является двусторонним идеалом алгебры FS_{m+1}. Этот идеал является суммой минимальных двусторонних идеалов, соответствующих тем диаграммам Юнга, которые содержат $D_{n+1,k+1}$ в качестве поддиаграммы.*

2. *Идеал $\widetilde T[M_{n,k}]$ порождается (как идеал тождеств со следом) тождеством нулевой степени $\mathrm{Tr}(1) = n - k$ и тождествами степени $nk+n+k$ из пространства $\widetilde T[M_{n,k}] \cap \widetilde P_{nk+n+k}$.*

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим в групповой алгебре FS_{m+1} при $m + 1 = (n+1)(k+1)$ центральный идемпотент $e_{n+1,k+1}$, соответствующий прямоугольной диаграмме Юнга $D_{n+1,k+1}$. Перестановки, имеющие одинаковые цикловые структуры, входят в запись $e_{n+1,k+1}$ с равными коэффициентами. Пусть s — минимальное число такое, что существует перестановка, раскладывающаяся в произведение $s+1$ независимых циклов и входящая в запись $e_{n+1,k+1}$ с ненулевым коэффициентом. Тогда все перестановки, раскладывающиеся в произведение не более чем s независимых циклов, входят в запись $e_{n+1,k+1}$ с нулевыми коэффициентами. Построим тождество алгебры $M_{n,k}$ степени $2(nk+n+k)-s$.

Рассмотрим полином со следом

$$\tilde{f}(x_1,\dots,x_m) = \tilde{\lambda}_m^{-1}(e_{n+1,k+1}\cdot(012\dots s)).$$

Из теоремы 2 следует, что $\tilde{f}\in\widetilde{T}[M_{n,k}]$. Легко видеть, что полином $\tilde{f}(x_1,\dots,x_m)$ симметричен по переменным $x_{s+1},\dots,x_m$. Кроме того, обычная (неследовая) часть полинома $\tilde{f}$ не равна нулю. В самом деле, из определения числа s немедленно вытекает, что в запись $e_{n+1,k+1}$ с ненулевым коэффициентом входит некоторая перестановка вида $(0A_0)(1A_1)(2A_2)\dots(sA_s)$ (некоторые из блоков $A_0,\dots,A_s$ могут быть пустыми). Но тогда полином $\tilde{f}$ содержит с ненулевым коэффициентом моном

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_m^{-1}((0A_0)(1A_1)(2A_2)\dots(sA_s)\cdot(012\dots s)) &= \tilde{\lambda}_m^{-1}((0A_1 1A_2 2\dots A_s s A_0))\\ &= x_{A_1}x_1x_{A_2}x_2\dots x_{A_s}x_sx_{A_0},\end{aligned}$$

где обозначено $x_{i_1\dots i_l}=x_{i_1}\dots x_{i_l}$.

Рассмотрим полином

$$\tilde{g}(x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_{2l}) = \sum_{\pi\in S_{2l}}\tilde{f}(x_1,\dots,x_s,[y_{\pi(1)},y_{\pi(2)}],\dots,[y_{\pi(2l-1)},y_{\pi(2l)}]),$$

где $l=nk+n+k-s$.

Так как $\tilde{g}$ является следствием $\tilde{f}$, то $\tilde{g}$ — тождество со следом алгебры $M_{n,k}$. Покажем, что на самом деле $\tilde{g}$ имеет нулевую следовую часть, а его неследовая (обычная) часть отлична от нуля. Отсюда будет следовать, что $\tilde{g}$ — искомое обычное тождество алгебры $M_{n,k}$ степени $2(nk+n+k)-s$.

Легко видеть, что неследовая часть полинома $\tilde{f}$ является линейной комбинацией слагаемых вида

$$\operatorname{Lin}(x^{\alpha_0}x_1x^{\alpha_1}x_2\dots x^{\alpha_{s-1}}x_sx^{\alpha_s}),\quad \alpha_0,\dots,\alpha_s\ge 0, \tag{1}$$

где Lin — оператор полной линеаризации, «расклеивающий» переменную x в переменные $x_{s+1},\dots,x_m$. Сделаем три замечания. Во-первых, как показано выше, некоторое слагаемое вида (1) входит в запись $\tilde{f}$ с ненулевым коэффициентом. Во-вторых, при $(\alpha_0,\dots,\alpha_s)\ne(\beta_0,\dots,\beta_s)$ полиномы

$$\sum_{\pi\in S_{2l}}\operatorname{Lin}(x^{\alpha_0}x_1x^{\alpha_1}x_2\dots x^{\alpha_{s-1}}x_sx^{\alpha_s})(x_1,\dots,x_s,[y_{\pi(1)},y_{\pi(2)}],\dots,[y_{\pi(2l-1)},y_{\pi(2l)}]),$$

$$\sum_{\pi\in S_{2l}}\operatorname{Lin}(x^{\beta_0}x_1x^{\beta_1}x_2\dots x^{\beta_{s-1}}x_sx^{\beta_s})(x_1,\dots,x_s,[y_{\pi(1)},y_{\pi(2)}],\dots,[y_{\pi(2l-1)},y_{\pi(2l)}])$$

удовлетворяют свойству: никакой моном не может входить в запись сразу двух этих полиномов с ненулевыми коэффициентами. В-третьих, эти полиномы не равны нулю, так как, например, при подстановке $x_1=x_2=\dots=x_s=1$ получаются стандартные полиномы степени $2l$, умноженные на 2^l. Из этих трех замечаний вытекает, что неследовая (обычная) часть полинома $\tilde{g}$ не равна нулю.

Покажем, что каждый моном со следом, входящий в запись $\tilde{f}$ с ненулевым коэффициентом, имеет вид $m_0 \operatorname{Tr}(m_1) \dots \operatorname{Tr}(m_t)$, $t > 0$, где хотя бы один из мономов $m_1, \dots, m_t$ не зависит от переменных из множества $\{x_1, \dots, x_s\}$. Это равносильно тому, что каждая перестановка, отличная от цикла длины $m+1$ и входящая в запись $e_{n+1,k+1} \cdot (01 \dots s)$ с ненулевым коэффициентом, содержит цикл, не содержащий ни одного элемента множества $\{0, 1, \dots, s\}$. Таким образом, достаточно показать, что при $q > 1$ любая перестановка вида $c_1 c_2 \dots c_q \cdot (0s \dots 21)$, где $c_1, c_2, \dots, c_q$ — независимые циклы суммарной длины $m+1$, каждый из которых содержит хотя бы один из элементов множества $\{0, 1, \dots, s\}$, входит в запись $e_{n+1,k+1}$ с нулевым коэффициентом. Заметим, во-первых, что перестановка $c_1 c_2 \dots c_q \cdot (0s \dots 21)$ в своем разложении на независимые циклы имеет не более $s+1$ циклов, так как в каждый цикл в этом разложении входит хотя бы один из элементов $0, 1, \dots, s$. Во-вторых, перестановка $c_1 c_2 \dots c_q \cdot (0s \dots 21)$ не может иметь в своем разложении на независимые циклы ровно $s+1$ циклов: равенство $c_1 c_2 \dots c_q \cdot (0s \dots 21) = (0A_0)(1A_1) \dots (sA_s)$ равносильно равенству $c_1 \dots c_q = (0A_0)(1A_1) \dots (sA_s) \cdot (01 \dots s) = (0A_1 1A_2 \dots sA_0)$, откуда $q = 1$; противоречие с условием $q > 1$.

Так как полином со следом $\tilde{f}$ симметричен по переменным $x_{s+1}, \dots, x_m$ и каждый моном со следом, входящий в запись $\tilde{f}$ с ненулевым коэффициентом, содержит сомножитель $\operatorname{Tr}(m_t)$, не зависящий от $x_1, \dots, x_s$, то следовую часть полинома $\tilde{g}$ можно представить в виде линейной комбинации полиномов со следом

$$\Bigl(m_0 \operatorname{Tr}(m_1) \dots \operatorname{Tr}(m_{t-1}) \sum_{\sigma \in \operatorname{Sym}\{i_1, \dots, i_r\}} \operatorname{Tr}(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(r)})\Bigr)\Big|_{x_{i_1} = [y_{j_1}, y_{j_2}], \dots, x_{i_r} = [y_{j_{2r-1}}, y_{j_{2r}}]},$$

которые затем нужно прококососимметризовать по $j_1, j_2, \dots, j_{2r}$. Результат такой кососимметризации равен

$$2^r m_0 \operatorname{Tr}(m_1) \dots \operatorname{Tr}(m_{t-1}) \operatorname{Tr}(S_{2r}(j_1, \dots, j_{2r})),$$

где S_{2r} — стандартный полином степени $2r$. Но след от стандартного полинома четной степени равен нулю. Таким образом, следовая часть полинома $\tilde{g}$ равна нулю.

Для завершения доказательства осталось показать, что $s = \min\{n, k\}$. Для центрального примитивного идемпотента $e_{n+1,k+1}$ хорошо известна формула

$$e_{n+1,k+1} = \frac{\chi_{n+1,k+1}(1)}{(m+1)!} \sum_{\tau \in S_{m+1}} \chi_{n+1,k+1}(\tau^{-1})\tau, \tag{2}$$

где $\chi_{n+1,k+1}$ — характер представления группы S_{m+1}, соответствующий диаграмме Юнга $D_{n+1,k+1}$ (аналогичная формула верна для произвольных конечных групп).

Для вычислений значений характера $\chi_{n+1,k+1}$ на некоторых перестановках воспользуемся правилом Мурнагана — Накаямы: пусть $\rho\pi \in S_l$, где ρ — цикл длины r, π — перестановка остальных $l - r$ чисел, χ_D — характер, соответствующий диаграмме Юнга D. Тогда

$$\chi_D(\rho\pi) = \sum_{D'} \pm \chi_{D'}(\pi),$$

где суммирование ведется по всем диаграммам D', для которых $D \setminus D'$ является косым r-крюком. Выбор знаков $\pm$ в этой сумме нас интересовать не будет, хотя известно, чему они равны [5]. При этом пустая сумма интерпретируется как 0, а значение характера $\chi_0(\varnothing)$ (0 — пустая диаграмма) на перестановке из 0 элементов считается равным 1.

Сначала покажем, что $\chi_{n+1,k+1}(c_1c_2\dots c_q) \neq 0$, где c_i — цикл длины $n + k + 1 - 2(i-1)$, $q = \min\{n,k\} + 1$, циклы $c_1,\dots,c_q$ независимы. Отметим, что суммарная длина этих циклов как раз равна $(n+1)(k+1)$. Ясно, что 1) максимальная длина косого крюка в прямоугольной диаграмме Юнга размера $a \times b$ равна $a + b - 1$; 2) имеется ровно один косой крюк максимальной длины $a + b - 1$; 3) после его выкидывания остается прямоугольная диаграмма размера $(a-1)\times(b-1)$. Поэтому, многократно применяя правило Мурнагана — Накаямы, получаем

$$\chi_{n+1,k+1}(c_1c_2\dots c_q) = \pm\chi_{n,k}(c_2c_3\dots c_q) = \pm\chi_{n-1,k-1}(c_3\dots c_q) = \dots = \pm 1 \neq 0.$$

Покажем, что при $q \le \min\{n,k\}$ имеет место равенство

$$\chi_{n+1,k+1}(c_1c_2\dots c_q) = 0,$$

где $c_1c_2\dots c_q$ — произведение q независимых циклов. Для этого применим правило Мурнагана — Накаямы q раз. Для того чтобы в итоге получился не 0, необходимо, чтобы прямоугольная диаграмма $D_{n+1,k+1}$ покрывалась q косыми крюками. Но при $q \le \min\{n,k\}$ это невозможно. В самом деле, если рассмотреть диагонально идущие из угла диаграммы клетки (их как раз $\min\{n,k\}+1$), то никакие две из них не могут лежать в одном косом крюке.

Из двух последних утверждений и формулы (2) вытекает, что $s = \min\{n,k\}$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kemer A. R.* Ideal of identities of associative algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991 (Translations of Math. Monographs; V. 87).
2. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полной матричной алгебры над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, № 4. С. 723–756.
3. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом и центральные полиномы в матричных супералгебрах $M_{n,k}$ // Мат. сб. 1985. Т. 128, № 4. С. 194–215.
4. *Самойлов Л. М.* Новое доказательство теоремы Ю. П. Размыслова о тождествах матричной супералгебры // Фунд. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 4. С. 1121–1127.
5. *James G. D.* The representation theory of the symmetric groups. Berlin; New York: Springer-Verl., 1978 (Lect. Notes Math.; V. 682).

Статья поступила 19 февраля 2009 г.

Самойлов Леонид Михайлович
Ульяновский гос. университет,
факультет математики и информационных технологий,
ул Л. Толстого, 42, Ульяновск 432970
samoilov_l@rambler.ru