Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.5

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ДОПОЛНЕНИЙ ФРОБЕНИУСОВЫХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ

Е. И. Хухро

Аннотация. Предположим, что конечная группа G допускает фробениусову группу автоморфизмов BA с ядром B и дополнением A. Доказывается, что если N — BA-инвариантная нормальная подгруппа группы G такая, что $(|N|, |B|) = 1$ и $C_N(B) = 1$, то $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$. В качестве следствия в случае, когда $N = G$ — нильпотентная группа, неподвижные точки $C_{L(G)}(A)$ в присоединенном кольце Ли $L(G)$ описываются в терминах $C_G(A)$; в частности, эта ситуация возникает, когда GB также является группой Фробениуса (так что GBA — 2-фробениусова группа с необязательно взаимно простыми порядками групп G и A).

Ключевые слова: группа Фробениуса, автоморфизм, нильпотентная группа, присоединенное кольцо Ли.

Юрию Леонидовичу Ершову по случаю его 70-летия

1. Введение

Пусть группа A действует автоморфизмами на конечной группе G, и пусть N — A-инвариантная нормальная подгруппа из G. Как обычно, индуцированная группа автоморфизмов группы G/N обозначается той же буквой. Во многих ситуациях важно знать, накрываются ли неподвижные точки группы A в G/N неподвижными точками группы A в G, т. е. справедливо ли равенство

$$C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N. \tag{1}$$

Хорошо известно, что это равенство выполняется в случае, когда порядки групп G и A взаимно просты, но в общем случае оно может быть гарантировано только при дополнительных условиях. Например, в некоторых специальных случаях, когда и G, и A являются p-группами, равенство (1) доказано Томпсоном [1], Ивенсом [2] и автором [3]. Эти результаты связаны с тем, что некоторые абелевы секции являются свободными $\mathbb{F}_pA$-модулями.

В настоящей заметке свободные $\mathbb{F}_pA$-модули также используются для доказательства равенства (1) для не взаимно простых порядков групп A и G в случае, когда A — дополнение фробениусовой группы автоморфизмов BA группы G, для которой $(|N|, |B|) = 1$ и $C_N(B) = 1$ (теорема 1).

В качестве следствия в случае, когда $N = G$ — нильпотентная группа, неподвижные точки $C_{L(G)}(A)$ в присоединенном кольце Ли $L(G)$ описываются в терминах $C_G(A)$ (теорема 2). В частности, эта ситуация возникает, когда GB также является группой Фробениуса (так что GBA — 2-фробениусова группа с необязательно взаимно простыми порядками групп G и A). Соответствующее описание $C_{L(G)}(A)$ было недавно использовано в работе Н. Ю. Макаренко и П. Шумяцкого [4] о 2-фробениусовых группах, где положительно решается проблема В. Д. Мазурова 17.72(a) из «Коуровской тетради» [5].

2. Неподвижные точки над свободными модулями

Напомним, что для группы A и поля F *свободный FA-модуль размерности* n — это прямая сумма n экземпляров групповой алгебры FA, каждый из которых может рассматриваться как векторное пространство над F размерности $|A|$ с базисом $\{v_g \mid g \in A\}$, помеченным элементами группы A, на котором A действует в регулярном представлении: $v_g h = v_{gh}$.

Лемма 1. *Пусть A — группа автоморфизмов конечной группы G, а M — A-инвариантная элементарная абелева p-подгруппа из G. Если M, рассматриваемая как $\mathbb{F}_pA$-модуль, является свободным $\mathbb{F}_pA$-модулем, то $C_{G/M}(A) = C_G(A)M/M$.*

Доказательство. Этот факт можно было бы вывести из тривиальности первой группы когомологий $H^1(A, M) = 0$. В самом деле, условие $H^1(A, M) = 0$ эквивалентно тому, что все дополнения к M в естественном полупрямом произведении MA сопряжены (см., например, [6, 11.4.7]). Если $cM \in C_{G/M}(A)$, то A^c — другое дополнение к M в MA, и если $A^c = A^{am} = A^m$ для каких-то $a \in A$, $m \in M$, то $A^{cm^{-1}} = A$, откуда $[A, cm^{-1}] \in A \cap \langle c\rangle M = 1$, так что $cm^{-1} \in C_G(A) \cap cM$.

Существование требуемой неподвижной точки можно доказать напрямую, без ссылок на теорию когомологий. Сначала предположим, что M — одномерный свободный $\mathbb{F}_pA$-модуль, т. е. рассматриваемый как $\mathbb{F}_p$-пространство, M обладает базисом $\{e_g \mid g \in A\}$, который регулярно переставляется группой A: $e_g h = e_{gh}$ для $g, h \in A$. Пусть $cM \in C_{G/M}(A)$. Нужно найти $x \in M$, для которого $(cx)^h = c^h x^h = cx$ для всех $h \in A$, т. е. $[c, h]x^h = x$, что можно переписать в аддитивной записи так:

$$x - xh = [c, h] \quad \text{для всех } h \in A. \tag{2}$$

Пусть $[c, a] = \sum\limits_{g\in A} \alpha_g(a)e_g$ для $a \in A$. Из $c^{st} = (c^s)^t$ получаем формулу

$$\alpha_g(st) = \alpha_g(t) + \alpha_{gt^{-1}}(s),$$

из которой также следует

$$\alpha_g(h^{-1}g) = \alpha_g(g) + \alpha_1(h^{-1}) \tag{3}$$

и

$$0 = \alpha_g(g^{-1}g) = \alpha_g(g) + \alpha_1(g^{-1}),$$

откуда

$$\alpha_1(g^{-1}) = -\alpha_g(g). \tag{4}$$

Мы ищем $x = \sum\limits_{g\in A} x_g e_g$ с неизвестными коэффициентами x_g. Равенства (2) в координатах дают линейную систему $(|A| - 1)^2$ уравнений

$$x_g - x_h = \alpha_g(h^{-1}g); \quad g, h \in A,\ g \neq h. \tag{5}$$

Требуется показать, что система (5) совместна. Для этого надо показать, что если $\beta(g, h)$ такие коэффициенты, что соответствующая линейная комбинация строк матрицы коэффициентов системы (5) тривиальна, то правые части из (5) также удовлетворяют этой зависимости. Другими словами, если

$$\sum_h \beta(g, h) - \sum_h \beta(h, g) = 0 \quad \text{для каждого } g \in A, \tag{6}$$

то $\sum\limits_{g,h} \beta(g,h)\alpha_g(h^{-1}g) = 0$. Удобнее переписать (6) в следующем виде:

$$\sum_h \beta(g,h) = \sum_h \beta(h,g) \quad \text{для каждого } g \in A. \tag{7}$$

Используя формулы (3), (4), (7), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{g,h} \beta(g,h)\alpha_g(h^{-1}g) &= \sum_{g,h} \beta(g,h)(\alpha_g(g) + \alpha_1(h^{-1}))\\ &= \sum_{g,h} \beta(g,h)\alpha_g(g) + \sum_{g,h} \beta(g,h)\alpha_1(h^{-1})\\ &= \sum_g \alpha_g(g) \sum_h \beta(g,h) + \sum_h \alpha_1(h^{-1}) \sum_g \beta(g,h)\\ &= \sum_g \alpha_g(g) \sum_h \beta(g,h) - \sum_h \alpha_h(h) \sum_g \beta(g,h)\\ &= \sum_g \alpha_g(g) \sum_h \beta(h,g) - \sum_h \alpha_h(h) \sum_g \beta(g,h) = 0,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь предположим, что M обладает собственным одномерным свободным $\mathbb{F}_pA$-подмодулем M_1. Тогда M/M_1 также свободный $\mathbb{F}_pA$-модуль меньшей размерности, чем M. По индукции $C_{G/M}(A) = (C_{G/M_1}(A)M/M_1)/(M/M_1)$, и в силу одномерного случая это равно

$$((C_G(A)M_1/M_1)M/M_1)/(M/M_1) \cong C_G(A)M/M,$$

откуда следует требуемый результат. $\square$

Замечание 1. Вышеприведенное вычисление было фактически проведено в [3] для циклической группы A (а потому по индукции и для разрешимой группы A).

3. Фробениусовы группы автоморфизмов

Теорема 1. *Предположим, что конечная группа G допускает фробениусову группу автоморфизмов BA с ядром B и дополнением A. Если N — BA-инвариантная нормальная подгруппа из G такая, что $(|N|,|B|) = 1$ и $C_N(B) = 1$, то $C_{G/N}(A) = C_G(A)N/N$.*

Доказательство. В силу классификации из условий $(|N|,|B|) = 1$ и $C_N(B) = 1$ вытекает разрешимость группы N (см., например, [7]). Рассмотрим неуплотняемый BA-инвариантный нормальный ряд группы G:

$$G > N = N_1 > N_2 > \dots > N_k > N_{k+1} = 1, \tag{8}$$

соединяющий N с 1; его факторы N_i/N_{i+1} — элементарные абелевы группы. Каждый фактор V этого ряда можно рассматривать как $\mathbb{F}_pBA$-модуль для подходящего простого числа p. Мы продолжаем использовать централизаторные обозначения для неподвижных точек, например, $C_V(B) = \{v \in V \mid vb = v$ для всех $b \in B\}$.

Лемма 2. *Каждый фактор V ряда* (8) *является свободным $\mathbb{F}_pA$-модулем для соответствующего простого числа p.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $C_V(B) = 0$, так как $C_G(B) = 1$ в силу взаимной простоты действия группы B на G. Расширим основное поле $\mathbb{F}_p$ до его алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{F}}_p$, так что $\overline{V} = V \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ рассматривается как $\overline{\mathbb{F}}_pBA$-модуль. Заметим, что у нас также $C_{\overline{V}}(B) = 0$.

Если мы докажем, что $\overline{V}$ — свободный $\overline{\mathbb{F}}_pA$-модуль, то V также будет свободным $\mathbb{F}_pA$-модулем. В самом деле, по теореме Дойринга — Нётер [8, теорема 29.7] два представления над меньшим полем эквивалентны, если они эквивалентны над большим полем. Быть свободным $\overline{\mathbb{F}}_pA$-модулем, или свободным $\mathbb{F}_pA$-модулем, означает иметь базис как пространства над соответствующим полем, элементы которого переставляются группой A так, что все орбиты регулярны. В таком базисе группа A представляется соответствующими подстановочными матрицами, которые все определены над $\mathbb{F}_p$.

Рассмотрим неуплотняемый ряд $\overline{\mathbb{F}}_pBA$-подмодулей

$$\overline{V} = U_1 > U_2 > \cdots > U_l > U_{l+1} = 0, \tag{9}$$

в котором каждый фактор U_i/U_{i+1} является неприводимым $\overline{\mathbb{F}}_pBA$-модулем. Так как расширение свободного $\overline{\mathbb{F}}_pA$-модуля свободным $\overline{\mathbb{F}}_pA$-модулем снова является свободным $\overline{\mathbb{F}}_pA$-модулем, достаточно доказать, что каждый фактор U ряда (9) — свободный $\overline{\mathbb{F}}_pA$-модуль. Поскольку $C_{\overline{V}}(B) = 0$ и действие группы B взаимно просто (полупросто), также выполняется $C_U(B) = 0$; в частности, $B/C_B(U) \neq 1$, где $C_B(U) = \{b \in B \mid ub = u \text{ для всех } u \in U\}$ — ядро действия группы B на U.

Применяя теорему Клиффорда, разложим U в прямую сумму

$$U = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$$

компонент Веддербарна W_i, которые являются однородными $\overline{\mathbb{F}}_pB$-модулями, транзитивно переставляемыми группой A. Заметим, что ни один из W_i не является тривиальным $\overline{\mathbb{F}}_pB$-модулем, так как $C_U(B) = 0$.

Пусть A_1 — стабилизатор подмодуля W_1 при действии группы A подстановками на множестве $\{W_1, \ldots, W_t\}$. Если $A_1 = 1$, то A-орбита любого $\overline{\mathbb{F}}_p$-базиса из W_1 даст требуемый базис U, являющийся объединением нескольких регулярных A-орбит, так что U будет свободным $\overline{\mathbb{F}}_pA$-модулем. Но если $A_1 \neq 1$, то A_1 будет централизовать центр $Z(B/C_B(W_1))$, который представлен на W_1 скалярными матрицами. Этот центр нетривиален, потому что $B/C_B(W_1)$ — нетривиальная группа, которая нильпотентна как фактор-группа фробениусова ядра B. Поскольку действие группы A_1 на B взаимно просто, тогда получим нетривиальные неподвижные точки группы A_1 на B, а это противоречит условию, что BA — группа Фробениуса. $\square$

Завершим доказательство теоремы 1. По лемме 2 каждый фактор ряда (8) является свободным $\mathbb{F}_pA$-модулем для подходящего простого числа p. Теперь можно применить лемму 1 в несложной индукции по длине ряда (8), чтобы найти элемент из $C_G(A)$ в любом $gN \in C_{G/N}(A)$. Для $k > 1$ по индукции найдется $c_1N_k \in C_{G/N_k}(A) \cap gN/N_k$. По лемме 1, примененной с $M = N_k$, имеется искомый элемент $c \in C_G(A) \cap c_1N_k \subseteq C_G(A) \cap gN$. $\square$

Напомним, что *присоединенное кольцо Ли* $L(G)$ группы G определяется на аддитивно записанной прямой сумме $L(G) = \bigoplus_i \gamma_i/\gamma_{i+1}$, где $\gamma_i = \gamma_i(G)$

— члены нижнего центрального ряда; произведение Ли (обозначаемое коммутаторами) определяется для элементов слагаемых $\bar{a} = a + \gamma_{i+1} \in \gamma_i/\gamma_{i+1}$, $\bar{b} = b + \gamma_{j+1} \in \gamma_j/\gamma_{j+1}$ через групповые коммутаторы как $[\bar{a}, \bar{b}]_{\text{кольцо Ли}} = [a, b]_{\text{группа}} + \gamma_{i+j+1} \in \gamma_{i+j}/\gamma_{i+j+1}$, а затем распространяется по линейности. Действие какой-то группы A автоморфизмами на G индуцирует действие группы A автоморфизмами кольца Ли $L(G)$; соответствующее подкольцо неподвижных точек обозначается через $C_{L(G)}(A)$.

Теорема 2. *Предположим, что конечная нильпотентная группа G допускает фробениусову группу автоморфизмов BA с ядром B и дополнением A. Если $(|G|, |B|) = 1$ и $C_G(B) = 1$, то $C_{L(G)}(A) = \bigoplus\limits_i C_{\gamma_i}(A)\gamma_{i+1}/\gamma_{i+1}$.*

Доказательство. Из определения присоединенного кольца Ли следует, что
$$C_{L(G)}(A) = \bigoplus_i C_{\gamma_i/\gamma_{i+1}}(A).$$
В силу условий $(|G|, |B|) = 1$ и $C_G(B) = 1$ можно применить теорему 1, по которой $C_{\gamma_i/\gamma_{i+1}}(A) = C_{\gamma_i}(A)\gamma_{i+1}/\gamma_{i+1}$ для каждого i. $\square$

Среди различных свойств подгруппы $C_G(A)$, которые подкольцо $C_{L(G)}(A)$ должно наследовать в условиях теоремы 2 (собственно, даже просто когда имеет место ее заключение), отметим ступени нильпотентности и разрешимости.

Следствие. *В условиях теоремы 2 ступень нильпотентности и разрешимости подкольца неподвижных точек $C_{L(G)}(A)$ индуцированной группы автоморфизмов A не превосходит соответственно ступени нильпотентности и разрешимости централизатора $C_G(A)$.*

Доказательство. Из определения произведения Ли в $L(G)$ следует, что любой лиев коммутатор (любого веса) от элементов из факторов γ_i/γ_{i+1} равен образу такого же группового коммутатора в соответствующем факторе нижнего центрального ряда. Пусть c — ступень нильпотентности группы $C_G(A)$; тогда любой групповой коммутатор веса $c+1$ от элементов из $C_G(A)$ тривиален; значит, любой лиев коммутатор веса $c+1$ от элементов из $C_{\gamma_i}(A)\gamma_{i+1}/\gamma_{i+1}$ также тривиален. Поскольку тождество $[x_1, x_2, \dots, x_{c+1}] = 0$ полилинейно и
$$C_{L(G)}(A) = \bigoplus C_{\gamma_i}(A)\gamma_{i+1}/\gamma_{i+1}$$
по теореме 2, это подкольцо нильпотентно ступени не выше c.

Пусть d — ступень разрешимости группы $C_G(A)$. Пусть $\delta_d = 0$ — известное полилинейное коммутаторное тождество от 2^d переменных, задающее разрешимость ступени $\leq d$. Как и выше, этому тождеству удовлетворяют элементы из $C_{\gamma_i}(A)\gamma_{i+1}/\gamma_{i+1}$. Поэтому по той же причине оно также выполняется на $C_{L(G)}(A) = \bigoplus C_{\gamma_i}(A)\gamma_{i+1}/\gamma_{i+1}$. $\square$

Замечание 2. Условия теоремы 2 выполняются в случае, когда GBA — 2-фробениусова группа, т. е. когда G — нормальная подгруппа, GB — фробениусова группа с ядром G и дополнением B, а BA — фробениусова группа с ядром B и дополнением A; при этом порядки G и A не предполагаются взаимно простыми.

Примечание при корректуре. Как заметил П. Шумяцкий, в теоремах 1, 2 условие взаимной простоты порядков можно опустить.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thompson J. G.* Fixed points of p-groups acting on p-groups // Math. Z. 1964. Bd 86. S. 12–13.
2. *Evens L.*, On a theorem of Thompson on fixed points of groups acting on p-groups // Math. Z. 1966. Bd 93. S. 105–108.
3. *Хухро Е. И.* Неподвижные точки p-автоморфизмов конечных p-групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 6. С. 697–703.
4. *Makarenko N. Yu., Shumyatsky P.* Frobenius groups as groups of automorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. (To appear).
5. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. http://math.nsc.ru/ alglog/17kt.pdf.
6. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York; Berlin: Springer-Verl., 1982.
7. *Rowley P.* Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism group // J. Algebra. 1995. V. 174. P. 724–727.
8. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 9 февраля 2010 г.

Хухро Евгений Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
khukhro@yahoo.co.uk