Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.9+532.59

ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

В. И. Налимов

Аннотация. В линейной постановке рассматривается трехмерная задача об обтекании неровностей дна стационарным потоком капиллярной тяжелой идеальной несжимаемой безвихревой жидкостью со свободной поверхностью. Для быстрых околокритических течений выведено приближенное уравнение на возвышение свободной поверхности. В виде контурных интегралов найдено фундаментальное решение задачи и установлено его асимптотическое поведение на больших расстояниях от начала координат.

Ключевые слова: поверхностные волны, капиллярность.

Предполагается, что на донное препятствие набегает поток средней глубины H капиллярной жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ_0, имеющий скорость v при $x_1 \to -\infty$. В работе приведено представление фундаментального решения задачи для быстрых околокритических течений. Найдены асимптотики его и обобщенных собственных функций для больших расстояний от начала координат.

1. Постановка задачи. В линейном приближении задача о стационарных поверхностных волнах над неровным дном сводится [1] к отысканию потенциала $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ и возвышения свободной поверхности $u(x_1, x_2)$ из системы уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = 0 \quad (-\infty < x_1, x_2 < \infty,\ -1 < x_3 < 0),\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - \sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \sqrt{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + u = 0 \quad (x_3 = 0),\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \sqrt{\lambda}\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (x_3 = -1).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — безразмерные пространственные переменные, $\lambda = \frac{v^2}{gH}$ (g — ускорение силы тяжести), $\sigma = \frac{\sigma_0}{gH^2}$ — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, $x_3 = -1 + h(x_1, x_2)$ — форма дна.

Замечание. Всюду ниже мы считаем, что форма дна мало отличается от плоскости $x_3 = -1$ и поэтому условие непротекания на дне сносится на плоскость $x_3 = -1$.

Пусть далее оператор «крышка» обозначает преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx \quad (x, \xi \in \mathbb{R}_n).$$

Псевдодифференциальный оператор $A(D)$ с символом $A(\xi)$ определяется равенством

$$\widehat{A(D)f}(\xi) = A(\xi)\hat{f}(\xi).$$

С помощью преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2 нетрудно убедиться, что задача (1) сводится к нахождению решения псевдодифференциального уравнения

$$-(1-\sigma\Delta)|\nabla|\operatorname{th}|\nabla|u + \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \sqrt{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}|\nabla|^{-1}(\operatorname{ch}|\nabla|^{-1})h,$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$, Δ — оператор Лапласа по переменным x_1 и x_2.

2. Приближение мелкой воды. Положим $\sigma = \frac{1}{\delta^2}$ и введем новые переменные $x' = \delta x$, $h = \delta h'$. В результате будем иметь (штрихи опущены)

$$+(1-\Delta)|\nabla|\delta^{-1}\operatorname{th}(\delta|\nabla|)u + \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \sqrt{\lambda}|\nabla|^{-1}(\operatorname{ch}\delta|\nabla|)^{-1}\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}. \qquad (2)$$

Устремив δ к нулю, получим приближение мелкой воды (линейное приближение Буссинеска)

$$-(1-\Delta)\Delta u + \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \sqrt{\lambda}|\nabla|^{-1}\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}. \qquad (3)$$

3. Быстрые течения, близкие к критическим. Положим $\lambda = 1 + \varepsilon^2$, $x_1' = \varepsilon x_1$, $x_2' = \varepsilon^2 x_2$, $h' = \varepsilon^3 h$. После подстановки в приближение мелкой воды (3) с точностью до членов второго порядка малости по ε получим уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\right|h, \qquad (4)$$

которое будет изучаться ниже.

4. Представление решения уравнения (4). Пусть $l(\xi) = \xi_1^4 - \xi_1^2 + \xi_2^2$ — символ дифференциального оператора из левой части уравнения (4). Обозначим через γ на плоскости ξ дисперсионную кривую $l(\xi) = 0$ или

$$\xi_2 = \pm\xi_1\sqrt{1-\xi_1^2} \quad (-1 \le \xi_1 \le 1).$$

Часть кривой, лежащую в правой (левой) полуплоскости, обозначим через γ_r (γ_l). В полярных координатах $\xi_1 = \rho\cos\varphi$, $\xi_2 = \rho\sin\varphi$ кривые γ_r, γ_l имеют вид

$$\rho^2 = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi\right).$$

Пусть, далее, кривая γ^* определяется уравнением $l(i\xi) = 0$ ($i = \sqrt{-1}$), или $\xi_1^4 + \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$, или

$$\xi_2 = \pm\xi_1\sqrt{1+\xi_1^2} \quad (-\infty < \xi_1 < \infty).$$

Через γ_B^* и γ_H^* будем обозначать части кривой γ^*, лежащие в верхних и нижних полуплоскостях соответственно. В полярных координатах эти кривые имеют вид

$$\rho^2 = -\frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi} \quad \left(\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi \le \varphi \le \frac{7}{4}\pi\right).$$

Замечание. Для обеих кривых γ и γ^* элемент длины дуги в полярных координатах имеет вид

$$dS = \frac{m(\cos\varphi, \sin\varphi)}{\rho(\varphi)|\cos\varphi|^5}\, d\varphi, \quad \rho(\varphi) = \frac{|\cos^2\varphi|^{1/2}}{\cos^2\varphi}, \tag{5}$$

где $m(\cos\varphi, \sin\varphi) = ((\cos 2\varphi - \sin^2\varphi)^2 \cos^2\varphi + 4\sin^6\varphi)^{1/2}$ и

$$C_1 \leq m(\cos\varphi, \sin\varphi) \leq C_2$$

с некоторыми положительными постоянными

5. Обобщенные собственные функции уравнения (4). Положим

$$J_1(x) = \operatorname{Im}\int\limits_{\gamma_r} e^{ix\cdot\xi}\, dS_\xi, \quad J_2(x) = \operatorname{Re}\int\limits_{\gamma_r} e^{ix\cdot\xi}\, dS_\xi.$$

Нетрудно убедиться, что собственные функции уравнения (4) имеют вид

$$J(x) = J_1(x) * f_1(x) + J_2(x) * f_2(x) \tag{6}$$

с произвольными обобщенными функциями $f_1(x)$, $f_2(x)$. Символом $*$ обозначена операция свертки. Отметим, что для произвольной кривой класса C^1

$$\int\limits_{\gamma} \widehat{e^{i\xi\cdot x}\, dS_\xi}(\xi) = \delta_\gamma(\xi),$$

символ справа обозначает δ-функцию, сосредоточенную на кривой γ:

$$(\delta_\gamma(\xi), \varphi) = \int\limits_{\gamma} \varphi(\xi)\, dS_\xi \quad (\varphi \in S(R_2)).$$

Замечание. У однородного уравнения (4) есть нетривиальные решения. Поэтому для выделения единственного решения необходимо условие на бесконечности. Мы будем предполагать, что вдоль почти любого луча $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$

$$u(x) = O(1/r) \quad (\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2). \tag{7}$$

6. Представление фундаментального решения уравнения (4). Положим $\widehat{E}(\xi) = -|\xi_1|/l(\xi)$ или, в полярных координатах,

$$\widehat{E}(\rho, \varphi) = \rho^{-1}|\cos\varphi|^{-3}\left(\rho^2 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}\right)^{-1}.$$

Тогда для любого решения уравнения (4)

$$\hat{u}(\xi) = \widehat{E}(\xi)\hat{h}(\xi) + \hat{f}(\xi)\delta_\gamma(\xi)$$

с произвольной функцией $\hat{f}$. Последнее слагаемое справа отвечает собственной функции уравнения (4). Следовательно,

$$u(x) = E(x) * h(x) + J(x)$$

с собственной функцией J вида (6).

Фундаментальное решение E восстановим при помощи обратного преобразования Фурье. Отметим, что для любой функции f ее обратное преобразование Фурье в полярных координатах можно записать в виде

$$f(r,\psi) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\infty} \rho \exp\{ir\rho\cos(\varphi-\psi)\hat{f}(\rho,\varphi)\, d\rho,$$

где α — произвольное число. Отсюда, если определить функцию $\widehat{E}$ для отрицательных значений ρ равенством $\widehat{E}(-\rho,\varphi) = \widehat{E}(\rho,\varphi+\pi)$ и положить $\alpha = -\pi/2+\psi$, получим

$$E(r,\psi) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{ir\rho\cos(\varphi-\psi)\} \left(\rho^2 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}\right)^{-1} d\rho.$$

Внутренний интеграл справа (он понимается в смысле главного значения при $\cos 2\varphi > 0$) можно вычислить с помощью теории вычетов, если продолжить подынтегральную функцию аналитически в верхнюю полуплоскость. Пусть $\sigma_2(\psi)$ и $\sigma_2(\psi)$ — множества точек отрезка $[\psi-\pi/2, \psi+\pi/2]$, для которых $\cos 2\varphi > 0$ и $\cos 2\varphi \le 0$ соответственно. Тогда E представимо в виде суммы $E_1 + E_2$, где

$$E_1(r,\psi) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int\limits_{\sigma_1(\psi)} |\cos\varphi|^{-3} \rho^{-1}(\varphi) \exp\{ir\rho(\varphi)\cos(\varphi-\psi)\}\, d\varphi,$$

$$E_2(r,\psi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma_2(\psi)} |\cos\varphi|^{-3} \rho^{-1}(\varphi) \exp\{-r\rho(\varphi)\cos(\varphi-\psi)\}\, d\varphi,$$

с функцией $\rho(\varphi)$, определенной в (5).

Обе функции $x \mapsto E_k(x)$, как можно видеть из приведенных формул, симметричны по обеим переменным x_1 и x_2:

$$E_k(-x_1,x_2) = E_k(x_1,x_2), \quad E_k(x_1,-x_2) = E_k(x_1,x_2),$$

поэтому достаточно знать их свойства в первой четверти.

Пусть $0 \le \psi \le \pi/2$. Представим функцию E_1 в виде контурного интеграла по дисперсионной кривой γ. Ориентируем обе ее ветви так, чтобы при обходе внутренность γ оставалась слева. Обозначим через $\gamma_r(a,b)$ (соответственно $\gamma_l(a,b)$) часть кривой γ_r (соответственно γ_l) с началом в точке a и концом в точке b.

Из определения функции E_1 и формулы (5) следует, что интеграл берется по части γ, лежащей в полуплоскости $\xi_2+\xi_1\operatorname{ctg}\psi \ge 0$. Положим $\nu(\xi) = \frac{\xi_1^2|\xi|}{m(\xi_1,\xi_2)}$, где $m(\xi_1,\xi_2) = \left(\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)^2 + 4\xi_1^6\right)^{1/2}$. Тогда при $0 \le \psi \le \pi/4$

$$E_1(x) = E_0(x), \quad \text{где } E_0(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma_r} e^{i\xi\cdot x} \nu(\xi)\, dS_\xi \tag{8}$$

или, в полярных координатах,

$$E_0(r,\psi) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} |\cos\varphi|^{-3} \rho^{-1}(\varphi) \exp\{ir\rho(\varphi)\cos(\varphi-\psi)\}\, d\varphi. \tag{9}$$

Функция E_0 определена для всех x. Она является обобщенной собственной функцией и обладает свойствами симметрии:

$$E_0(x_1, -x_2) = E_0(x_1, x_2), \quad E_0(-x_1, x_2) = -E_0(x_1, x_2),$$

которые легко выводятся из (8) и (9).

При $\psi > \pi/4$ обозначим через (a_1, a_2) точку пересечения кривой γ_l и прямой $\xi_2 + \xi_1 \operatorname{ctg} \psi = 0$, отличную от начала координат. Она имеет координаты

$$a_1(\psi) = \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \psi}, \quad a_2(\psi) = \operatorname{ctg} \psi \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \psi}.$$

Пусть $-a$ — точка, симметричная a относительно начала координат. Из определения функции E_1 вытекает, что при $\pi/4 < \psi \le \pi/2$

$$E_1(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \Big\{ \int\limits_{\gamma_r(0,-a)} + \int\limits_{\varphi_l(a,0)} \Big\} e^{i\xi \cdot x} \nu(\xi)\, dS_\xi. \tag{10}$$

Аналогично находится представление функции E_2 через контурные интегралы. Ориентируем кривые γ_B^* и γ_H^* так, чтобы при их обходе координата ξ_1 менялась от $-\infty$ до $+\infty$. Обозначим символами γ_{Br}^* и γ_{Hl}^* (соответственно γ_{Hr}^*) части кривых γ_B^* и γ_H^*, лежащие в правой или левой полуплоскости соответственно.

Если $\pi/4 \le \psi \le \pi/2$, то

$$E_2 = H_0, \quad \text{где } H_0(x) = \frac{1}{2\pi} \Big\{ \int\limits_{\gamma_{Bl}^*} + \int\limits_{\gamma_{Br}^*} \Big\} e^{-\xi \cdot x} \nu(\xi)\, dS_\xi. \tag{11}$$

Пусть $0 \le \psi < \pi/4$. Обозначим через $b = (b_1, b_2)$ отличную от начала координат O точку пересечения прямой $\xi_2 + \xi_1 \operatorname{ctg} \psi = 0$ и кривой γ_{Bl}^*, через $-b$ — симметричную ей точку относительно начала координат, а через $\pm\infty$ — бесконечно удаленные точки кривых γ_{Br}^* и γ_{Bl}^* соответственно. Точка b имеет координаты

$$b_1(\xi) = -\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \psi - 1}, \quad b_2(\xi) = \operatorname{ctg} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \psi - 1}.$$

Справедливо равенство

$$E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \Big\{ \int\limits_{\gamma_{Bl}^*(-\infty,b)} + \int\limits_{\gamma_{Br}^*(0,\infty)} + \int\limits_{\gamma_{Hr}^*(-b,0)} \Big\} e^{-\xi \cdot x} \nu(\xi)\, dS_\xi. \tag{12}$$

В остальных точках плоскости функции E_1 и E_2 определены условиями их четности по переменным x_1 и x_2.

Пусть α — точка кривой γ_r с декартовыми координатами $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, α^* — точка с координатами $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ и J_0 — обобщенная собственная функция, заданная равенством

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma_r(\alpha^*,\alpha)} e^{i\xi \cdot x} \nu(\xi)\, dS_\xi. \tag{13}$$

Функция J_0 четна по переменной x_2 и нечетна по переменной x_1: $J_0(x_1, -x_2) = J_0(x_1, x_2)$, $J_0(-x_1, x_2) = -J_0(x_1, x_2)$. Положим

$$E(x) = H_1(x) + E_2(x), \quad \text{где } H_1(x) = E_1(x) + J_0(x). \tag{14}$$

Покажем, что функция E, определенная этим равенством, удовлетворяет условиям (7) в левой полуплоскости, и найдем ее асимптотику в правой полуплоскости.

7. Асимптотика фундаментального решения задачи (4), (7). Для вычисления асимптотики собственных функций и фундаментального решения будут использоваться методы стационарной фазы и Лапласа [2, 3], приспособленные к нашему случаю. Метод стационарной фазы позволяет установить поведение при больших r интеграла

$$I(r) = \int\limits_a^b f(\theta) e^{irF(\theta)}\, d\theta$$

с достаточно гладкими функциями f и F. Хорошо известны следующие результаты. Пусть $F'(\theta) > 0$ для всех θ из отрезка $[a, b]$. Тогда

$$I(r) = O(1/r).$$

Пусть внутри отрезка есть единственная стационарная точка θ_0 такая, что $F'(\theta_0) = 0$ и $F''(\theta_0) \neq 0$. Тогда

$$I(r) = f(\theta_0)\left(\frac{2\pi}{r|F''(\theta_0)|}\right)^{1/2} \exp\{i(rF(\theta_0) + \operatorname{sgn} F''(\theta_0)\pi/4\} + O(1/r). \tag{15}$$

Если θ_0 совпадает с одним из концов отрезка, то перед первым слагаемым справа нужно поставить коэффициент $1/2$.

Предположим, что на одном из концов отрезка

$$F'(\theta_0) = F''(\theta_0) = 0, \quad F'''(\theta_0) \neq 0$$

и других стационарных точек нет. Если дополнительно $f'(\theta_0) = 0$, $F(\theta_0) = F^{IV}(\theta_0) = 0$, то

$$I(r) = f(\theta_0)\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{r|F'''(\theta_0)|}\right)^{1/3} \exp\{i(F(\theta_0) \pm \operatorname{sgn} F'''(\theta_0)\pi/4\} + O(1/r). \tag{16}$$

Знак плюс соответствует случаю $\theta_0 = a$, знак минус — случаю $\theta_0 = b$.

Применим эти формулы к интегралу

$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\int\limits_{\gamma(c_1,c_2)} e^{i\xi\cdot x}\nu(\xi)\, dS_\xi,$$

где c_1, c_2 — произвольные точки одной из кривых γ_r, γ_l. Перейдем к полярным координатам $x \mapsto (r, \psi)$ и параметризуем кривую γ_r (соответственно γ_l), положив $\xi_1 = \sin\theta$, $\xi_2 = -\sin\theta\cos\theta$ (соответственно $\xi_1 = -\sin\theta$, $\xi_2 = \sin\theta\cos\theta$), $0 \le \theta \le \pi$. Мы придем к интегралу

$$I(r) = \pm\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} e^{irF(\theta,\psi)}\mu(\theta)\, d\theta, \tag{17}$$

в котором знаки $\pm$ соответствуют кривым γ_r и γ_l, а $\mu(\theta) = \nu(\xi(\theta))(\cos^2\theta + \cos^2 2\theta)^{1/2}$ и

$$F(\theta, \psi) = \sin\theta(\cos\psi - \cos\theta\sin\psi). \tag{18}$$

Стационарные точки функции F находятся из уравнения

$$F_0(\theta,\psi)=\cos\theta\cos\psi-(2\cos^2\theta-1)\sin\psi=0,$$

которое легко решается. Пусть

$$Q(\psi)=\frac{1}{4\operatorname{tg}\psi}(1+\sqrt{1+8\operatorname{tg}^2\psi}),\quad R(\psi)=-\frac{2\operatorname{tg}\psi}{1+\sqrt{1+8\operatorname{tg}^2\psi}}.$$

Положим

$$\cos\theta_1(\psi)=\begin{cases} Q(\psi), & \pi/4\le\psi\le\pi/2,\ 3\pi/2\le\psi\le 7\pi/4,\\ R(\psi), & \pi/2<\psi\le 3\pi/2,\end{cases}$$

$$\cos\theta_2(\psi)=\begin{cases} R(\psi), & \pi/0<\psi\le\pi/2,\ 3\pi/2\le\psi\le 2\pi,\\ Q(\psi), & \pi/2<\psi\le 3\pi/4,\ 5\pi/4\le\psi<3\pi/2.\end{cases}$$

Эти равенства определяют непрерывные монотонно возрастающие функции

$$\theta_1:[\pi/4,7\pi/4]\to[0,\pi],\quad \theta_2:[0,5\pi/4]\cup[7\pi/4,2\pi]\to[0,\pi],$$

значения которых при каждом ψ являются стационарными точками функции (18). В соответствии с определением

$$\begin{gathered}\theta_1(\pi/4)=0,\quad \theta_1(\pi/2)=\pi/4,\quad \theta_1(3\pi/4)=\pi/3,\quad \theta_1(\pi)=\pi/2,\\ \theta_2(0)=\pi/2,\quad \theta_2(\pi/4)=2\pi/3,\quad \theta_2(\pi/2)=3\pi/4,\quad \theta_2(3\pi/4)=\pi.\end{gathered}\tag{19}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что стационарная точка θ_1 невырожденна при $\psi\ne\pm\pi/4$. Если же $\psi=\pm\pi/4$, то

$$F=F_\theta=F_{\theta\theta}=F_{\theta\theta\theta\theta}=0,\quad F_{\theta\theta\theta}=-3/\sqrt{2},\quad \mu_\theta=0.$$

Аналогично стационарная точка θ_2 невырожденна при $\psi\ne\pm 3\pi/4$, а если $\psi=\pm 3\pi/4$, то в этой точке θ_2 функция F, ее первая, вторая и четвертая производные обращаются в нуль, а $F_{\theta\theta\theta}=3/\sqrt{2}$ и $\mu_\theta=0$.

Применим полученные результаты для нахождения асимптотики функции H_1.

Лемма 1. *В левой полуплоскости $x_1<0$ при $\psi\ne\pm\pi/4$ справедливо утверждение:*

$$H_1(r,\psi)=O(1/r)\quad \text{вдоль любого луча } \psi=\mathrm{const}.\tag{20}$$

Если же $\psi=\pm 3\pi/4$, то

$$H_1(r,\psi)=-\frac{d}{r^{1/3}}+O(1/2),\quad \text{где } d=\frac{1}{12\pi}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{1/3}.\tag{21}$$

Доказательство. Поскольку функция H четна по x_2, мы можем ограничиться случаем $x_2\ge 0$. Пусть сначала $\pi\le\psi<3\pi/4$. Так как функция J_0 нечетна по x_1, из (10), (14) и определения (13) функции J_0 имеем

$$H_1(r,\psi)=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\Big\{\int\limits_{\gamma_r(0,\alpha^*)}+\int\limits_{\gamma_r(\alpha,0)}\Big\}e^{i\xi\cdot x}\nu(\xi)\,dS_\xi.$$

Отсюда после параметризации получим

$$H_1(r,\psi)=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left\{\int\limits_0^{\pi/4}+\int\limits_{3\pi/4}^{\pi}\right\}e^{irF(\theta,\psi)}\mu(\theta)\,d\theta.\tag{22}$$

Здесь мы учли, что точкам α^* и α после параметризации отвечают точки $\theta = \pi/4$ и $\theta = 3\pi/4$. Согласно формулам (19) для выбранных ψ функция F имеет единственную стационарную точку $\pi/3 < \theta_1 < \pi/2$. Поэтому интегралы в (22) не содержат стационарных точек и для таких ψ справедливо утверждение (20).

Пусть теперь $\pi/2 \leq \psi < 3\pi/4$. Докажем, что

$$I_0(x) = \Bigg\{ \int\limits_{\gamma_r(\alpha,0)} - \int\limits_{\gamma_r(0,\alpha^*)} \Bigg\} e^{i\xi\cdot x}\nu(\xi)\, dS_\xi = O(1/r). \tag{23}$$

С этой целью параметризуем кривую γ_r. После замены $\theta \to \theta+\pi$, $\psi \to 2\pi-\varphi$ в первом интеграле получим

$$I_0(r,\psi) = \int\limits_0^{\pi/4} \{e^{irF(\theta,\varphi)} - e^{irF(\theta,\psi)}\}\mu(\theta)\, d\theta. \tag{24}$$

Найдем стационарные точки первого интеграла. Так как $5\pi/4 < \varphi \leq 3\pi/2$, точка θ_1 находится из условия $\cos\theta_1(\varphi) = R(\varphi) = -\cos\theta_1(\psi)$, т. е. $\theta_1(\varphi) = \pi - \theta_1(\psi)$.

Аналогично $\theta_2(\varphi) = \pi - \theta_2(\psi)$. Отсюда

$$F(\theta_k(\varphi),\varphi) = F(\theta_k(\psi),\psi), \quad \mu(\theta_k(\varphi)) = \mu(\theta_k(\psi)).$$

Точно так же проверяется, что в соответствующих стационарных точках совпадают вторые производные функции F по θ. Следовательно, согласно формуле (15) оба интеграла в (24) имеют одинаковый главный член асимптотики, т. е. формула (23) верна.

Рассмотрим теперь функцию H_1. Поскольку J_0 нечетна по x_1, а сумма интегралов по дугам $\gamma_r(-c,0)$ и $\gamma_l(c,0)$ от мнимой части функции $\exp\{i\xi\cdot x\}\nu(\xi)$ равна нулю для любой точки c согласно (17), из определения (14) получим

$$H_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\Bigg\{ \int\limits_{\gamma_r(0,\alpha^*)} + \int\limits_{\gamma_r(\alpha\alpha,0)} -2\int\limits_{\gamma_r(-a,0)} \Bigg\} e^{i\xi\cdot x}\nu(\xi)\, dS_\xi.$$

Применяя формулу (23), будем иметь

$$H_1(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\Bigg\{ \int\limits_{\gamma_r(\alpha,0)} - \int\limits_{\gamma_r(-a,0)} \Bigg\} e^{i\xi\cdot x}\nu(\xi)\, dS_\xi + O(1/r).$$

Параметризуем кривую γ_r. Учитывая, что точке $-a$ отвечает значение θ, равное $\theta_0 = \arccos \operatorname{ctg}\psi$, придем к формуле

$$H_1(r,\psi) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\{ \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} - \int\limits_{\theta_0}^{\pi} \right\} e^{irF(\theta,\psi)}\mu(\theta)\, d\theta + O(1/r). \tag{25}$$

Для выбранных значений угла ψ имеем $\pi/2 < \theta_0(\psi) < \pi$, а две стационарные точки θ_1 и θ_2 функции F в соответствии с формулами (19) удовлетворяют неравенствам

$$\pi/4 < \theta_1(\psi) < \pi/3, \quad 3\pi/4 < \theta_2(\psi) < \pi.$$

Отметим, что $\theta_0(\psi) < \theta_2(\psi)$, поскольку $\cos\theta_0(\psi) > \cos\theta_2(\psi)$. Поэтому интегралы (25) не содержат стационарной точки θ_1, а разность двух интегралов сводится к интегралу либо по отрезку $[\pi/4, \theta_0]$, либо по отрезку $[\theta_0, \pi/4]$ в зависимости от того, больше или меньше θ_0 числа $\pi/4$. В обоих случаях эти отрезки не содержат θ_2 и поэтому справедлива асимптотика (20).

При $\psi = 3\pi/4$ функция H_1 задана равенством (22). Здесь единственной стационарной точкой функции F будет $\theta_2 = \pi$, причем выполнены все условия, необходимые для формулы (16). Требуемое асимптотическое представление следует из (16) и (22). $\square$

Рассмотрим функцию H_1 в правой полуплоскости. Так как она четна по x_2, достаточно изучить ее поведение в первой четверти плоскости. Для тех значений угла ψ, при которых определены функции θ_1 и θ_2, положим

$$\Phi_k(\psi) = F_k(\theta_k(\psi), \psi), \quad \varkappa_k(\psi) = |F_{\theta\theta}(\theta_k(\psi), \psi)|,$$

$$\mathrm{A}_k(\psi) = 2^{k-1}\mu(\theta_k(\psi), \psi)\left(\frac{1}{\pi\varkappa(\psi)}\right)^{1/2}, \quad \text{где } \psi \neq \frac{\pi}{4} \text{ при } k = 1.$$

Все эти величины вычисляются в явном виде. Они содержат некоторые рациональные функции от тригонометрических функций угла ψ. Однако получающиеся выражения весьма громоздки и поэтому здесь не приводятся.

Лемма 2. *Функция H_1 имеет в правой полуплоскости $x_1 \leq 0$ следующие асимптотики:*

$$\frac{1}{r^{1/2}}\mathrm{A}_2(\psi)\,\mathrm{Im}\exp\{i(r\Phi_2(\psi) - \pi/4)\} + O(1/r) \quad (-\pi/4 < \psi < \pi/4), \tag{26}$$

$$\frac{1}{r^{1/2}}\sum_{k=1}^{2}\mathrm{A}_k(\psi)\,\mathrm{Im}\exp\{i(r\Phi_k(\psi) + (-1)^k\pi/4)\} + O(1/r), \tag{27}$$

где $\pi/4 < \psi \leq \pi/2$ или $-\pi/2 \leq \psi < -\pi/4$,

$$-d/r^{1/3} + O(1/r^{2/3}) \quad (\psi = \pm\pi/4) \tag{28}$$

с постоянной d, определенной в формуле (21).

Доказательство. Предварительно заметим, что при $0 \leq \psi < \pi/4$ функция F имеет одну невырожденную стационарную точку θ_2 и согласно (19) $\pi/2 \leq \theta_1(\psi) < 2\pi/3$. Кроме того, $F_{\theta\theta} < 0$ при $\theta = \theta_2(\psi)$. Если же $\pi/4 < \psi < \pi/2$, то у функции F есть две невырожденные стационарные точки θ_1 и θ_2, причем $0 < \theta_1(\psi) < \pi/4$, $\pi/2 < \theta_2(\psi) < 2\pi/3$ и $(-1)^k F_{\theta\theta} < 0$ при $\theta = \theta_k(\psi)$.

Докажем асимптотику (26). Если $0 \leq \psi < \pi/4$, то функция H_1 определена равенствами (8) и (14). После параметризации γ_r получим

$$H_1(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\int\limits_0^{\pi} + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\right\} e^{irF(\theta,\psi)}\mu(\theta)\,d\theta.$$

Оба этих интеграла содержат единственную стационарную точку θ_2, лежащую внутри отрезков интегрирования. Применяя к ним асимптотическую формулу (15), получаем (26).

Обратимся к доказательству (27). Поскольку в этом случае функция H_1 определена формулой (14), после параметризации γ_r будем иметь

$$H_1(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{\theta_0}^{\pi} + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\right\} e^{irF(\theta,\psi)}\mu(\theta)\,d\theta. \tag{29}$$

Отсюда видно, что при $\psi < \pi/2$ второй интеграл содержит только одну стационарную точку θ_2, а первый — обе, причем они не совпадают. Все стационарные точки лежат внутри соответствующих отрезков интегрирования. Разбивая отрезок интегрирования в первом интеграле на два, каждый из которых имеет только одну стационарную точку, и применяя ко всем трем интегралам асимптотическую формулу (15), придем к утверждению (27).

Если $\psi = \pi/2$, то $\theta_0 = \pi$ в равенстве (29), а оба конца отрезка интегрирования второго интеграла являются невырожденными стационарными точками. Вычисления показывают, что в этом случае $H_1 = O(1/r)$, т. е. верна формула (27).

Соотношение (28) получается из формулы (29), верной при $\psi = \pi/4$. Первый интеграл дополнительно имеет вырожденную стационарную точку $\theta = \theta_1 = \pi$. Разбивая его надлежащим образом на два с единственной стационарной точкой и применяя формулы (15) и (16), получим (28). $\square$

При изучении асимптотического поведения функции E_2 будем опираться на метод Лапласа [2, 3] для исследования поведения интеграла

$$I(r) = \int\limits_a^\infty f(t)e^{-rS(t)}\,dt$$

при больших положительных значениях параметра. Приведем этот способ в виде, учитывающем специфику нашего случая. Будем предполагать, что f и S — достаточно гладкие функции, причем $S(a) \geq 0$ и $S'(t) > 0$ для всех $t > a$. Если $S'(a) > 0$, то $I(r) = O(1/r)$.

Если $S(t) = \lambda(t-a)^3 + O((t-a)^5)$ и $f(t) = f(a) + O((t-a)^3)$ при $t \sim a$, то справедлива формула

$$I(r) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\lambda r}\right)^{1/3} f(a) + O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{30}$$

Предполагается, что f — ограниченная функция.

Приступим к изучению функции E_2. Так как она четна по обеим переменным x_1 и x_2, достаточно рассмотреть ее в первой четверти. Заметим, что обе формулы (11) и (12), определяющие E_2, содержат интеграл по правой части γ_B^*, который мы обозначим через E_3. Если параметризовать γ_{Br}^* равенствами $\xi_1 = \operatorname{ch} t$, $\xi_2 = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$ $(t \geq 0)$ и положить

$$S_0(t,\psi) = \cos\psi \operatorname{sh} t(\operatorname{tg}\psi \operatorname{ch} t + 1), \quad \mu_1(t) = \nu(\xi(t))(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{ch}^2 2t)^{1/2},$$

то получим

$$E_3(r,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-rS_0(t,\psi)}\mu_1(t)\,dt.$$

Пусть $0 \leq \psi < \pi/4$. Обозначим через E_4 интеграл по левой части γ_B^*, входящий в определение (12) функции E_2. Параметризуя γ_{Bl}^* равенствами $\xi_1 = -\operatorname{sh} t$, $\xi_2 = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$ $(t \geq 0)$, положим

$$S(t,\psi) = \sin\psi \operatorname{sh} t(\operatorname{tg}\psi \operatorname{ch} t - 1).$$

В результате получим

$$E_4(r,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_0}^\infty e^{-rS(t,\psi)}\mu_1(t)\,dt,$$

где $t_0(\psi) = \operatorname{Arcch} \operatorname{ctg} \psi$.

Последний интеграл формулы (12), который мы обозначим через E_5, после параметризации $\xi_1 = \operatorname{sh} t$, $\xi_2 = -\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$ $(t \geq 0)$ примет вид

$$E_5(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} e^{rS(t,\psi)} \mu_1(t)\, dt.$$

Таким образом, получили, что

$$E_2 = E_3 + E_4 + E_5 \quad (0 \leq \psi < \pi/4),$$
$$E_2(r, \psi) = E_3(r, \psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-rS(t,\psi)} \mu_1(t)\, dt \quad (\pi/4 \leq \psi \leq \pi/2). \tag{31}$$

Лемма 3. *При* $0 \leq \psi \leq \pi/2$ *справедливы утверждения*

$$E_2(r, \psi) = O(1/r) \quad (\psi \neq \pi/4), \tag{32}$$

$$E_2(r, \psi) = 2d/r^{1/3} + O(1/r) \quad (\psi = \pi/4). \tag{33}$$

Доказательство. Очевидно, что при $0 \leq \psi \leq \pi/4$ функция S_0 удовлетворяет условиям, позволяющим к E_3 применить формулу (30). Поэтому $E_3 = O(1/r)$.

Пусть $0 \leq \psi \leq \pi/4$. Функция S отрицательна на интервале $(0, t_0)$, обращается в нуль на его концах и положительна при $t > t_0$. Заметим, что уравнение $S_t(t, \psi)$ относительно t имеет решение

$$t_1(\psi) = \operatorname{Arcch} \frac{1}{4}(\operatorname{ctg}^2 \psi + \sqrt{8 + \operatorname{ctg}^2 \psi}),$$

причем единственное. Поскольку $t_1(\psi) < t_0(\psi)$, частная производная S_t положительна для всех $t > t_1(\psi)$ и отрицательна для всех $0 \leq t < t_1(\psi)$. Отсюда $E_4 = O(1/r)$.

Представив интеграл E_5 в виде суммы двух интегралов по отрезкам $[0, t_1]$ и $[t_1, t_0]$, мы можем к каждому из них применить после необходимых изменений формулировки оценку (30). В результате получим $E_5 = O(1/r)$. Вместе с доказанными утверждениями будем иметь формулу (32).

При $\psi = \pi/4$ функция E_2 определена равенством (31). Нетрудно проверить, что при $t \sim 0$

$$S(t, \pi/4) = t^3/2\sqrt{2} + O(t^5), \quad \mu_1(t) = \sqrt{2/5} + O(t^3).$$

Так как производная S_t положительна при $t > 0$, мы можем к второму интегралу в (31) применить формулу (30) и после учета свойств E_3 получить утверждение (33). Объединяя все разобранные случаи, завершим доказательство леммы. $\square$

Теорема. *Пусть* (r, φ) *— полярные координаты точки* $x \in \mathbb{R}^2$. *Фундаментальное решение задачи* (4), (7), *определенное равенством* (14), *обладает следующими асимптотическими свойствами.*

1. *В левой полуплоскости* $x_1 < 0$

$$E(r, \psi) = O(1/r) \ (\psi \neq \pm 3\pi/4), \quad E(r, \pm 3\pi/4) = d/r^{1/3} + O(1/r) \tag{34}$$

с постоянной d из формулы (21).

2. *В правой полуплоскости $x_1 \geq 0$ асимптотика E при $\psi \neq \pm\pi/4$ дается формулами* (26), (27) *и*

$$E(r, \pm\pi/4) = \frac{d}{r^{1/3}} + O(1/r^{2/3}).$$

Доказательство теоремы очевидным образом получается из трех предыдущих лемм.

Необходимо сказать, что асимптотики (26), (27) и (34) являются неравномерными по углу ψ. Одна из причин этого состоит в том, что дисперсионная кривая не является дифференцируемым многообразием из-за наличия особой точки в начале координат.

Отметим также, что слагаемое H_1 в фундаментальном решении (14) можно разложить в сходящийся ряд по степеням r, а слагаемое E_2 имеет особенность в начале координат $r = 0$. Поэтому H_1 отвечает за асимптотику решения задачи, а E_2 — за его дифференциальные свойства. Иначе говоря, дисперсионная кривая γ определяет асимптотику решения, а кривая γ^* — его дифференциальные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 16 июня 2009 г.

Налимов Виктор Иванович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090