Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.956.2

МАКСИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ АБСТРАКТНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. Б. Шахмуров

Аннотация. Рассматривается задача с наклонной производной для эллиптического дифференциально-операторного уравнения. Получены условия, гарантирующие максимальную регулярность, фредгольмовость и положительность этой задачи в векторнозначных L_p-пространствах. Главная часть соответствующего дифференциального оператора несамосопряженна. Установлены дискретность спектра и полнота множества корневых элементов для соответствующего дифференциального оператора. Изучены приложения полученных результатов к анизотропным эллиптическим уравнениям.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциально-операторное уравнение, полнота корневых элементов, пространства функций со значениями в банаховом пространстве, операторнозначные мультипликаторы, интерполяция банаховых пространств, полугруппа операторов.

1. Введение, обозначения и предпосылки

В последние годы получено много приложений свойств максимальной регулярности краевых задач для дифференциально-операторных уравнений (ДОУ) к теории псевдодифференциальных уравнений и различным физическим процессам (см. [1–19]). В данной работе обсуждается максимальная L_p-регулярность краевых задач для эллиптических ДОУ с переменными старшими коэффициентами

$$
\begin{gathered}
Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} - A_\lambda(x)u(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = f(x), \quad x \in G, \\
L_\Gamma u = \left[\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial l} + \beta(x)u\right]_\Gamma = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

здесь Γ — граница области $G \subset \mathbb{R}^n$, l — некасательное направление на Γ, a_{ij}, α, β — комплекснозначные функции, $A_\lambda(x) = A(x) + \lambda$, где A и A_k — неограниченные линейные операторы в банаховом пространстве E.

Максимальная регулярность ДОУ в пространствах L_p изучалась в [1, 4, 5, 15–19]. Результаты из [4, 15–19] относятся к угловым областям и уравнениям, не содержащим смешанных производных в главной части. Более того, изучаемые в [1, 5] задачи включают только операторы с ограниченными коэффициентами.

В отличие от указанных работ здесь изучаются эллиптические задачи для операторов с неограниченными коэффициентами в общих областях с гладкой границей.

Будем говорить, что задача (1) *максимально L_p-регулярна* (или *сепарабельна* на L_p), если

(1) для любой $f \in L_p(G;E)$ существует единственное решение $u \in W_p^2(G; E(A), E)$ задачи (1) п. в. на G;

(2) существует положительная константа C, не зависящая от f, такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_p(G;E)} + \|Au\|_{L_p(G;E)} \leq C\|f\|_{L_p(G;E)}.$$

Пусть O — оператор, порожденный задачей (1), т. е.

$$D(O) = W_p^2(G; E(A), E, L_\Gamma) = \big\{u : u \in W_p^2(G;E) \cap L_p(G; E(A)), L_\Gamma u = 0\big\},$$
$$Ou = Lu.$$

Мы докажем максимальную L_p-регулярность задачи (1), которая будет вытекать из ограниченной обратимости O как оператора из L_p в $W_p^2(G; E(A), E)$. Кроме того, докажем, что оператор O положителен и порождает аналитическую полугруппу в L_p.

Поскольку (1) включает в себя оператор с неограниченными коэффициентами, становится затруднительным применять глобальные оценки для решений (1). Поэтому для доказательства того, что O обладает левым обратным и его множество значений совпадает с L_p, используем покрытие, сглаживание аргументов, представление решений, результаты для операторнозначных мультипликаторов Фурье, абстрактные теоремы вложения (теоремы A_1, A_2) и свойства сепарабельности локальных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами (на плоскости и полуплоскости). Применяя эти результаты вместе с качественными свойствами некоторых операторов вложения, мы докажем дискретность спектра и полноту множества корневых элементов оператора O. В качестве приложений установим корректность анизотропных эллиптических уравнений в $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, p)$, (т. е. лебеговых пространствах со смешанной нормой) и L_p-сепарабельность для бесконечных систем эллиптических уравнений.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 собраны определения и необходимые результаты, теоремы вложения для пространств Соболева — Лионса, свойства максимальной регулярности для эллиптических ДОУ на прямой и в полуплоскости и оценки аппроксимационных чисел. В разд. 3 представлены L_p-сепарабельность и фредгольмовость для (1). Наконец, разд. 4, 5 посвящены соответственно спектральным свойствам O и некоторым приложениям.

Банахово пространство E называют *UMD-пространством*, если гильбертов оператор

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

ограничен в $L_p(R, E)$, $p \in (1, \infty)$ (см., например, [20]). К UMD-пространствам относятся, например, пространства L_p, l_p и пространства Лоренца L_{pq}, $p, q \in (1, \infty)$.

Пусть $\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел и

$$S_\varphi = \{\lambda \in \mathbf{C}, |\arg \lambda| \leq \varphi\} \cup \{0\}, \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

Линейный оператор A называют *положительным* в банаховом пространстве E с константой $M > 0$, если $D(A)$ плотно в E и

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq M(1 + |\lambda|)^{-1}$$

с $\lambda \in S_\varphi$, $\varphi \in [0,\pi)$, где I — тождественный оператор в E и $L(E)$ — пространство всех ограниченных линейных операторов в E. Иногда вместо $A+\lambda I$ будем писать $A+\lambda$ и обозначать через A_λ. Известно [21, § 1.15.1], что существуют дробные степени A^θ положительного оператора A. Пусть $E(A^\theta)$ — пространство $D(A^\theta)$ с нормой графика

$$\|u\|_{E(A^\theta)} = (\|u\|^p + \|A^\theta u\|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,\ -\infty < \theta < \infty.$$

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства. Через $(E_1,E_2)_{\theta,p}$, $0<\theta<1$, $1 \le p \le \infty$, будем обозначать интерполяционные пространства, определяемые K-методом [21, § 1.3.1].

Множество $W \subset B(E_1,E_2)$ называют *R-ограниченным* (см. [5, 22]), если найдется константа $C>0$ такая, что для любых $T_1, T_2, \ldots, T_m \in W$ и $u_1, u_2, \ldots, u_m \in E_1$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\int\limits_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j u_j \right\|_{E_2} dy \le C \int\limits_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy,$$

где $\{r_j\}$ — последовательность независимых симметричных $\{-1,1\}$-значных случайных переменных на $[0,1]$.

Пусть $S(\mathbb{R}^n;E)$ — класс Шварца, т. е. пространство всех E-значных быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^n$. Пусть F — преобразование Фурье. Функцию $\Psi \in C(\mathbb{R}^n; B(E_1,E_2))$ называют *мультипликатором Фурье* из $L_p(\mathbb{R}^n;E_1)$ в $L_p(\mathbb{R}^n;E_2)$, если отображение $u \to \Lambda u = F^{-1}\Psi(\xi)Fu$, $u \in S(\mathbb{R}^n;E_1)$, определено и распространяемо до ограниченного линейного оператора

$$\Lambda : L_p(\mathbb{R}^n;E_1) \to L_p(\mathbb{R}^n;E_2).$$

Множество всех мультипликаторов из $L_p(\mathbb{R}^n;E_1)$ в $L_p(\mathbb{R}^n;E_2)$ будем обозначать через $M_p^p(E_1,E_2)$. Для $E_1=E_2=E$ используем обозначение $M_p^p(E)$.

Пусть $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, $\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\ldots\xi_n^{\beta_n}$, $U_n = \{\beta = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n),\ \beta_k \in \{0,1\}\}$.

Определение 1. Банахово пространство E называют пространством, *удовлетворяющим мультипликативному условию*, если для любой $\Psi \in C^{(n)}(\mathbb{R}^n; B(E))$ из R-ограниченности множества $\left\{\xi^\beta D_\xi^\beta \Psi(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0, \beta \in U_n\right\}$ вытекает, что Ψ является мультипликатором Фурье в $L_p(\mathbb{R}^n;E)$, т. е. $\Psi \in M_p^p(E)$ для любого $p \in (1,\infty)$.

Определение 2. φ-Положительный оператор A называют *R-положительным в банаховом пространстве* E, если существует $\varphi \in [0,\pi)$ такое, что

$$L_A = \{A(A+\xi)^{-1} : \xi \in S_\varphi\}$$

R-ограничено.

Линейный оператор $A(x)$ называют *положительным E равномерно относительно* x, если $D(A(x))$ не зависит от x, $D(A(x))$ плотно в E и

$$\|(A(x)+\lambda I)^{-1}\| \le \frac{M}{1+|\lambda|}$$

для всех $\lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in [0,\pi)$.

Обозначим через $\sigma_\infty(E_1,E_2)$ пространство компактных операторов, действующих из E_1 в E_2. Если $E_1=E_2=E$, то будем использовать обозначение

$\sigma_\infty(E)$. Пусть $s_j(A)$ и $d_j(A)$ — аппроксимационные числа (s-числа) и числа Колмогорова (d-числа) оператора A (см., например, [21, § 1.16.1]) соответственно. Пусть

$$\sigma_q(E_1,E_2)=\left\{A:A\in\sigma_\infty(E_1,E_2),\ \sum_{j=1}^{\infty}s_j^q(A)<\infty,\ 1\le q<\infty\right\}.$$

Пусть E_0 и E — банаховы пространства, причем E_0 непрерывно и плотно вложено в E. Пусть m — некоторое натуральное число.

Обозначим через $W_p^m(G;E_0,E)$ функциональное пространство, состоящее из всех функций $u\in L_p(G;E_0)$, имеющих обобщенные производные $D_k^m u=\frac{\partial^m u}{\partial x_k^m}$ такие, что $D_k^m u\in L_p(G;E)$, с нормой

$$\|u\|_{W_p^m(G;E_0,E)}=\|u\|_{L_p(G;E_0)}+\sum_{k=1}^{n}\|D_k^m u\|_{L_p(G;E)}<\infty.$$

Будем называть его *пространством типа Соболева — Лионса*. Если $E_0=E$, то пространство $W_p^m(G;E_0,E)$ будем обозначать через $W_p^m(G;E)$. Очевидно, что

$$W_p^m(G;E_0,E)=W_p^m(G;E)\cap L_p(G;E_0).$$

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ. Пространство $B^s_{p,p}(\Gamma;E_0,E)$ определим аналогично скалярному случаю как пространство следов $W_p^m(G;E_0,E)$ (см. [9, § 1.7.3] или [21, § 3.6.1]), т. е. для $E_0=E=\mathbf{C}$, заменяя пространство $L_p(\mathbb{R}^{n-1})$ пространством $L_p(\mathbb{R}^{n-1};E)$.

Теорема A$_1$ [19]. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *E — банахово пространство, удовлетворяющее мультипликативному условию относительно $p\in(1,\infty)$, и A — R-положительный оператор в E;*

(2) *$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ суть наборы из n неотрицательных целых чисел такие, что $\varkappa=\frac{|\alpha|}{m}\le 1$ и $0<h\le h_0<\infty$, $0<\mu\le 1-\varkappa$;*

(3) *$\Omega\in\mathbb{R}^n$ — область такая, что существует ограниченный линейный оператор продолжения из $W_p^m(G;E(A),E)$ в $W_p^m(\mathbb{R}^n;E(A),E)$.*

Тогда вложение $D^\alpha W_p^m(G;E(A),E)\subset L_p(G;E(A^{1-\varkappa-\mu}))$ непрерывно и найдется такая положительная константа C_μ, что

$$\|D^\alpha u\|_{L_p(G;E(A^{1-\varkappa-\mu}))}\le C_\mu[h^\mu\|u\|_{W_p^m(G;E(A),E)}+h^{-(1-\mu)}\|u\|_{L_p(G;E)}]$$

для любой $u\in W_p^m(G;E(A),E)$.

Теорема A$_2$. *Пусть выполнены все условия теоремы* A$_1$, *и пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $A^{-1}\in\sigma_\infty(E)$. Тогда для $0<\mu\le 1-\varkappa$ вложение $D^\alpha W_p^m(G;E(A),E)\subset L_p(G;E(A^{1-\varkappa-\mu}))$ компактно.*

Пусть

$$E_j=W_p^{2(1-\theta_j)}(\mathbb{R}^{n-1};(E(A),E)_{\theta_j,p},E),\quad \theta_j=\frac{pj+1}{2p}.$$

Положим $x^1=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$.

Теорема $\mathbf{A}_3$. *Отображения $u \to u^{(j)}(x^1, 0)$ являются линейными ограниченными операторами, действующими из $W_p^2(R_+^n; E(A), E)$ на E_j.*

Доказательство. В самом деле, ясно, что $W_p^2(R_+^n; E(A), E) = W_p^2(R_+; E_0, E_1)$, где $E_0 = W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E(A), E)$, $E_1 = L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)$. В силу [21, § 3.6.1] отображения $u \to u^{(j)}(x^1, 0)$ суть линейные ограниченные накрывающие операторы из $W_p^2(R_+^n; E(A), E)$ на

$$(E_0, E_1)_{\theta_j, p} = \left(W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E(A), E), L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)\right)_{\theta_j, p}.$$

Так как $W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E(A), E) = W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E) \cap L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E(A))$, получаем

$$(E_0, E_1)_{\theta_j, p} = \left(W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E), L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)\right)_{\theta_j, p} \cap (L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E(A)), L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E))_{\theta_j, p}.$$

Ввиду интерполяционности между $W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E)$, $L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)$ и $L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E(A))$ (см., например, [23; 21 § 1.18]) имеем

$$\left(W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E), L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)\right)_{\theta_j, p} = W_p^{2(1-\theta_j)}(\mathbb{R}^{n-1}; E),$$

$$(L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E(A)), L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E))_{\theta_j, p} = L_p(\mathbb{R}^{n-1}; (E(A), E)_{\theta_j, p}).$$

Последние равенства приводят к требуемому.

Рассмотрим сначала следующее ОДУ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$(L + \lambda)u = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} + (A + \lambda)u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Положим $L(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2$ для $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Теорема $\mathbf{A}_4$ [19]. *Пусть E — банахово пространство, удовлетворяющее мультипликативному условию относительно $p \in (1, \infty)$, A — R-положительный оператор в E для $\varphi \in [0, \pi)$ и*

$$|L(\xi)| \geq M \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2, \quad L(\xi) \in S(\varphi).$$

Тогда задача (2) имеет единственное решение $u \in W_p^2(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ для $f \in L_p(\mathbb{R}^n; E)$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$ и выполнена равномерная коэрцитивная оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| D_k^i u \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n; E)} + \|Au\|_{L_p(\mathbb{R}^n; E)} \leq M \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n; E)}.$$

Рассмотрим краевую задачу для ОДУ

$$(L + \lambda)u = \sum_{k=1}^{n} a_k D_k^2 u(x) + A_\lambda u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \tag{3}$$

$$L_k u = \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} u^{(j)}(x^1, 0) = f_k, \quad k = 1, 2,$$

где $m_k \in \{0, 1\}$, a, α_{kj} — комплексные числа и A — допустимый неограниченный оператор в E, $A_\lambda = A + \lambda$.

Пусть ω_j, $j = 1, 2$, — корни уравнения $a_n \omega^2 + 1 = 0$ и

$$L_0(\xi) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \xi_j^2,$$

$$F_k = \left(W_p^2(\mathbb{R}^{n-1}; E(A), E), L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)\right)_{\theta_k, p}, \quad \theta_k = \frac{p m_k + 1}{2p}, \quad k = 1, 2.$$

В силу [2] и теоремы о следе A_3 имеет место

Теорема $\mathbf{A}_5$. *Пусть E — банахово пространство, удовлетворяющее мультипликативному условию относительно $p \in (1,\infty)$, и A — R-положительный оператор в E с некоторым $\varphi \in [0,\pi)$. Пусть $|\arg\,\omega_1 - \pi| \le \frac{\pi}{2} - \varphi$, $|\arg\,\omega_2| \le \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\alpha_{km_k} \ne 0$ и*

$$|L_0(\xi)| \ge M \sum_{k=1}^{n-1} |\xi_k|^2, \quad L_0(\xi) \in S(\varphi).$$

Тогда оператор $u \to \{[L+\lambda]u, L_1 u, L_2 u\}$ является изоморфизмом (алгебраическим и топологическим) из $W_p^2(R_+^n; E(A), E)$ на $L_p(R_+^n; E) \times \prod_{k=1}^{2} F_k$. Более того, для $\lambda \in S(\varphi)$ с достаточно большим $|\lambda|$ выполнена равномерная коэрцитивная оценка

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| D_k^i u \right\|_{L_p(R_+^n;E)} + \|Au\|_{L_p(R_+^n;E)} \le M\left[\|f\|_{L_p(R_+^n;E)} + \sum_{k=1}^{2} (\|f_k\|_{F_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_E) \right].$$

Доказательство. Так как $L_p(R_+^n; E) = L_p(R_+; L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E))$, задача (3) может быть записана в виде

$$Lu = a_n D_{x_n}^2 u(x_n) + (B+\lambda)u = f_k(y), \quad L_k u = f_k, \quad k = 1,2,$$

где B — дифференциальный оператор в $L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)$, порожденный задачей (2). Ввиду [4, теорема 3.1] оператор B R-положителен в $L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)$. Согласно [1, теорема 4.5.2] из $L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E) \in UMD$ вытекает, что $E \in UMD$, $p \in (1,\infty)$. Кроме того, в силу [22] $L_p(\mathbb{R}^{n-1}; E)$ является пространством, удовлетворяющим мультипликативному условию. Тогда из [2, теорема 2] приходим к требуемому.

Теорема $\mathbf{A}_6$. *Пусть E_0 и E — банаховы пространства с базисом. Предположим, что*

$$s_j(I(E_0, E)) \sim j^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \gamma > 0,\ j = 1,2,\dots,\infty.$$

Тогда

$$s_j(I(W_p^m(G; E_0, E), L_p(G; E))) \sim j^{-1/(\gamma+\varkappa)}, \quad \varkappa = m/n.$$

Доказательство. Пусть

$$F = L_p(G) \otimes E, F_0 = W_p^m(G; E) \cap L_p(G; E_0).$$

Так как $F_0 = W_p^m(G) \otimes E \cap L_p(G) \otimes E_0$, где $E_1 \otimes E_2$ — тензорное произведение пространств E_1 и E_2, оператор вложения B можно представить в виде

$$B = B_2 \otimes I_1 + I_2 \otimes B_1,$$

где B_1 и B_2 — операторы вложения из E_0 в E и из $W_p^m(G)$ в $L_p(G)$ соответственно; I_1 и I_2 — тождественные операторы в пространствах E и $L_p(G)$ соответственно. Кроме того, конечномерные операторы из F_0 в F могут быть представлены в виде

$$K = K_2 \otimes I_1 + I_2 \otimes K_1.$$

Пусть $\{e_k\}, \{g_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, суть базисы соответственно в пространствах E_0 и $W_p^m(G)$. Тогда система $\{g_k \otimes e_j\}$ является базисом в $W_p^m(G; E)$. Из свойств тензорного произведения для $u \in F_0$ имеем

$$u = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} g_i \otimes e_j.$$

В силу [21, § 1.16.1; 21, § 3.8.1] получаем

$$s_j(B(F_0, F)) = \inf_{\dim K \le j} \sup_{\|u\| \le 1} \|(B - K)u\|_F$$

$$\le \inf_{\dim K \le j} \sup_{\|u\| \le 1} \|[(B_2 - K_2) \otimes I_1]u + [I_2 \otimes (B_1 - K_1)]u\|_F$$

$$\le \inf_{\dim K \le j} \sup_{\|u\| \le 1} \left\| \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} (B_1 - K_1) g_i \otimes e_j \right\|_F + \inf_{\dim K \le j} \sup_{\|u\| \le 1} \left\| \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} (B_1 - K_1) e_j \otimes g_i \right\|_F$$

$$\le C(j^{-1/\varkappa} + j^{-1/\gamma}) \le C j^{-\frac{1}{\varkappa + \gamma}}. \quad (4)$$

Оценим d-числа оператора вложения B. Рассмотрим $u_k \in C^\infty(\sigma_k; E_0)$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, такие, что

$$\|u_k\|_{F_0} \le 1, \quad \|u_k\|_F = 2^{-k\eta}, \quad \eta = 1/(\varkappa + \gamma).$$

Пусть C_ν, $\nu = 1, 2, \dots, N_\nu$, N_ν таковы, что $\sum\limits_{\nu=1}^{N_k} |C_\nu|^p = 1$. Положим

$$\Phi_k = \left\{ u : u = \sum_{\nu=1}^{N_k} C_\nu \varphi_\nu,\ \varphi_\nu \in C^\infty(\sigma_k; E_0) \right\}.$$

Тогда для достаточно большого k будет

$$\|u\|_{F_0} \le 1, \quad \|u\|_F = 2^{-k\eta}.$$

Обозначим через O_k и O_{kl} операторы вложения из Φ_k в F и F_0 соответственно. Так как $\dim \Phi_k = N_k$, из [21, § 3, лемма 3] имеем

$$d_{N_k - 1}(O_k(\Phi_k, F)) = 1.$$

Используя тот факт, что $O_k = BO_{kl}$, а также свойства d-чисел, получаем

$$d_{N_k - 1}(O_k(\Phi_k, F)) \le \|O_{kl}\| d_{N_k - 1}(B(\Phi_k, F)).$$

Отсюда, положив $N_k - 1 = j$, имеем

$$d_j(B) \ge C j^{-\frac{1}{\varkappa + \gamma}}, \quad j = 1, 2, \dots, \infty. \quad (5)$$

Тогда ввиду (4), (5) и [21, § 3, лемма 2] приходим к требуемому.

Из [14, теорема 3] вытекает

Теорема A$_7$. *Пусть*

(1) *E — UMD-пространство;*

(2) *A — плотно определенный неограниченный оператор в E, обладающий тем свойством, что для некоторого λ из резольвенты A оператор $R(\lambda A)$ входит в класс $\sigma_p(E)$, $p \in (1, \infty)$;*

(3) *$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ — взаимно не налегающие дуги в комплексной плоскости, имеющие предельное направление на бесконечности и такие, что несмежные пары дуг образуют угол величиной $\frac{\pi}{p}$ на бесконечности;*

(4) *резольвента A удовлетворяет условию*

$$\|R(\lambda, A)\| = O(|\lambda|^{-1})$$

при $\lambda \to \infty$ вдоль любой из дуг γ_i.

Тогда подпространство $\operatorname{sp} A$ включает все пространство E.

2. ДОУ в частных производных с переменными коэффициентами

Рассмотрим неоднородную задачу (1), т. е.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} - A_\lambda(x)u(x) + \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = f(x), \quad x \in G,$$
$$L_\Gamma u = \left[\alpha(x)\frac{\partial u(x)}{\partial l} + \beta(x)u(x)\right]_\Gamma = g, \tag{6}$$

где второе равенство понимается в смысле следов.

Вначале получим коэрцитивную оценку строгих решений задачи (6).

Условие 1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*
(1) $a_{ij} = a_{ji}$ *и существует такое* $\mu > 0$, *что*

$$\mu^{-1}|\xi|^2 \le L_0(x,\xi) \le \mu|\xi|^2 \text{ для } x \in G, \quad L_0(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j;$$

(2) $\Gamma \in C^{(2)}$ (*см., например,* [8, § 6.2]), $\alpha, \beta \in C^{(1)}(\Gamma)$, $\alpha(x) \ne 0$, $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \in S(\varphi)$.

Пусть
$$E_p = (E(A), E)_{\frac{1+p}{2p}}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условие* 1 *и следующие условия:*

(1) E — *банахово пространство, обладающее мультипликативным свойством относительно* $p \in (1,\infty)$;

(2) $A(x)$ R-*положителен в* E *равномерно относительно* $x \in \overline{G}$, $A(x)A^{-1}(x^0) \in C(\overline{G}; B(E))$;

(3) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $C(\varepsilon) > 0$ *такое, что для п. в.* $x \in G$ *и для* $u \in (E(A), E)_{\frac{1}{2},\infty}$

$$\|A_k(x)u\| \le \varepsilon\|u\|_{(E(A),E)_{\frac{1}{2},\infty}} + C(\varepsilon)\|u\|.$$

Тогда для $u \in W_p^2(G; E(A), E)$, $\lambda \in S(\varphi)$ *и достаточно большого* $|\lambda|$ *имеет место оценка*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\|D_k^i u\right\|_{L_p(G;E)} \le M[\|(L+\lambda)u\|_{L_p(G;E)} + \|L_\Gamma u\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma;E_p,E)}]. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \dots, G_N$ — область в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ — соответствующее разбиение единицы такое, что функции φ_j гладкие на R, $\sigma_j = \operatorname{supp}\varphi_j \subset G_j$ и $\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x) = 1$. Тогда для $u \in W_p^2(G; E(A), E)$ имеем $u(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j(x)$, где $u_j(x) = u(x)\varphi_j(x)$. Пусть $u \in W_p^2(G; E(A), E)$. Тогда из уравнения (6) получаем

$$(L+\lambda)u_j = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}D_{ki}^2 u_j(x) - A_\lambda(x)u_j(x) = f_j(x), \tag{8}$$

$$L_\Gamma u_j = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \tag{9}$$

где

$$f_j = f\varphi_j + \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}\big[\varphi_j D_{ki}^2 u + D_k u D_k \varphi_j + \varphi_j D_i u + u D_{ki}^2 \varphi_j\big]$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \varphi_j A_k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k},\ j = 1, 2, \ldots, N, \quad g_j = \left[g + \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial l} u_j\right]_{\Gamma}. \quad (10)$$

Пусть $G_j \cap G = G_j$. Так как граница Γ достаточно гладкая, существует (см., например, [8, § 1.7.3] диффеоморфизм Ψ_j на окрестности G_j, переводящий G_j в $\widetilde{G}_j$ с плоской границей и такой, что $L_\Gamma u_j$ переходят в

$$\widetilde{L}_\Gamma \tilde{u}_j = \left[\tilde{\alpha}(y) \frac{\partial \tilde{u}_j(y)}{\partial y_n} + \tilde{\beta}(y) \tilde{u}_j(y)\right]_{y_n = 0},$$

где $\tilde{\upsilon}(y) = \upsilon(\Psi_j(y))$ для $\upsilon \in W_p^2(G_j; E(A), E)$. При этих преобразованиях пространство $W_p^2(G_j; E(A), E)$ изоморфно отображается в пространство $W_p^2(\widetilde{G}_j; E(A), E)$ и уравнение (8) приводится к виду

$$(L + \lambda)\tilde{u}_j = \sum_{k,,i=1}^{n} \tilde{a}_{kij} D_{ki}^2 \tilde{u}_j(y) - \widetilde{A}_{j\lambda}(y) \tilde{u}_j(y) = \tilde{f}_j(y).$$

Более того, ввиду условия (1) найдется линейное отображение, которое переводит выражение

$$\sum_{k,,i=1}^{n} \tilde{a}_{ki} D_{kij}^2 \tilde{u}_j(y) + \widetilde{A}_{j\lambda}(y) \tilde{u}_j(y)$$

в

$$\sum_{k}^{n} \tilde{a}_{kj} D_k^2 \tilde{u}_j(y) - \widetilde{A}_{j\lambda}(y) \tilde{u}_j(y), \quad \tilde{a}_{kj} > 0.$$

После переобозначения y через x, $\widetilde{G}$ через G_j, $\tilde{a}_{kj}(y)$ через $a_{kj}(x)$, $\widetilde{A}_{j\lambda}(y)$ через $A_\lambda(x)$ и $\tilde{u}_j(y)$ через $u_j(x)$ и т. д. и замораживания коэффициентов в преобразованном уравнении (8) получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{k}^{n} a_{kj}(x_{j0}) D_k^2 u_j(x) + A_\lambda(x_{j0}) u_j(x) = F_j(x), \\ &L_\Gamma u_j = \left[\alpha(x_{j0}) \frac{\partial u_j(y)}{\partial x_n} + \beta(x_{j0}) u_j(x)\right]_{x_n = 0} = \Phi_j(x^1), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$F_j = f_j + [A(x_{j0}) - A(x)] u_j + \sum_{k}^{n} [a_k(x) - a_{ki}(x_{j0})] D_k^2 u_j(x), \quad (12)$$

$$B_j(x^1) = g_j(x^1) + \left[(\alpha(x_{j0}) - \alpha(x)) \frac{\partial u_j}{\partial x_n} + (\beta(x_{j0}) - \beta(x)) u_j(x)\right]_{x_n = 0}. \quad (13)$$

Согласно теореме A_5 задача (11) имеет единственное решение $u_j \in W_p^2(G_j; E(A), E)$ и для $\lambda \in S(\varphi)$ с достаточно большим $|\lambda|$ выполнены следующие коэрцитивные оценки:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1 - \frac{i}{2}} \big\|D_k^i u_j\big\|_{G_j, p} + \|A u_j\|_{G_j, p} \le C \|F_j\|_{G_j, p} + \|\Phi_j\|_{B_{p,p}^{1 - \frac{1}{p}}(\Gamma \cap G_j; E_p, E)}. \quad (14)$$

Аналогично по теореме A_4 получаем оценки типа (14) для области $G_j \subset G$. Отсюда, используя свойства гладкости коэффициентов уравнений (12), (13), теоремы A_1 и A_3, а также выбирая диаметры σ_j достаточно малыми, получаем

$$\|F_j\|_{G_j,p} \le \varepsilon \|u_j\|_{W_p^2(G_j;E(A),E)} + C(\varepsilon)\|u_j\|_{G_j,p}, \tag{15}$$

$$\|\Phi_j\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma\cap G_j;E_p,E)} \le C\|g_j\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma\cap G_j;E_p,E)} + \varepsilon\|u_j\|_{W_p^2(G_j;E(A),E)} + C(\varepsilon)\|u_j\|_{G_j,p}, \tag{16}$$

где ε достаточно малое и $C(\varepsilon)$ — непрерывная функция. Из (14)–(16) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{1}|\lambda|^{1-\frac{i}{2}}\left\|D_k^i u_j\right\|_{G_j,p} + \|Au_j\|_{G_j,p} \le C\|f\|_{G_j,p} + \|g_j\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma\cap G_j;E_p,E)} + \varepsilon\|u_j\|_{W_p^2} + C(\varepsilon)\|u_j\|_{G_j,p}.$$

Взяв $\varepsilon < 1$, из предыдущего неравенства получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2}|\lambda|^{1-\frac{i}{2}}\left\|D_k^i u_j\right\|_{G_j,p} + \|Au_j\|_{G_j,p} \le C[\|f\|_{G_j,p} + \|u_j\|_{G_j,p} + \|g_j\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma\cap G_j;E_p,E)}]. \tag{17}$$

Аналогично можно вывести оценки (17) для областей G_j, целиком лежащих в G. Тогда в силу оценки (17) для $u \in W_p^2(G;E(A),E)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2}|\lambda|^{1-\frac{i}{2}}\left\|D_k^i u\right\|_p + \|Au\|_p \le C[\|(L+\lambda)u\|_p + \|u\|_p + \|g_j\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}}]. \tag{18}$$

Пусть $u \in W_p^2(G;E(A),E)$ — решение задачи (6). Тогда для $\lambda \in S(\varphi)$ получим

$$\|u\|_p = \|(L+\lambda)u - Lu\|_p \le \frac{1}{\lambda}[\|(L+\lambda)u\|_p + \|u\|_{W_p^2}]. \tag{19}$$

Отсюда по теореме A_1 в силу (18), (19) для достаточно большого $|\lambda|$ и для $u \in W_p^2(G;E(A),E)$ приходим к оценке (7).

Рассмотрим теперь задачу (1). Пусть O_λ — оператор в $L_p(G;E)$, порожденный задачей (1), т. е.

$$D(O_\lambda) = W_p^2(G;E(A),E,L_\Gamma), \quad O_\lambda u = (L+\lambda)u.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда для любых* $f \in L_p(G;E)$ *и* $\lambda \in S(\varphi)$ *с достаточно большим* $|\lambda|$ *существует единственное решение задачи* (1) *и имеет место следующая коэрцитивная оценка:*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2}|\lambda|^{1-\frac{i}{2}}\left\|D_k^i u\right\|_{L_p(G;E)} \le M\|f\|_{L_p(G;E)}. \tag{20}$$

Доказательство. Покажем, что для любой $f \in L_{p,\gamma}(G;E)$ найдется единственное решение $u \in W_p^2(G;E(A),E)$ задачи (1). Единственность в этой задаче получается из оценки (7). Стало быть, достаточно доказать, что задача (1) имеет решение $u \in W_p^2(G;E(A),E)$ для любой $f \in L_p(G;E)$. Рассмотрим гладкие функции $g_j = g_j(x)$, подчиненные разбиению единицы $\varphi_j = \varphi_j(y)$ на области G, равные единице на $\operatorname{supp}\varphi_j$, где $\operatorname{supp} g_j \subset G_j$, и $|g_j(x)| < 1$. Для каждого j построим функцию u_j, определенную на области $\Omega_j = G \cap G_j$ и удовлетворяющую задаче (1). Сначала рассмотрим случай, когда G_j пересекает границу. Задача (1) может быть записана в виде

$$\sum_{k,i=1}^{n} a_{ki}(x_{j0})D_{ki}^2 u_j(x) + A_\lambda(x_j)u_j(x)$$
$$= g_j\left\{ f + [A(x_{j0}) - A(x)]u_j + \sum_{k,i=1}^{n}[a_{ki}(x_{j0}) - a_{ki}(x)]D_{ki}^2 u_j - \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_k}\right\},$$
$$L_\Gamma u_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

Рассмотрим операторы $O_{j\lambda}$ в $L_p(G_j; E)$, порожденные краевой задачей (21), когда G_j частично содержится в G. В силу теоремы A_5 для любых $f \in L_p(G_j; E)$ и $\lambda \in S(\varphi)$ с достаточно большим $|\lambda|$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| D_k^i O_{j\lambda}^{-1} f\right\|_p + \left\| A O_{j\lambda}^{-1} f\right\|_p \le C\|f\|_p. \quad (22)$$

Распространяя u_j нулем вне $\operatorname{supp}\varphi_j$ и производя подстановку $u_j = O_{j\lambda}^{-1}\upsilon_j$, из (21) получаем операторное уравнение

$$\upsilon_j = K_{j\lambda}\upsilon_j + g_j f, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (23)$$

где $K_{j\lambda}$ — линейные ограниченные операторы в $L_p(G_j; E)$, определенные следующим образом:

$$K_{j\lambda} = g_j\left\{ f + [A(x_{0j}) - A(x)]O_{j\lambda}^{-1} \right.$$
$$\left. + \sum_{k,i=1}^{n}[a_{ki}(x_{j0}) - a_{ki}(x)]D_{ki}^2 O_{j\lambda}^{-1} - \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} O_{j\lambda}^{-1}\right\}.$$

Используя теорему A_1, оценку (22), гладкость коэффициентов в выражении $K_{j\lambda}$ и условие (4) для $\lambda \in S(\varphi)$ с достаточно большим $|\lambda|$, имеем $\|K_{j\lambda}\| < \varepsilon$, где ε достаточно малое. Следовательно, уравнения (23) имеют единственные решения $\upsilon_j = [I - K_{j\lambda}]^{-1} g_j f$ и

$$\|\upsilon_j\|_p = \|[I - K_{j\lambda}]^{-1} g_j f\|_p \le \|f\|_p.$$

Отсюда $[I - K_{j\lambda}]^{-1} g_j$ — линейный ограниченный оператор из $L_p(G; E)$ в $L_p(G_j; E)$. Стало быть, функции

$$u_j = U_{j\lambda} f = O_{j\lambda}^{-1}[I - K_{j\lambda}]^{-1} g_j f$$

являются решениями задачи (21). Используя теорему A_4, можно построить решения u_j задач (21) относительно областей G_j, целиком лежащих в G. Рассмотрим линейный оператор $(U + \lambda)$ в $L_p(G; E)$ такой, что

$$(U + \lambda)f = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(y) U_{j\lambda} f.$$

Из конструкции U_j и оценки (22) ясно, что операторы $U_{j\lambda}$ суть линейные ограниченные операторы из $L_p(G; E)$ в $W_p^2(G; E(A), E)$ и для $\lambda \in S(\varphi)$ с достаточно большим $|\lambda|$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| D_k^i U_{j\lambda}^{-1} f\right\|_p + \left\| A U_{j\lambda}^{-1} f\right\|_p \le C\|f\|_p. \quad (24)$$

Тем самым $(U+\lambda)$ — линейный ограниченный оператор из L_p в L_p. Подействовав оператором O_λ на $u=\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi_j U_{j\lambda}f$, получаем $O_\lambda u = f+\sum\limits_{j=1}^{N}\Phi_{j\lambda}f$, где $\Phi_{j\lambda}$ суть линейные ограниченные операторы из $L_{p,\gamma}(G;E)$ в $L_{p,\gamma}(G_j;E)$, определенные так:

$$\Phi_{j\lambda}=\sum_{k,i=1}^{n}a_{ki}\left[D^2_{ki}\varphi_j U_{j\lambda}+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\frac{\partial U_{j\lambda}}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial U_{j\lambda}}{\partial x_k}\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}A_iU_{j\lambda}.$$

В силу теоремы вложения A_1 и оценки (24) из выражения $\Phi_{j\lambda}$ получаем, что операторы $\Phi_{j\lambda}$ являются линейными ограниченными операторами из $L_p(G;E)$ в $L_p(G_j;E)$ и $\|\Phi_{j\lambda}\|<\varepsilon$. Поэтому существует линейный ограниченный обратимый оператор $\left(I+\sum\limits_{j=1}^{N}\Phi_{j\lambda}\right)^{-1}$. Отсюда получаем, что для любой $f\in L_p(G;E)$ краевая задача (1) имеет единственное решение

$$u(x)=O_\lambda^{-1}f=\sum_{j=1}^{N}\varphi_j O_{j\lambda}^{-1}[I-K_{j\lambda}]^{-1}g_j\left(I+\sum_{j=1}^{N}\Phi_{j\lambda}\right)^{-1}f,$$

т. е. приходим к требуемому.

Вывод 1. *Из теоремы* 1 *следует, что оператор O имеет резольвенту $(O+\lambda)^{-1}$ для $\lambda\in S(\varphi)$ и допускает следующую оценку:*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2}|\lambda|^{1-\frac{i}{2}}\left\|D_k^i(O+\lambda)^{-1}\right\|_{B(L_p(G;E))}+\|A(O+\lambda)^{-1}\|_{B(L_p(G;E))}\le C. \tag{25}$$

Замечание 1. Из оценки (20) и теоремы вложения A_1 вытекает, что в условиях теоремы 2 имеет место оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L_p(G;E)}+\|Au\|_{L_p(G;E)}\le C\|f\|_{L_p(G;E)}$$

для решения задачи (1), т. е. задача (1) $L_p(G;E)$-сепарабельна.

Замечание 2. Из вывода 1 следует, что оператор O положителен в $L_p(G;E)$. Более того, ввиду (24) и [21, § 1.14.5] оператор O порождает аналитическую полугруппу, когда $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Замечание 3. Если $\alpha(x)\equiv 0$, то утверждения теорем A2, A3 остаются справедливыми для $g\in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p}}(\Gamma;(E(A),E)_{\frac{1}{2p}},E)$.

3. Спектральные свойства эллиптических дифференциальных операторов в банаховых пространствах

Рассмотрим дифференциальный оператор O, порожденный краевой задачей (21). Нетрудно увидеть, что главная часть этого оператора несамосопряженна. В этом разделе изучим спектральные свойства оператора O. В следующей теореме докажем фредгольмовость оператора O.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и* $A^{-1} \in \sigma_\infty(E)$. *Тогда оператор* O *фредгольмов из* $W_p^2(G;E(A),E)$ *в* $L_p(G;E)$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что оператор $O+\lambda$ для достаточно большого $|\lambda|$ имеет ограниченный обратный $(O+\lambda)^{-1}$, действующий из $L_p(G;E)$ в $W_p^2(G;E(A),E)$, т. е. оператор $O+\lambda$ фредгольмов из $W_p^2(G;E(A),E)$ в $L_p(G;E)$. По теореме A_2 вложение $W_p^2(G;E(A),E) \subset L_p(G;E)$ компактно. Тогда из теории возмущения линейных операторов следует, что оператор O фредгольмов из $W_p^2(G;E(A),E)$ в $L_p(G;E)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2. *Пусть* E — *банахово пространство с базисом и*

$$s_j(I(E(A),E)) \sim j^{-\frac{1}{\nu}}, \quad j = 1,2,\dots,\infty,\ \nu > 0.$$

Тогда

(a) *имеет место асимптотика*

$$s_j((O+\lambda)^{-1}(L_p(G;E))) \sim j^{-\frac{2}{2\nu+n}}; \tag{26}$$

(b) *система корневых функций дифференциального оператора* O *полна в* $L_{p,\gamma}(G;E)$.

Доказательство. Пусть $I(E_0,E)$ — оператор вложения из E_0 в E. Согласно выводу 1 существует резольвента оператора $(O+\lambda)^{-1}$, которая действует ограниченно из $L_p(G;E)$ в $W_p^2(G;E(A),E)$. Тогда в силу теоремы A_6 оператор вложения $I\big(W_{p,\gamma}^l(G;E(A),E), L_{p,\gamma}(G;E)\big)$ компактен и

$$s_j\big(I\big(W_p^2(G;E(A),E), L_p(G;E)\big)\big) \sim j^{-\frac{2}{2\nu+n}}. \tag{27}$$

Так как

$$\begin{aligned}(O+\lambda)^{-1}&(L_p(G;E)) \\ &= (O+\lambda)^{-1}\big(L_p(G;E), W_p^2(G;E(A),E)\big) I\big(W_p^2(G;E(A),E), L_p(G;E)\big),\end{aligned} \tag{28}$$

из соотношений (27) и (28) получаем (26). Оценка (25) и соотношение (27) гарантируют, что оператор $O+\lambda_0$ положителен в $L_p(G;E)$ и

$$(O+\lambda_0)^{-1} \in \sigma_q(L_p(G;E)), \quad q > 2/(2\nu+n). \tag{29}$$

Тогда из оценки (25) в силу соотношения (29) и теоремы A_6, приходим к (b).

4. Краевые задачи для анизотропных эллиптических уравнений

Фредгольмовость для эллиптических уравнений с параметрами в гладких областях изучались в [24, 25] и в негладких областях — в [26, 27].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое связное множество с компактной границей $\partial\Omega$ класса C^{2m}. Рассмотрим краевую задачу на цилиндрической области $\widetilde{\Omega} = G\times\Omega$ для следующего эллиптического уравнения:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n d_k \frac{\partial u(x,y)}{\partial x_k} + \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(y) D_y^\alpha u(x,y) = f(x,y), \tag{30}$$
$$x \in G,\ y \in \Omega,$$

$$L_\Gamma u = \left[\alpha(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial l} + \beta(x)u(x,y)\right]_\Gamma = 0, \tag{31}$$

$$B_j u = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(y)D_y^\beta u(x,y) = 0, \quad x\in G,\ y\in\partial\Omega,\ j=1,2,\dots,m. \tag{32}$$

Здесь Γ — граница области $G\in\mathbb{R}^n$, l — некасательное направление на Γ и a_{ij},α,β суть комплекснозначные функции на G и Γ соответственно, $D_j = -i\frac{\partial}{\partial y_j}$, $m_k\in\{0,1\}$, $y=(y_1,\dots,y_n)$.

Если $\widetilde{\Omega} = G\times\Omega$, $\mathbf{p}=(p_1,p)$, через $L_{\mathbf{p}}(\widetilde{\Omega})$ будем обозначать пространство всех $\mathbf{p}$-суммируемых скалярных функций со смешанной нормой (см., например, [7, § 1]), т. е. пространство всех измеримых функций f, определенных на $\widetilde{\Omega}$, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(\widetilde{\Omega})} = \left(\int_G\left(\int_\Omega |f(x,y)|^{p_1}\,dy\right)^{\frac{p}{p_1}}dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Аналогично через $W_{\mathbf{p}}^{2,2m}(\widetilde{\Omega})$ будем обозначать анизотропное соболевское пространство с соответствующей смешанной нормой [26, § 10].

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *справедливо условие* 1;

(2) $a_\alpha\in C(\overline{\Omega})$ *для любых* $|\alpha|=2m$ *и* $a_\alpha\in[L_\infty+L_{r_k}](\Omega)$ *для любых* $|\alpha|=k<2m$ *с* $r_k\ge q$ *и* $2m-k>\frac{l}{r_k}$;

(3) $b_{j\beta}\in C^{2m-m_j}(\partial\Omega)$ *для любых* j, β *и* $m_j<2m$, $\sum_{j=1}^m b_{j\beta}(y')\sigma_j\ne 0$ *для* $|\beta|=m_j$, $y'\in\partial G$, *где* $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in\mathbb{R}^n$ — *нормаль к* $\partial\Omega$;

(4) *для* $y\in\overline{\Omega}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in S(\varphi)$, $\varphi\in(0,\pi)$, $|\xi|+|\lambda|\ne 0$ *пусть* $\lambda+\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y)\xi^\alpha\ne 0$;

(5) *для любого* $y_0\in\partial\Omega$ *локальная краевая задача в соответствующих* y_0 *локальных координатах:*

$$\lambda + \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y_0)D^\alpha\vartheta(y) = 0,$$

$$B_{j0}\vartheta = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(y_0)D^\beta u(y) = h_j, \quad j=1,2,\dots,m,$$

имеет единственное решение $\vartheta\in C_0(R_+)$ *для всех* $h=(h_1,h_2,\dots,h_m)\in\mathbb{R}^m$ *и для* $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$ *с* $|\xi'|+|\lambda|\ne 0$.

Тогда

а) *для любых* $f\in L_{\mathbf{p}}(\widetilde{\Omega})$, $|\arg\lambda|\le\varphi$ *и достаточно большого* $|\lambda|$ *задача* (29)–(31) *имеет единственное решение* u*, принадлежащее* $W_{\mathbf{p}}^{2,2m}(\widetilde{\Omega})$*, и допускает коэрцитивную оценку*

$$\sum_{k=1}^n\sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}}\left\|\frac{\partial^i u}{\partial x_k}\right\|_{L_{\mathbf{p}}(\widetilde{\Omega})} + \sum_{|\beta|=2m}\left\|D_y^\beta u\right\|_{L_{\mathbf{p}}(\widetilde{\Omega})} \le C\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(\widetilde{\Omega})};$$

b) *задача* (30)–(32) *фредгольмова в* $L_{\mathbf{p}}(\widetilde{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $E=L_{p_1}(\Omega)$. В силу [22, теорема 3.6] п. (1) теоремы 1 выполнен. Рассмотрим оператор A, определенный следующим образом:

$$D(A) = W_{p_1}^{2m}(\Omega; B_j u = 0), \quad Au = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(y)D^\alpha u(y).$$

Для $x \in \Omega$ рассмотрим также операторы

$$A_k(x)u = d_k(x,y)u(y), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Задача (30)–(32) может быть переписана в виде (1), где $u(x) = u(x, \cdot)$, $f(x) = f(x, \cdot)$ суть функции со значениями в $E = L_{p_1}(\Omega)$. Ввиду [25] задача

$$\lambda u(y) + \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(y) D_y^\alpha u(y) = f(y), \quad B_j u = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(y) D_y^\beta u(y) = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

имеет единственное решение для $f \in L_{p_1}(\Omega)$ и $\arg \lambda \in S(\varphi_0)$, $|\lambda| \to \infty$. Более того, в силу [5, теорема 8.2] дифференциальный оператор A R-положителен в L_{p_1}. Известно, что вложение $W_{p_1}^{2m}(\Omega) \subset L_{p_1}(\Omega)$ компактно (см., например, [21, теорема 3.2.5]). Используя интерполяционные свойства соболевских пространств (см., например, [21, § 4]), можно показать, что условие (3) в теореме 1 также выполнено. Тогда из теорем 2, 3 вытекают все утверждения теоремы.

5. Краевые задачи для бесконечной системы эллиптических уравнений

Рассмотрим следующую бесконечную систему краевых задач:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u_m(x)}{\partial x_i \partial x_j} + (d_m(x) + \lambda) u_m(x)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} d_{kjm}(x) \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_k} = f_m(x), \quad x \in G, \ m = 1, 2, \dots, \infty, \tag{33}$$

$$L_\Gamma u = \left[\alpha(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial l} + \beta(x) u_m(x) \right]_\Gamma = 0, \tag{34}$$

где Γ — граница области $G \in \mathbb{R}^n$, l — некасательное направление на Γ и a_{ij}, α, β — комплекснозначные функции на G и Γ соответственно.

Пусть $d(x) = \{d_m(x)\}$, $d_m > 0$, $u = \{u_m\}$, $Du = \{d_m u_m\}$, $m = 1, 2, \dots, \infty$,

$$l_q(D) = \left\{ u : u \in l_q, \|u\|_{l_q(d)} = \|Du\|_{l_q} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |d_m u_m|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

$x \in G$, $1 < q < \infty$. Пусть Q — дифференциальный оператор в $L_p(G; l_q)$, порожденный краевой задачей (33), (34). Положим $B = B(L_p(G; l_q))$.

Теорема 6. *Пусть*

(1) *верно условие* 1;

(2) $d_j \in C(\overline{G})$, $d_{kmj} \in L_\infty(G)$ *и*

$$\max_k \sup_m \sum_{j=1}^{\infty} d_{kmj}(x) d_j^{-(\frac{1}{2} - \mu)} < M \quad \text{для всех } x \in G \text{ и } 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

п. в. для $x \in G$ *и* $1 < p < \infty$.

Тогда верны следующие утверждения.

(a) *Для любых* $f(x) = \{f_m(x)\}_1^\infty \in L_p(G; l_q)$, $\lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in (0, \pi)$ *и для достаточно большого* $|\lambda|$ *задача* (33), (34) *имеет единственное решение*

$u = \{u_m(x)\}_1^\infty$, принадлежащее $W_p^2(G, l_q(D), l_q)$ и обладающее коэрцитивной оценкой

$$\sum_{k=1}^n \left[\int\limits_G \left(\sum_{m=1}^\infty \left| D_k^2 u_m(x) \right|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int\limits_G \left(\sum_{m=1}^\infty |d_m u_m(x)|^q \right) dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ \leq C \left[\int\limits_G \left(\sum_{m=1}^\infty |f_m(x)|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (35)$$

(b) *Для достаточно большого $|\lambda| > 0$ существует резольвента $(Q + \lambda)^{-1}$ оператора Q и*

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{j}{2}} \left\| D_k^j (Q + \lambda)^{-1} \right\|_B + \|A(Q + \lambda)^{-1}\|_B \leq M. \quad (36)$$

Доказательство. Действительно, пусть $E = l_q$, A и $A_k(x)$ суть бесконечные матрицы такие, что

$$A = [d_m(x)\delta_{jm}], \quad A_k(x) = [d_{kjm}(x)], \quad m, j = 1, 2, \dots, \infty.$$

Нетрудно увидеть, что оператор A R-положителен в l_q. Поэтому в силу теоремы 4 получаем, что задача (33), (34) для любых $f \in L_p(G; l_q)$, $\lambda \in S(\varphi)$ и достаточно большого $|\lambda|$ имеет единственное решение u, принадлежащее пространству $W_p^2(G; l_q(D), l_q)$, и

$$\sum_{k=1}^n \left\| D_k^2 u \right\|_{L_p(G; l_q)} + \|Du\|_{L_p(G; l_q)} \leq C \|f\|_{L_p(G; l_q)}.$$

Отсюда вытекает (35). Оценка (36) получается из вывода 1.

Замечание 4. Есть много положительных операторов в различных конкретных банаховых пространствах. Поэтому, беря конкретные банаховы пространства и конкретные положительные операторы (т. е. псевдодифференциальные операторы, или, например, конечные или бесконечные матрицы) вместо E и A соответственно, по теоремам 2–4 можно получать различные классы максимальных регулярных краевых задач для дифференциального уравнения в частных производных или псевдодифференциальных уравнений или их конечных или бесконечных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Amann H.* Linear and quasi-linear equations. Basel: Birkhauser, 1995. V. 1.
2. *Agarwal R., Shakhmurov V. B.* Multipoint problems for degenerate abstract differential equations // Acta Math. Hung. 2009. V. 123, N 1–2. P. 65–89.
3. *Ashyralyev A.* On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic equations // Numer. Funct. Anal. Optim. 2003. V. 24, N 1–2. P. 1–15.
4. *Agarwal R., O' Regan D., Shakhmurov V. B.* Uniform separable differential operators with parameters // J. Franklin Inst. 2010. V. 347, N 1. P. 2–16.
5. *Denk R., Hieber M., Prüss J.* R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 166).
6. *Gorbachuk V. I. Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for differential-operator equations. Киев: Наук. Думка, 1984.
7. *Krein S. G.* Linear differential equations in Banach space. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1971.

8. *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Basel: Birkhauser, 2003.
9. *Lions J-L., Magenes E.* Nonhomogenous boundary value problems. M.: Мир, 1971.
10. *Yakubov S.* Completeness of root functions of regular differential operators. New York: Longman, Scientific and Technical, 1994.
11. *Yakubov S., Yakubov Ya.* Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations. Boca Raton: Chapman and Hall /CRC, 2000.
12. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 1. С. 52–55.
13. *Shklyar A. Ya.* Complete second order linear differential equations in Hilbert spaces. Basel: Birkhauser Verl., 1997.
14. *Агранович М. С.* Спектральные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^σ и B_p^σ // Функц. анализ и его прил. 2008. Т. 42, № 4. С. 2–23.
15. *Шахмуров В. Б.* Теоремы вложения абстрактных функциональных пространств и их применения // Мат. сб. 1987. Т. 134, № 2. С. 260–273.
16. *Шахмуров В. Б.* Теоремы вложения и их применения к вырождающимся уравнениям // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 672–682.
17. *Shakhmurov V. B.* Coercive boundary value problems for regular degenerate differential-operator equations // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 292, N 2. P. 605–620.
18. *Shakhmurov V. B.* Separable anisotropic differential operators and applications // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 327, N 2. P. 1182–1201.
19. *Шахмуров В. Б.* Вложения и сепарабельные дифференциальные операторы в пространствах типа Соболева // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 6. С. 907–926.
20. *Burkholder D. L.* A geometrical conditions that implies the existence certain singular integral of Banach space-valued functions // Proceedings of the Conference “Harmonic analysis” in Honor of A. Zigmund, Chicago, 1981. Belmont: Wadsworth, 1983. P. 270–286.
21. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators Amsterdam: North-Holland, 1978.
22. *Weis L.* Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p regularity // Math. Ann. 2001. V. 319. P. 735–758.
23. *Calderon A. P.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Studia Math. 1964. V. 24. P. 113–190.
24. *Gilbarg D., Trudinger, N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verl., 1998.
25. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147.
26. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. M.: Наука, 1975.
27. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston: Pitman, 1985.

Статья поступила 8 октября 2009 г.

Veli B. Shakhmurov (Шахмуров Вели Биннатович)
Department of Electronics Engineering and Communication,
Okan University,
Akfirat, Tuzla 34959 Istanbul, Turkey,
veli.sahmurov@okan.edu.tr