Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 519.21

О ПРИНЦИПАХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. А. Боровков, А. А. Могульский

Аннотация. Принципам больших уклонений (п.б.у.) посвящено значительное количество работ (см., например, [1–4] и библиографию в [3, 4]). В них изучаются в основном п.б.у. для сумм случайных элементов или для различных стохастических моделей и динамических систем. Если рассматривать последовательность случайных элементов в метрическом пространстве, то при изучении п.б.у. оказывается естественным ввести понятие локального п.б.у. (л.п.б.у.) и расширенного п.б.у. (р.п.б.у.). Эти понятия позволяют формулировать и доказывать утверждения типа п.б.у. в тех случаях, когда «обычный» п.б.у. (ср. с [3, 4]) не имеет места (см. [5, 6] и разд. 6 настоящей работы). В предлагаемой работе получены условия для выполнения р.п.б.у. в метрических пространствах. Главным из этих условий является выполнение л.п.б.у. Доказательство последнего обычно значительно проще, чем доказательство р.п.б.у.

Ключевые слова: принцип больших уклонений (п.б.у.), расширенный принцип больших уклонений (р.п.б.у.), локальный принцип больших уклонений (л.п.б.у.), функция уклонений, вполне ограниченное множество, компакт.

Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой ρ и σ-алгеброй $\mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ борелевских множеств. Пусть далее $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность случайных элементов в $\langle \mathbb{Y}, \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho) \rangle$. Если для некоторого множества $B_0 \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\eta_n \in (B_0)_\varepsilon) = 1, \tag{0.1}$$

где $(B)_\varepsilon$ — ε-окрестность множества B, то для любого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ такого, что $(B_0)_\varepsilon \cap B = \varnothing$ при некотором $\varepsilon > 0$, вероятность $P_n(B) := \mathbf{P}(\eta_n \in B)$ стремится к 0 при $n \to \infty$ и характеризует распределение η_n в «области больших уклонений». Если η_n сходится по вероятности к неслучайному элементу y_0: $P_n((y_0)_\varepsilon) \to 1$ при $n \to \infty$, где $(y)_\varepsilon = \{\tilde{y} \in \mathbb{Y} : \rho(y, \tilde{y}) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность точки y, то (0.1) будет выполнено при $B_0 = \{y_0\}$.

В разд. 1, 2 вводятся понятия локального и расширенного принципов больших уклонений (л.п.б.у. и р.п.б.у. соответственно). Эти принципы описывают асимптотику $\ln P_n(B)$ при $n \to \infty$ и в тех случаях, когда «обычный» п.б.у. (ср. с [3, 4]) не имеет места (см. [5, 6]). В разд. 3 получены условия для выполнения р.п.б.у. в метрических пространствах. Главным из этих условий является выполнение л.п.б.у. Доказательство последнего обычно значительно проще, чем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00962, 07–01–00595) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ–3695.2008.1, РНШ.2.1.1.1379).

© 2010 Боровков А. А., Могульский А. А.

доказательство р.п.б.у. Разд. 4, 5 содержат ряд утверждений, связанных с основной теоремой работы. В разд. 6, 8 приводятся примеры л.п.б.у и р.п.б.у. для случайных блужданий и эмпирических процессов. Разд. 7 содержит модификации постановки задачи на случай несепарабельных пространств $(\mathbb{Y}, \rho)$.

1. Локальный принцип больших уклонений.

Определение 1.1. Будем говорить, что *последовательность* $\{\eta_n\}$ *удовлетворяет локальному принципу больших уклонений в пространстве* $(\mathbb{Y}, \rho)$ (*л.п.б.у. в пространстве* $(\mathbb{Y}, \rho)$ или просто *л.п.б.у.*), если существуют числовая последовательность $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и функция $D = D(y)$: $\mathbb{Y} \to [0, \infty]$, обладающие следующими свойствами:

1) хотя бы для одного $y \in \mathbb{Y}$ выполняется $D(y) \in (0, \infty)$;

2) для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$ и любого $y \in \mathbb{Y}$

[$\mathbf{L}^*$] справедливо неравенство

$$L^*((y)_\varepsilon) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \le -D^{\lim}((y)_\varepsilon); \tag{1.1}$$

[$\mathbf{L}_*$] справедливо неравенство

$$L_*((y)_\varepsilon) := \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \ge -D(y), \tag{1.2}$$

где

$$D(B) := \inf_{y\in B} D(y), \quad D^{\lim}(B) := \lim_{\delta\downarrow 0} D((B)_\delta), \tag{1.3}$$

так что верхний правый индекс lim означает оператор, применяемый к функции множеств $D(B)$, а $D^{\lim}(B)$ есть результат этого применения. В (1.3) принято, что нижняя грань по пустому множеству равна ∞, т. е. $D(\varnothing) = \infty$.

Лемма 1.1. (i) *Условие* [$\mathbf{L}^*$] *эквивалентно условию*

[$\mathbf{L}^*$]$_a$ *для любых* $y \in \mathbb{Y}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *справедливо неравенство*

$$L^*((y)_\varepsilon) \le -D((y)_{\varepsilon+\delta}). \tag{1.4}$$

(ii) *Условие* [$\mathbf{L}_*$] *эквивалентно каждому из условий*

[$\mathbf{L}_*$]$_a$ *для любых* $y \in \mathbb{Y}$, $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$L_*((y)_\varepsilon) \ge -D((y)_\delta), \tag{1.5}$$

[$\mathbf{L}_*$]$_b$ *для любых* $y \in \mathbb{Y}$, $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$L_*((y)_\varepsilon) \ge -D^{\lim}(y),$$

где $D^{\lim}(y) := D^{\lim}(\{y\})$.

Доказательство. (i) Переходя к пределу в [$\mathbf{L}^*$]$_a$ при $\delta \to 0$, получаем [$\mathbf{L}^*$]. Обратно, так как $D^{\lim}((y)_\varepsilon) \ge D((y)_{\varepsilon+\delta})$ для любого $\delta > 0$, из [$\mathbf{L}^*$] получаем [$\mathbf{L}^*$]$_a$.

(ii) Докажем следующие три импликации:

$$[\mathbf{L}_*] \Longrightarrow [\mathbf{L}_*]_a \Longrightarrow [\mathbf{L}_*]_b \Longrightarrow [\mathbf{L}_*],$$

из которых будет следовать утверждение (ii).

Начнем с соотношения $[\mathbf{L}_*] \Longrightarrow [\mathbf{L}_*]_a$. Для любых $\delta \in (0, \varepsilon)$, $\theta \in (0, \varepsilon - \delta)$, $\tilde{y} \in (y)_\delta$ справедливо

$$L_*((y)_\varepsilon) \ge L_*((\tilde{y})_{\varepsilon-\delta}) \ge L_*((\tilde{y})_\theta).$$

Оставляя $\tilde{y}$ фиксированным и устремляя θ к нулю, в силу $[\mathbf{L}_*]$ получаем неравенство

$$L_*((y)_\varepsilon) \geq -D(\tilde{y}).$$

Поскольку это соотношение верно для любого $\tilde{y} \in (y)_\delta$, приходим к $[\mathbf{L}_*]_a$.

Соотношение $[\mathbf{L}_*]_a \Longrightarrow [\mathbf{L}_*]_b$ получается с помощью предельного перехода в неравенстве (1.5) при $\delta \to 0$. Соотношение $[\mathbf{L}_*]$ вытекает из $[\mathbf{L}_*]_b$ в силу очевидного неравенства $D^{\lim}(y) \leq D(y)$. Лемма доказана.

Таким образом, наряду с определением 1.1 можно использовать и другие, в которых условия $[\mathbf{L}^*]$, $[\mathbf{L}_*]$ заменяются их эквивалентами.

Отметим, что из определения 1.1 вытекает следующее важное свойство: *функцию $D = D(y)$ в этом определении можно, не ограничивая общности, считать полунепрерывной снизу.* Напомним, что функция D полунепрерывна снизу, если для любого $y \in \mathbb{Y}$

$$\varliminf_{\rho(y_n, y) \to 0} D(y_n) \geq D(y).$$

Оказывается, что при необходимости всегда можно «немного подправить» функцию D, заменив ее полунепрерывной снизу функцией $\widetilde{D}$ таким образом, что соотношения (1.1), (1.2) останутся справедливыми, если в их правых частях функцию D заменить на $\widetilde{D}$. При этом нужная полунепрерывная снизу функция $\widetilde{D}$ определяется единственным образом:

$$\widetilde{D}(y) = D^{\lim}(y), \quad y \in \mathbb{Y}.$$

Точнее, справедлива

Лемма 1.2. (i) *Функция $\widetilde{D}(y) = D^{\lim}(y)$ полунепрерывна снизу.*

(ii) *Функция $D(y)$ полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда $D(y) = D^{\lim}(y)$ при всех $y \in \mathbb{Y}$.*

(iii) *При всех $y \in \mathbb{Y}$ выполняется*

$$\widetilde{D}^{\lim}(y) = \widetilde{D}(y) (= D^{\lim}(y)).$$

Если выполнено соотношение $[\mathbf{L}^*]$, то в силу очевидного неравенства $D(y) \geq D^{\lim}(y)$ оно останется справедливым, если в его правой части функцию $D(y)$ заменить на $\widetilde{D}(y) = D^{\lim}(y)$.

Поскольку в правой части $[\mathbf{L}_*]_b$ стоит функция $D^{\lim}(y)$, приходим к тому, что из л.п.б.у. с функцией $D(y)$ (т. е. из (1.1), (1.2)) вытекает л.п.б.у. с функцией $\widetilde{D}(y) = D^{\lim}(y)$ и, стало быть, с самого начала можно считать, что функция $D(y)$ полунепрерывна снизу, т. е. совпадает с функцией $D^{\lim}(y)$.

Доказательство леммы 1.2. (i) Пусть $\rho(y_k, y) \to 0$ при $k \to \infty$. Так как функция $D((y)_\varepsilon)$ не убывает при $\varepsilon \downarrow 0$, для любой последовательности ε_k, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ выполняется

$$D^{\lim}(y_k) = \lim_{\delta \to 0} D((y_k)_\delta) \geq D((y_k)_{\varepsilon_k}).$$

При $\delta_k = \varepsilon_k + \rho(y_k, y)$ будем иметь $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, $(y_k)_{\varepsilon_k} \subset (y)_{\delta_k}$ и, стало быть,

$$D((y_k)_{\varepsilon_k}) \geq D((y)_{\delta_k}).$$

Поэтому
$$\varliminf_{k\to 0} D^{\lim}(y_k) \ge \lim_{k\to\infty} D((y)_{\delta_k}) \ge D^{\lim}(y).$$
Первое утверждение леммы установлено.

(ii) В одну сторону это утверждение вытекает из (i). Пусть теперь функция $D(y)$ полунепрерывна снизу. Тогда для любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ существует последовательность $y_k \to y$ при $k \to \infty$ такая, что для всех $k = 1, 2, \dots$ выполняется $y_k \in (y)_{\varepsilon_k}$, $D((y)_{\varepsilon_k}) \ge D(y_k) - 1/k$. Следовательно,
$$D^{\lim}(y) = \lim_{k\to\infty} D((y)_{\varepsilon_k}) \ge \varliminf_{k\to 0}(D(y_k) - 1/k) \ge D(y).$$
Поскольку обратное неравенство $D^{\lim}(y) \le D(y)$ очевидно, то $D^{\lim} = D$.

(iii) Так как в силу (i) функция $\widetilde{D} = D^{\lim}$ полунепрерывна снизу, то (iii) вытекает из (ii). Лемма 1.2 доказана.

Обозначим
$$L^*(y) := \lim_{\varepsilon\to 0} L^*((y)_\varepsilon), \quad L_*(y) := \lim_{\varepsilon\to 0} L_*((y)_\varepsilon).$$

Лемма 1.3. *Если выполнен л.п.б.у., то справедливо равенство*
$$L^*(y) = L_*(y) = -D(y). \tag{1.6}$$

Соотношение (1.6) можно назвать *предельным* л.п.б.у. Он поясняет вероятностный смысл произведения $z_n D(y)$: *при малых ε значения $-\ln P_n((y)_\varepsilon)$ с ростом n растут приблизительно как $z_n D(y)$*. В некоторых случаях из предельного л.п.б.у. можно получить обычный л.п.б.у. (см. замечание 3.1(iv)).

Чтобы несколько полнее характеризовать введенные в определении 1.1 понятия, будем иногда писать «л.п.б.у. с параметрами (z_n, D)». Л.п.б.у. и его следствие (1.6) определяют эти параметры неоднозначно: с точностью до постоянного множителя. Однозначно определяется лишь асимптотика произведения $z_n D(y)$ при всех $y \in \mathbb{Y}$ (имеется в виду «собственная» асимптотика, не вырождающаяся в силу условия 1 определения 1.1 в равенство нулю или бесконечности). Во всех известных нам примерах разбиение произведения $z_n D(y)$ на множители z_n и $D(y)$ происходит естественным образом и проблем не вызывает. В существующей литературе по п.б.у., как правило, используется последовательность $z_n = n$, что означает экспоненциальное по n убывание изучаемых вероятностей (такая асимптотика возникает, например, при изучении «обычных б.у.» нормированных сумм одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условию Крамера). Однако, как будет видно из дальнейшего (см. разд. 6), могут быть и существенно иные последовательности z_n, при которых выполнены соотношения (1.1), (1.2).

Доказательство леммы 1.3. В силу соотношения $[\mathbf{L}^*]$ и равенства $D = D^{\lim}$ получаем неравенство $L^*(y) \le -D(y)$. Из соотношения $[\mathbf{L}_*]_b$ вытекает неравенство $L_*(y) \ge -D(y)$. Поскольку $L^*(y) \ge L_*(y)$, лемма доказана.

Отметим теперь, что основные соотношения л.п.б.у. (1.1), (1.2) достаточно проверять не для всех $y \in \mathbb{Y}$, а лишь для $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$, где $\widetilde{Y}$ — какое-нибудь всюду плотное в $\mathbb{Y}$ множество. Точнее, при изучении п.б.у. полезно следующее утверждение.

Лемма 1.4. (i) *Если неравенство* (1.1) *выполнено для всех* $\tilde y \in \widetilde{Y}$, *где* $\widetilde{Y}$ *всюду плотно в* $\mathbb{Y}$, *то оно выполнено и для всех* $y \in \mathbb{Y}$.

(ii) *Если для любого* $y \in \mathbb{Y}$ *такого, что* $D(y) < \infty$, *существует последовательность* $\tilde y_k \in \widetilde{Y}$, *сходящаяся к* y, *и при этом* $D(\tilde y_k) \to D(y)$ (*в силу полунепрерывности* D *снизу это эквивалентно требованиям*

$$\varlimsup_{k\to\infty} D(\tilde y_k) \le D(y) \quad \text{\textit{или}} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} D(\widetilde{Y} \cap (y)_\varepsilon) \le D(y)),$$

то выполнение (1.2) *для* $\tilde y \in \widetilde{Y}$ *влечет за собой выполнение* (1.2) *для всех* $y \in \mathbb{Y}$.

Доказательство. (i) Для любых $y \in \mathbb{Y}$ и $\theta > 0$ найдется $\tilde y \in \widetilde{Y}$ такое, что $\rho(y, \tilde y) < \theta$. Поэтому для любого $\delta' > 0$ выполняется

$$L^*((y)_\varepsilon) \le L^*((y)_{\varepsilon+\theta}) \le -D\bigl((y)_{\varepsilon+\theta+\delta'}\bigr).$$

Остается положить $\delta' = \theta = \delta/2$. Неравенство (1.4) установлено.

(ii) Для заданных $y \in \mathbb{Y}$; $D(y) < \infty$, $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $\tilde y_k \in \widetilde{Y}$ такие, что $(\tilde y_k)_\delta \subseteq (y)_\varepsilon$ и $D(\tilde y_k) \le D(y) + \theta$. Поэтому

$$L_*((y)_\varepsilon) \ \ge L_*((\tilde y_k)_\delta) \ \ge \ -D(\tilde y_k) \ge -D\bigl(y\bigr) - \theta.$$

Поскольку $\theta > 0$ произвольно, соотношение (1.2) для y таких, что $D(y) < \infty$, доказано. Для остальных y это соотношение очевидно. Лемма 1.4 доказана.

2. Расширенный принцип больших уклонений (р.п.б.у.). Обозначим через (B) открытую внутренность множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ (т. е. совокупность всех точек, входящих в B вместе с некоторой окрестностью) и через $[B] = \mathbb{Y} \setminus (\overline{B})$ — замыкание B, где $\overline{B}$ — дополнение к B.

Определение 2.1. Будем говорить, что *последовательность* $\{\eta_n\}$ *удовлетворяет расширенному принципу больших уклонений в пространстве* $(\mathbb{Y}, \rho)$ (*р.п.б.у. в пространстве* $(\mathbb{Y}, \rho)$ или просто р.п.б.у.), если существуют числовая последовательность $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и функция $D(y)$, удовлетворяющая свойству 1 в определении 1.1, такие, что для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$ имеют место неравенства

$$L^*(B) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \le -D^{\lim}(B), \tag{2.1}$$

$$L_*(B) := \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \ge -D((B)). \tag{2.2}$$

Аналогично предыдущему будем писать иногда «р.п.б.у. с параметрами (z_n, D)». Как и прежде, функцию $D(y)$ в правых частях (2.1), (2.2), не ограничивая общности, можно считать полунепрерывной снизу (отметим, что, как будет показано ниже (см. теорему 3.1), р.п.б.у. влечет за собой л.п.б.у.). Однако здесь функцию множеств $D^{\lim}(B)$ (в отличие от функции точки) заменять на $D(B)$, вообще говоря, нельзя.

Напомним, что в литературе под *принципом больших уклонений* (п.б.у.) для последовательности случайных элементов $\{\eta_n\}$ в метрическом пространстве $(\mathbb{Y}, \rho)$ понимается следующее (см., например, [4]).

(1) Пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$ предполагается полным, сепарабельным.

(2) Определена *функция уклонений* (rate function) $D = D(y)$, $y \in \mathbb{Y}$, со значениями в $[0, \infty]$, которая обладает двумя свойствами:

(2a) она полунепрерывна снизу;

(2b) множество

$$D_v := \{y : D(y) \le v\}$$

компактно в $(\mathbb{Y}, \rho)$ при любом $v \ge 0$.

(3) Выполнены соотношения (2.1), (2.2), в которых правая часть в (2.1) заменена на $D([B])$, а z_n — на n.

Некоторые из названных предположений п.б.у. (особенно (1), (2b) и условие $z_n = n$) весьма ограничительны и во многих важных задачах, связанных со случайными блужданиями, не выполняются (см. разд. 6 и [5, 6]). С этим обстоятельством и связано появление определения 2.1. Мы использовали в определении 2.1 термин «расширенный» и указание на пространство с метрикой (оно бывает разным даже в близких задачах, см. разд. 6 и [3, 4]) для того, чтобы подчеркнуть отличие р.п.б.у. от п.б.у., обычно рассматриваемого в литературе (см., например, [5, 6]). Отличие состоит в следующем.

1. В р.п.б.у. отсутствует предположение о том, что пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$ является полным и сепарабельным.

2. В р.п.б.у. отсутствует предположение о том, что множество D_v при любом $v \ge 0$ является компактом в $(\mathbb{Y}, \rho)$ (см. [5, 6]).

3. В р.п.б.у. допускается любая скорость z_n роста $-\ln P_n(B)$ (как уже отмечалось, $z_n = n$ для обычного п.б.у., см., например, [4]).

4. В «обычном» п.б.у. в правой части (2.1) стоит значение $D([B])$, а не $D^{\lim}(B)$. Так как $[B] \subseteq (B)_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то

$$D([B]) \ge D^{\lim}(B). \tag{2.3}$$

Ниже в лемме 2.1 приведены условия, достаточные для выполнения равенства $D([B]) = D^{\lim}(B)$.

Отметим также, что в определении р.п.б.у. мы указываем метрическое пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$, в котором лежат элементы η_n. В дальнейшем для единообразия такая же информация при необходимости будет указываться и для п.б.у., т. е. мы будем писать «п.б.у. в $(\mathbb{Y}, \rho)$». Эта информация существенна, ибо пространства $(\mathbb{Y}, \rho)$ могут быть разными даже при изучении очень близких объектов. В литературе при изучении п.б.у. эта информация, как правило, опускается, так как пространство $\mathbb{Y}$ бывает фиксированным.

Из сказанного выше следует, что п.б.у. в $(\mathbb{Y}, \rho)$ всегда влечет за собой р.п.б.у. в $(\mathbb{Y}, \rho)$, но не наоборот.

5. В силу названных выше в пп. 1–4 отличий, а также более широких условий, обеспечивающих выполнение р.п.б.у. (по сравнению с аналогичными условиями для п.б.у., см. ниже), использование р.п.б.у. вместо п.б.у. позволяет существенно расширить как сам круг объектов, для которых имеют место утверждения типа п.б.у., так и условия, при которых для уже рассмотренных объектов будут справедливы неравенства (2.1), (2.2).

Приведем теперь достаточные условия, обеспечивающие равенство

$$D([B]) = D^{\lim}(B). \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Если при любом $v \ge 0$ множество D_v компактно, то имеет место равенство* (2.4).

Таким образом, для компактных D_v правые части в неравенствах (2.1), (2.2) для р.п.б.у. и п.б.у. совпадают.

Доказательство леммы 2.1. Если $D^{\lim}(B) = \infty$, то в силу (2.3) равенство (2.4) имеет место. Если же $v := D^{\lim}(B) < \infty$, то можно выбрать последовательность y_k точек, лежащих в множествах $(B)_{\frac{1}{k}} \cap D_{2v}$, таким образом, что

$$\lim_{k\to\infty} D(y_k) = D^{\lim}(B).$$

Поскольку множество D_{2v} — компакт в $\mathbb{Y}$, можно считать, не ограничивая общности, что последовательность y_k сходится к точке y_∞, лежащей в $[B]$. В силу полунепрерывности снизу имеем

$$D^{\lim}(B) = \lim_{k\to\infty} D(y_k) \geq D(y_\infty) \geq D([B]).$$

Так как в силу (2.3) имеет место и обратное неравенство, равенство (2.4) установлено. Лемма доказана.

Замечание 2.1. (i). Возможна ситуация (см. разд. 6.1(a)), когда справедлив р.п.б.у. с функцией уклонений D, при этом для любого измеримого множества B имеет место равенство (2.4), но множество D_v не компактно, так что в этом случае п.б.у. в «общепринятом смысле» отсутствует.

(ii). Отметим также, что, как показано в [3], компактность D_v влечет за собой полунепрерывность снизу функции $D(y)$. Так что в этом случае нет необходимости обеспечивать равенство $D(y) = D^{\lim}(y)$, оно будет выполнено автоматически.

Применительно к случайным блужданиям $\{S_n\}$, порожденным суммами $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_j, $\mathbf{E}\xi_j = 0$, $\mathbf{E}\xi_j^2 < \infty$, в качестве η_n можно рассматривать нормированные суммы $\frac{S_n}{x}$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}$, где $x = x(n)$, $x \gg \sqrt{n}$ при $n \to \infty$; либо нормированные траектории $s_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{x}$ (или их непрерывные версии) в какомнибудь метрическом пространстве функций на $[0,1]$, например в пространстве функций без разрывов второго рода (или в пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ для непрерывных версий $s_n(t)$). Если выполнено моментное условие Крамера, то в качестве z_n можно брать либо последовательность $z_n = n$ (обычный п.б.у.), либо $z_n = \frac{x^2}{n}$ (принцип умеренно больших уклонений), либо $z_n \gg n$ (сверхбольшие уклонения); подробнее об этом см. в разд. 6). В фазовом пространстве $\mathbb{R}$ функцию D в (1.1), (1.2) обычно называют *функцией уклонений* (deviation function, rate function). При изучении больших уклонений в функциональных пространствах функцию D иногда называют также *функционалом действия* (action functional). Для единообразия терминологии и в связи с тем, что смысл последнего термина применительно к случайным блужданиям не совсем ясен, мы здесь будем называть функцию D *функцией уклонений*, если речь идет о фазовом пространстве, или *функционалом уклонений*, если речь идет о пространстве траекторий.

3. Основная теорема. Напомним, что множество $T \subset \mathbb{Y}$ называется *вполне ограниченным* (totally bounded) в $\mathbb{Y}$ (см., например, [7]), если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное ε-покрытие множества T (т. е. существует набор точек $y_1, \dots, y_K$ в $\mathbb{Y}$, $K = K(\varepsilon) < \infty$, такой, что $\bigcup\limits_{j=1}^{K} (y_j)_\varepsilon \supset T$). Известно, что если вполне ограниченное множество в полном метрическом пространстве замкнуто, то оно компактно (см., например, [7]). Компакт всегда является вполне ограниченным множеством.

Предположим, что для последовательности $\{\eta_n\}$ выполнено соотношение (1.2) из л.п.б.у. Пусть $\{T_u\}_{u>0}$ — семейство вполне ограниченных множеств, зависящих от параметра u. Множество

$$B_{u,\varepsilon} := (\overline{T}_u)_\varepsilon$$

будем называть *ε-дополнением* к множеству T_u. Нам понадобится следующее условие на распределение $\{\eta_n\}$.

[TB]. *Для любого $u<\infty$ существует вполне ограниченное множество $T_u \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ такое, что для любого его ε-дополнения $B_{u,\varepsilon}$ выполняется*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}\ln\mathbf{P}(\eta_n\in B_{u,\varepsilon}) = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}\ln\mathbf{P}(\eta_n\notin (T_u)_\varepsilon) \le -u, \tag{3.1}$$

где z_n из соотношения (1.2).

Неравенство (3.1) можно записать также в виде

$$L^*(B_{u,\varepsilon}) \le -u.$$

Справедливо следующее основное утверждение, поясняющее связь между л.п.б.у. и р.п.б.у.

Теорема 3.1. (i). *Если выполнены соотношения* (1.1) (*из л.п.б.у.*) *и условие* [**TB**], *то выполнено соотношение* (2.1) (*из р.п.б.у.*). *Обратно, если выполнено соотношение* (2.1), *то справедливо соотношение* (1.1).

(ii). *Неравенства* (1.2) (*из л.п.б.у.*) *и* (2.2) (*из р.п.б.у.*) *эквивалентны.*

Таким образом, л.п.б.у. и р.п.б.у. при выполнении условия [**TB**] эквивалентны.

Следствие 3.1. *Если выполнены соотношения* (1.1), (1.2), *условие* [**TB**] *и для множества $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ справедливо равенство*

$$D((B)) = D^{\lim}(B),$$

то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}\ln\mathbf{P}(\eta_n\in B) = -D(B).$$

Ясно что достаточным для выполнения [**TB**] является условие

[**TB**]$_0$. Для любого $u<\infty$ существует вполне ограниченное множество $T_u\in\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ такое, что

$$L^*(\overline{T}_u)\le -u.$$

Условия [**TB**]$_0$ и [**TB**] в ряде случаев близки, о чем свидетельствует

Лемма 3.1. *Пусть $\mathbb{Y}$ — полное сепарабельное пространство и для последовательности η_n выполнен л.п.б.у. в $(\mathbb{Y},\rho)$ с параметрами (z_n, D). Пусть, кроме того, множества $D_v=\{y : D(y)\le v\}$ компактны при любом $v\ge 0$. Тогда условия* [**TB**]$_0$ *и* [**TB**] *эквивалентны.*

В общем случае доказать эквивалентность [**TB**]$_0$ и [**TB**] (или построить пример, в котором выполнено [**TB**], но не выполнено [**TB**]$_0$), не удается. В качестве некоторого пояснения к сказанному отметим, что в бесконечномерном случае параметр u множеств T_u не является, вообще говоря, «согласованным» с метрикой ρ, так что множество $(T_u)_\varepsilon$ может и не быть вложенным в T_{u+b} ни при каком $b > 0$. Так происходит, например, в пространстве $\mathbb{Y} = \mathbb{C}$ с равномерной метрикой ρ, если использовать функционал уклонений (6.7) (см. ниже), а в качестве T_u взять множества $T_u = D_u = \{y : D(y) \le u\}$ (они компактны при выполнении $[\mathbf{C}_\infty]$, см., например, [1]). В этом случае окрестность $(y)_\varepsilon$ каждой точки из T_u содержит элементы $\tilde{y}$ со сколь угодно большими значениями $D(\tilde{y})$ [8]. Это означает, что пересечение множеств $(T_u)_\varepsilon$ и $\overline{T}_{u+b}$ непусто при любом $b > 0$.

Доказательство леммы 3.1. Пусть выполнено условие [**TB**]. Тогда в силу теоремы 3.1 имеет место р.п.б.у. Кроме того, в силу леммы 2.1 из компактности множеств D_u следует (2.4) и, стало быть, имеет место п.б.у. Остается воспользоваться следующим утверждением, полученным в [3]: *условие* $[\mathbf{TB}]_0$, *в котором множества T_u — компакты, является необходимым для п.б.у. в полном сепарабельном метрическом пространстве.* Таким образом, из условия [**TB**] следует $[\mathbf{TB}]_0$. Поскольку обратная импликация очевидна, то лемма доказана.

Замечание 3.1. (i) Условие, аналогичное $[\mathbf{TB}]_0$, используется и для установления «обычного» п.б.у., однако в нем вместо вполне ограниченности множества T_u требуется его компактность (см., например, [3]).

(ii) Доказательство р.п.б.у. в силу теоремы 3.1 и леммы 1.4 сводится к доказательству л.п.б.у. для y из некоторого всюду плотного в $\mathbb{Y}$ множества $\widetilde{Y}$ (что обычно бывает проще) и проверке условия [**TB**].

(iii) Все без исключения утверждения настоящей работы сохранятся и для «псевдометрических» пространств $(\mathbb{Y}, \rho)$ (если ρ — псевдометрика. то равенство $\rho(y, \tilde{y}) = 0$ не влечет за собой равенство $y = \tilde{y}$).

(iv) В ряде случаев при выполнении условия [**TB**] из предельного л.п.б.у. (см. (1.6)) можно получить «обычный» л.п.б.у., а вместе с ним и р.п.б.у. Например, в случае, когда сходимость при $\varepsilon \to 0$ в соотношении

$$L^*(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} L^*((y)_\varepsilon) = -D(y)$$

равномерна по $y \in T$ при подходящем вполне ограниченном множестве T. Однако такая равномерность имеет место, по-видимому, далеко не всегда. Обычно ее удается установить лишь для конечномерных $\mathbb{Y}$ (см., например, разд. 6 о п.б.у. для сумм случайных величин).

Доказательство теоремы 3.1. (i) Пусть выполнены (1.1) и условие [**TB**]. Для фиксированных $u > 0$ и $\varepsilon > 0$ представим значение $P_n(B) := \mathbf{P}(\eta_n \in B)$ в виде суммы

$$P_n(B) = P_n(BB_{u,\varepsilon}) + P_n(B(T_u)_\varepsilon). \tag{3.2}$$

По условию [**TB**] при $n \to \infty$ выполняется

$$P_n(BB_{u,\varepsilon}) \le P_n(B_{u,\varepsilon}) \le e^{-z_n u(1+o(1))}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь слагаемое $P_n(B(T_u)_\varepsilon)$. Заметим предварительно, что если $\{(y_k)_\varepsilon\}_{k=1}^K$ — ε-покрытие множества T_u, то $\{(y_k)_{2\varepsilon}\}_{k=1}^K$ является 2ε-покрытием множества $(T_u)_\varepsilon$ и его подмножества $B' := B(T_u)_\varepsilon$. Следовательно, существует набор точек $\{y'_k\}_{k=1}^{K'}$ из B' такой, что

$$B' \subset \bigcup_{k=1}^{K'} (y'_k)_{4\varepsilon}$$

и, стало быть,

$$P_n(B') \le \sum_{k=1}^{K'} P_n((y'_k)_{4\varepsilon}) \le K' \max_k P_n((y'_k)_{4\varepsilon}).$$

Имеем

$$L^*(B') = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{z_n} \ln P_n(B') \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{z_n} [\ln K' + \max_k \ln P_n((y'_k)_{4\varepsilon})]. \tag{3.4}$$

В силу (1.1) существует последовательность $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что при всех $1 \le k \le K'$

$$\frac{1}{z_n} \ln P_n((y'_k)_{4\varepsilon}) \le -D((y'_k)_{5\varepsilon}) + \delta_n$$

и, следовательно,

$$\max_k \frac{1}{z_n} \ln P_n((y'_k)_{4\varepsilon}) \le -\min_k D((y'_k)_{5\varepsilon}) + \delta_n \le -D\left(\bigcup_{k=1}^{K'} (y'_k)_{5\varepsilon}\right) + \delta_n. \tag{3.5}$$

Поскольку

$$\bigcup_{k=1}^{K'} (y'_k)_{5\varepsilon} \subset (B')_{5\varepsilon} \subset (B)_{5\varepsilon},$$

то

$$D\left(\bigcup_{k=1}^{K'} (y'_k)_{5\varepsilon}\right) \ge D((B)_{5\varepsilon})$$

и в силу (3.4), (3.5) левая часть (3.4) не превосходит $-D((B)_{5\varepsilon})$. Если в (3.3) положить $u = \min\{D((B)_{5\varepsilon}), N\}$ при некотором $N < \infty$, то получим

$$L^*(B) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{z_n} \ln P_n(B) \le -\min\{D((B)_{5\varepsilon}), N\}.$$

В силу произвольности $N < \infty$, $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает неравенство (2.1).

Далее, поскольку неравенство (1.1) есть частный случай неравенства (2.1) (при $B = (y)_\varepsilon$), утверждение (i) теоремы 3.1 доказано.

(ii) Пусть выполнено (1.2). Для любого $y \in (B)$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем $(y)_\varepsilon \subset (B) \subset B$ и, стало быть,

$$L_*(B) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{z_n} \ln P_n(B) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{z_n} \ln P_n((y)_\varepsilon) = -D(y).$$

Поскольку это соотношение справедливо для любого $y \in (B)$, в правой части этого неравенства можно поставить $-D((B))$. Это доказывает (2.2).

Обратно, пусть выполнено (2.2). При $B = (y)_\varepsilon$ получаем, что правая часть (2.2) не меньше, чем $-D((y)_\varepsilon) \ge -D(y)$. Это доказывает (1.2). Теорема доказана.

4. Альтернатива условию [TB]. Условие **[TB]** означает, что слагаемое $P_n(BB_{u,\varepsilon})$ в (3.2) имеет по отношению к слагаемому $P_n(B(T_u)_\varepsilon)$ более высокий порядок малости. Это видно из того, что в (3.3) при $D^{\lim}(B) < \infty$ мы могли бы взять $u = 2D^{\lim}(B)$. Но такое свойство слагаемого $P_n(BB_{u,\varepsilon})$ имеет место не всегда. Например, если рассматривать суммы S_n случайных величин ξ_i, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, с распределением, правильно меняющимся на бесконечности (см. разд. 6.1(е) и [9]) и изучать асимптотику $\frac{1}{z_n}\ln \mathbf{P}(|\eta_n| \geq v)$ при $\eta_n = \frac{S_n}{n}$, $z_n = \ln n$ (здесь $B = (-\infty, -v] \cup [v, \infty)$), то для вполне ограниченных (и компактных) множеств $T_u = [-u, u]$ будем иметь $B_{u,\varepsilon} = (\overline{T}_u)_\varepsilon = (-\infty, -u-\varepsilon] \cup [u+\varepsilon, \infty)$. Стало быть, при $v \leq u + \varepsilon$

$$P_n(BB_{u,\varepsilon}) = \mathbf{P}(|\eta_n| \geq u+\varepsilon), \quad P_n(B(T_u)_\varepsilon) = \mathbf{P}(v \leq |\eta_n| < u+\varepsilon).$$

Это означает, что вероятности $P_n(BB_{u,\varepsilon})$ и $P_n(B(T_u)_\varepsilon)$ будут сравнимы (т. е. иметь один и тот же порядок малости при $n \to \infty$ при каждом $u > v - \varepsilon$). Другими словами, условие **[TB]** в этом случае не может быть выполнено, хотя р.п.б.у. будет иметь место. Здесь справедливость р.п.б.у. можно обеспечить с помощью несколько иного условия, существенно более слабого, чем условие **[TB]**.

В этом разделе будем предполагать, что вполне ограниченные множества выбираются из параметрического семейства $\{T_u\}$ вложенных множеств T_u, зависящих от параметра u из некоторого частично упорядоченного множества U: $T_{u_1} \subset T_{u_2}$ при $u_1 < u_2$. Множества T_u расширяются с ростом u, так что для сепарабельных пространств $(\mathbb{Y}, \rho)$ выполняется $\bigcup\limits_{u\in U} T_u = \mathbb{Y}$. Последнее означает, что с ростом u множества T_u «накрывают» все бо́льшую часть пространства $\mathbb{Y}$. При этом последовательность множеств $B\overline{T}_u$ сужается, а последовательность BT_u расширяется до множества B. Поэтому естественно ожидать, что для любого фиксированного множества B найдется $u = u(B)$ такое, что при всех $u > u(B)$ выполняется

$$P_n(B\overline{T}_u) < P_n(BT_u). \tag{4.1}$$

Поскольку в несепарабельных пространствах (см. о них в п. 7) свойство (4.1) для любого B может, вообще говоря, не выполняться, введем в рассмотрение класс $\mathscr{K}$ множеств $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$, $D(B) < \infty$, для которых требуется выполнение ослабленной версии неравенства (4.1). Более точно, класс $\mathscr{K}$ определяется следующим образом: для каждого $B \in \mathscr{K}$ найдутся значение $u = u(B)$ и постоянная $c = c(B) < \infty$ такие, что при всех $u > u(B)$, $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n

$$P_n(B\overline{T}_u) \leq cP_n(BT_u). \tag{4.2}$$

Если предполагать, как и в условии **[TB]**, что выполнено соотношение (1.2) из л.п.б.у., то постоянную c в (4.2) можно заменить на $e^{o(z_n)}$ при $n \to \infty$, где z_n из соотношения (1.2).

Таким образом, вместо пренебрежимой малости слагаемого $P_n(B\overline{T}_u)$ по отношению к $P_n(BT_u)$ (ср. с (3.2)) теперь будем предполагать лишь выполнение неравенства $P_n(B\overline{T}_u) \leq P_n(BT_u)e^{o(z_n)}$. Очевидно, что класс $\mathscr{K}$ непуст: множества $B = \overline{T}_v T_u$, $v < u$, где T_u из семейства $\{T_u\}$, всегда принадлежат $\mathscr{K}$, так как $P_n(T_u\overline{T}_u) = 0$. Если выполнены условие $[\mathbf{TB}]_0$, л.п.б.у. и при каком-нибудь u найдутся $y \in \mathbb{Y}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $(y)_\varepsilon \subset BT_u$ (т. е. BT_u «телесно»), $D(y) < \infty$, то выполнено (4.2) и, стало быть, $B \in \mathscr{K}$. Действительно, в силу л.п.б.у. и $[\mathbf{TB}]_0$

$$L_*(BT_u) \geq L_*((y)_\varepsilon) \geq -D(y) > L^*(\overline{T}_u)$$

при всех достаточно больших u. Следовательно, при таких u выполняется соотношение $P_n(B\overline{T}_u) \leq P_n(\overline{T}_u) = o(P_n(BT_u))$, из которого следует (4.2).

Теорема 4.1. *Пусть выполнен л.п.б.у. Тогда для любого множества B из $\mathscr{K}$ справедливы неравенства* (2.1), (2.2).

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 3.1. В силу теоремы 3.1 достаточно доказать лишь выполнение (2.1). Имеем в обозначениях доказательства теоремы 3.1

$$P_n(B) \leq P_n(BT_u)(1 + e^{o(z_n)}),$$

где оценка для $P_n(BT_u)$ получается аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 3.1. Теорема доказана.

Класс $\mathscr{K}$ и неравенство (4.2) соответствуют в известном смысле условию $[\mathbf{TB}]_0$. Этот класс можно расширить, ослабив неравенство (4.2) до неравенства

$$P_n(BB_{u,\varepsilon}) \leq cP_n(B(T_u)_\varepsilon)$$

при всех $u > u(B)$, $\varepsilon > 0$. Такой более широкий класс будет «соответствовать» условию $[\mathbf{TB}]$. Для него утверждение теоремы 4.1 полностью сохранится.

5. Некоторые свойства функции D. Пусть пространство $\mathbb{Y}$ линейно, а функция D выпукла вниз (это свойство имеет место во многих примерах). В этом случае для понимания свойств функции множеств $D(B)$ полезно следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Если функция $D(y)$ выпукла вниз, $D(B) \in (0, \infty)$ и существует точка $y_0 \in \mathbb{Y}$ такая, что*

$$D(y_0) < D(B), \tag{5.1}$$

то нижняя грань $\inf\limits_{y \in B} D(y)$, равная $D(B)$, не может достигаться внутри множества B.

Отметим, что функция уклонений D, фигурирующая в р.п.б.у., всегда обладает свойством (5.1), если $D(B) \in (0, \infty)$. Действительно, в силу неравенства (2.1) для $B = \mathbb{Y}$ получаем $D(\mathbb{Y}) = 0$. Поэтому для любого $\varepsilon \in (0, D(B))$ найдется $y_\varepsilon \in \mathbb{Y}$ такое, что $D(y_\varepsilon) \leq \varepsilon < D(B)$.

Доказательство леммы 5.1. Если открытое множество (B) пусто, то утверждение доказываемой леммы очевидно. Если (B) непусто, то выберем произвольную точку y_1 из (B). Тогда найдется число $\theta \in (0, 1)$ такое, что точка $y_2 = \theta y_0 + (1 - \theta)y_1$ тоже лежит в (B). В силу выпуклости вниз функции $D(y)$ имеем

$$D(y_2) = D(\theta y_0 + (1 - \theta)y_1) \leq \theta D(y_0) + (1 - \theta)D(y_1).$$

Поэтому ввиду того, что $D(y_2) \geq D(B)$, получаем

$$D(y_1) \geq \frac{1}{1 - \theta} D(y_2) - \frac{\theta}{1 - \theta} D(y_0) \geq \frac{1}{1 - \theta}(D(B) - \theta D(y_0)). \tag{5.2}$$

Поскольку $D(y_0) < D(B)$, то

$$D(B) - \theta D(y_0) > D(B) - \theta D(B) = (1 - \theta)D(B),$$

и из (5.2) следует строгое неравенство

$$D(y_1) > D(B).$$

Лемма доказана.

Если последовательность η_n удовлетворяет л.п.б.у. с параметрами (z_n, D) в пространстве $(\mathbb{Y}, \rho)$, то множество

$$D_v := \{y : D(y) \le v\}$$

является, грубо говоря, множеством «самых вероятных точек» (до уровня $e^{-z_n v}$), т. е. таких точек y, для которых вероятность $\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon)$ при малых ε и больших n не меньше чем $e^{-z_n(v+o_\varepsilon(1))}$. Если v растет, то множества D_v расширяются и число $D(B)$ есть значение v, при котором множества B и D_v при этом расширении впервые «касаются» (т. е. $B \cap D_{v-\delta} = \varnothing$, $B \cap D_{v+\delta} \ne \varnothing$ при любом $\delta > 0$). Часто бывает, что множество D_v вполне ограничено в пространстве $(\mathbb{Y}, \rho)$. В этом случае в качестве множества T_u из условия $[\mathbf{TB}]$ или $[\mathbf{TB}]_0$ естественно брать множество D_v при подходящем $v = v(u)$. Например, если

$$\mathbf{P}(\eta_n \notin D_v) \le e^{-z_n(v+\theta(v))},$$

где $\theta(v) = o(v)$ при $v \to \infty$, то в качестве $v(u)$ следует взять решение уравнения $v + \theta(v) = u$.

6. Примеры. П.б.у. для случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин. Рассмотрим случайное блуждание $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, порожденное суммами $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин $\xi_j \underset{d}{=} \xi$, $\mathbf{E}\xi = 0$.

6.1. П.б.у. в фазовом пространстве $\mathbb{R}$.

(a) Рассмотрим сначала случай, когда ξ удовлетворяет моментному условию Крамера

$[\mathbf{C}]$. *Существует $\lambda \ne 0$ такое, что*

$$\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\xi} < \infty.$$

В этом случае для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (y)_\varepsilon\right) = -\Lambda(y),$$

где $\Lambda(y) = \sup\limits_{\lambda}(\lambda y - \ln\psi(\lambda))$ — преобразование Лежандра над функцией $\ln\psi(\lambda)$ (см., например, [10]). Следовательно, здесь для $\eta_n = \frac{S_n}{x}$, $x \sim n$, выполнен л.п.б.у. с параметрами (z_n, D), где $z_n = n$ и $D = \Lambda$.

Функция $\Lambda = \Lambda(y)$ выпукла вниз и полунепрерывна снизу. В силу экспоненциального неравенств Чебышева

$$e^{-n\Lambda(y)} \ge \begin{cases} \mathbf{P}(S_n \ge yn), & \text{если } y > 0, \\ \mathbf{P}(S_n \le yn), & \text{если } y < 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Если обозначить $y_+ = \inf\{y \in B \cap (0,\infty)\}$, $y_- = \sup\{y \in B \cap (-\infty, 0)\}$, то из (6.1) следует, что

$$\mathbf{P}(S_n \in nB) \le e^{-n\Lambda(y_+)} + e^{-n\Lambda(y_-)}.$$

Это означает, что выполнено (2.1) и, стало быть, справедлив р.п.б.у., совпадающий с п.б.у (поскольку в этом случае в силу полунепрерывности функции Λ снизу выполняется равенство

$$D([B]) = D^{\lim}(B) = \min\{\Lambda(y_+), \Lambda(y_-)\}).$$

Отметим, что из условия **[C]** не следуют, вообще говоря, выполнение условия **[TB]** и компактность множества $D_v := \{y : D(y) \le v\}$. Если, скажем, $\psi(\lambda) = \infty$ при $\lambda > 0$, то $D(y) = 0$ при $y \ge 0$ и условие **[TB]** не выполнено, а компактность D_v не имеет места. Следовательно, в этом случае п.б.у. в «общепринятом смысле» (когда дополнительно требуется компактность множеств D_v при всех $v \ge 0$), отсутствует.

(b) Рассмотрим теперь случай, когда распределение $\mathbf{F}_n$ каждого из независимых слагаемых $\xi_1, \dots, \xi_n$, составляющих сумму S_n, зависит от n (так называемая схема серий) и выбирается следующим специальным образом:

$$\mathbf{F}_n(dy) = c_n \exp\{-N_n h(y)\}\, dy, \tag{6.2}$$

где c$_n$ — нормирующий множитель, $N_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а в качестве функции $h(y)$ выбирается произвольная неотрицательная выпуклая на всей оси вещественная функция, $h(0) = 0$, растущая на бесконечности быстрее любой линейной функции (т. е. $h(y) \gg |y|$ при $|y| \to \infty$). Предположение $N_n \to \infty$ означает, что распределение $\mathbf{F}_n$ при $n \to \infty$ концентрируется в окрестности нуля. В этом случае для $\eta_n = \frac{S_n}{x}$, $x \sim n$, выполнены л.п.б.у. и р.п.б.у. (последний совпадает с «обычным» п.б.у.) с параметрами (z_n, D), где $z_n = nN_n$ и $D = h$ (см. [4]).

(c) Пусть теперь выполнено «центральное» условие Крамера

$[\mathbf{C}_0]$. Условие **[C]** выполнено при всех достаточно малых $|\lambda|$.

В этом случае для $\eta_n = \frac{S_n}{x}$, $x = o(n)$, $x \gg \sqrt{n}$ справедлив л.п.б.у. в $\mathbb{R}$ с параметрами $z_n = \frac{x^2}{n}$, $D(y) = \frac{y^2}{2b^2}$, где $b^2 := \mathbf{E}\xi^2 > 0$. Очевидно, что функция $D(y)$ здесь выпукла и аналитична, а множество D_v компактно для любого $v \ge 0$. Поскольку здесь выполнено условие $[\mathbf{TB}]_0$, справедлив и р.п.б.у., совпадающий с так называемым *принципом умеренно больших уклонений* (см., например, [11]).

(d) Предположим теперь, что для некоторых констант $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$ и при $t \to \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(\xi > t) = e^{-\lambda_+(t+o(t))}, \quad \mathbf{P}(\xi < -t) = e^{\lambda_-(t+o(t))}.$$

Тогда условие Крамера **[C]** выполнено для всех λ из интервала (λ_-, λ_+) и $\psi(\lambda) = \infty$ для всех $\lambda \notin [\lambda_-, \lambda_+]$. При этом (см., например, [11]) имеет место соотношение

$$\Lambda(y) \sim \begin{cases} \lambda_+ y, & \text{если } y \to \infty, \\ \lambda_- y, & \text{если } y \to -\infty. \end{cases} \tag{6.3}$$

Используя (6.1), (6.3), можно показать, что для последовательности $\eta_n = \frac{S_n}{x}$, $x = x(n) \gg n$, выполнен л.п.б.у. в $\mathbb{R}$ с параметрами $z_n = x$ и

$$D(y) := \begin{cases} \lambda_+ y, & \text{если } y \ge 0, \\ \lambda_- y, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Поскольку в силу (6.1) условие $[\mathbf{TB}]_0$ тоже выполнено (см. [11]), последовательность η_n удовлетворяет р.п.б.у. в $\mathbb{R}$ (с теми же параметрами), который совпадает с п.б.у. и описывает асимптотику сверхбольших уклонений сумм S_n.

Основываясь на подходах, изложенных в [12, 13], можно получить и другие варианты теорем о сверхбольших уклонениях сумм S_n, например, в случаях, когда $|\lambda_\pm| = \infty$ и хвосты распределения ξ достаточно регулярны.

(e) Предположим теперь, что условие Крамера не выполнено, а функции

$$V(t) := \mathbf{P}(\xi \ge t) \quad \text{и} \quad W(t) := \mathbf{P}(\xi < -t)$$

являются правильно меняющимися, т. е. представимы в виде

$$V(t) = t^{-\alpha} L_V(t), \quad W(t) = t^{-\beta} L_W(t),$$

где $\alpha > 1$, $\beta > 1$, L_V, L_W — медленно меняющиеся функции при $t \to \infty$. Тогда, как известно (см., например, [9]), при $\eta_n = \frac{S_n}{n}$, $y > 0$ выполняется

$$\mathbf{P}(\eta_n > y) \sim nV(yn), \quad \mathbf{P}(\eta_n < -y) \sim nW(yn). \tag{6.4}$$

Стало быть, для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, y)$

$$\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \sim n[V((y-\varepsilon)n) - V((y+\varepsilon)n)] \sim nV(n)[(y-\varepsilon)^{-\alpha} - (y+\varepsilon)^{-\alpha}]. \tag{6.5}$$

Если ε мало, то правая часть этого соотношения близка к $nV(n)2\varepsilon\alpha y^{-\alpha-1}$ и, следовательно, при $z_n = \ln n$, $y > 0$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) = -\alpha + 1,$$

не зависящий от y и $\varepsilon < y$. Аналогично рассматриваются отрицательные значения y. Следовательно, имеет место л.п.б.у. с функцией уклонений

$$D(y) = \begin{cases} \alpha - 1 & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y = 0, \\ \beta - 1 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Здесь функция уклонений полунепрерывна снизу, но не выпукла. Условие [**ТВ**] не выполнено, и компактность (или вполне ограниченность) множеств D_v относительно евклидовой метрики отсутствует при любом $v \geq 0$.

Однако если рассмотреть семейство вполне ограниченных вложенных множеств $T_u = [-u, u]$ и в качестве $\mathscr{K}$ взять класс «телесных» множеств B, содержащих какой-нибудь интервал (т. е. обладающих свойством $B \supset (y)_\varepsilon$ при каких-нибудь $y \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$), то в силу (6.5) (6.4) для каждого $B \in \mathscr{K}$ при достаточно большом u будем иметь

$$P_n(BT_u) \geq P_n((y)_\varepsilon) \geq C(y)\varepsilon nV(n) \geq P_n(\overline{T}_u) \geq P_n(B\overline{T}_u).$$

Это означает, что выполнено требуемое условие (4.2) при $c = 1$ и, стало быть, для таких B справедлив р.п.б.у.

6.2. П.б.у. в пространстве траекторий.

(а) Пусть выполнено условие Крамера [**C**], $\eta_n = s_n(\cdot)$, где $s_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{x}$, $x \sim n$. Можно рассматривать также непрерывную версию этой траектории — например, непрерывную ломаную, построенную по узловым точкам $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{x}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда, как показано в [1, теорема 6], для любой абсолютно непрерывной функции $y = y(t)$, $y(0) = 0$, на $[0, 1]$, составленной из конечного числа монотонных «кусков», существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) = -D(y), \tag{6.6}$$

где $(y)_\varepsilon$ — ε-окрестность «точки y» в равномерной метрике $\rho_{\mathbb{C}}$,

$$D(y) = \int_0^1 \Lambda(y'(t))\, dt. \tag{6.7}$$

Это утверждение без труда распространяется на любую абсолютно непрерывную выходящую из нуля функцию. Очевидно, что в (6.6) следует положить $D(y) = \infty$, если $y(0) \neq 0$. Полученное утверждение можно трактовать как «частичный» л.п.б.у. в $(\mathbb{C}[0,1], \rho_{\mathbb{C}})$ с параметрами (z_n, D), $z_n = n$, справедливый для абсолютно непрерывных «точек» y.

(b) Пусть теперь условие Крамера выполняется на всей оси, т. е. выполнено условие

$[\mathbf{C}_\infty]$. $\psi(\lambda) < \infty$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Тогда в пространстве непрерывных функций $\mathbb{Y} = \mathbb{C} = \mathbb{C}[0,1]$ с равномерной метрикой $\rho_{\mathbb{C}}$ выполнено (6.6), где следует положить $D(y) = \infty$, если y не абсолютно непрерывна (см. [1]). Другими словами, выполнен л.п.б.у. в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ при $z_n = n$ и с функционалом уклонений (6.7), доопределенным выше на всем пространстве $\mathbb{C}$. Этот функционал полунепрерывен снизу, является выпуклым вниз, и для него множества D_v компактны для всех $v \geq 0$. Условие $[\mathbf{TB}]_0$ здесь тоже оказывается выполненным (см. [1]), и, стало быть, выполнен р.п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$, который совпадает с п.б.у. в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$, установленным в [1] (в рассматриваемом случае $D([B]) = D^{\lim}(B)$).

Так как л.п.б.у. (6.6) получен в [1] и для ступенчатых версий траектории $s_n(\cdot)$, то р.п.б.у. оказывается справедливым и, например, в пространстве $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{C}})$, где $\mathbb{D} = \mathbb{D}[0,1]$ — функции без разрывов второго рода с равномерной метрикой, если положить дополнительно к (6.7), что $D(y) = \infty$ для $y \notin \mathbb{C}$.

Обратимся теперь к случаю, рассмотренному в разд. 5.1(b), когда распределение каждого слагаемого ξ_i в сумме S_n зависит от n (схема серий) и задается специальным образом с помощью выпуклой функции $h(t)$ и последовательности $N_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (см. (6.2)). В этом случае, как показано в [4], для последовательностей $\eta_n = s_n(\cdot) \in \mathbb{C}[0,1]$ при $x \sim n$ выполнен л.п.б.у. в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ с параметрами (z_n, D), где $z_n = nN_n$, а функционал $D(y)$ для любой абсолютно непрерывной выходящей из нуля функции y определяется формулой (6.7), в которой роль функции $\Lambda(t)$ играет функция $h(t)$, и $D(y) = \infty$ для остальных $y \in \mathbb{C}$. Поскольку при этом выполнено условие $[\mathbf{TB}]_0$, а множества D_v являются компактами в $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ для всех $v \geq 0$, имеет место и р.п.б.у. с параметрами (z_n, D), совпадающий с «обычным» п.б.у. (см. [4]).

Вопросу о справедливости р.п.б.у. при $z_n = n$ в других метрических пространствах и при выполнении лишь условия $[\mathbf{C}_0]$ посвящена работа [5], в которой использована теорема 3.1.

(c) Если выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, то для последовательности η_n, определенной в разд. (a) при $x = o(n)$, $x \gg \sqrt{n}$, справедливы л.п.б.у. и р.п.б.у. в пространстве $(\mathbb{C}, \rho_{\mathbb{C}})$ (последний совпадает с п.б.у.) с параметрами (z_n, D), где $z_n = \frac{x^2}{n}$, а функционал уклонений $D(y)$ определяется формулой (6.7), в которой $\Lambda(t)$ заменена функцией $\frac{t^2}{2b^2}$ [1, 14].

(d) Вопрос о справедливости р.п.б.у. в условиях раздела 5.1(d) (сверхбольшие уклонения) остается открытым.

(e) Вопросу о справедливости р.п.б.у. при $z_n = \ln n$ в случае, когда условие Крамера не выполнено, но выполнены условия раздела 5.1(e), посвящена работа [6]. Метрическое пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$ и функционал уклонений D в этой задаче существенно отличаются от рассмотренных ранее.

7. Замечание о п.б.у. в несепарабельных пространствах $(\mathbb{Y}, \rho)$. Пусть случайные элементы η_n заданы на измеримом пространстве $\langle \mathbb{Y}, \mathfrak{A} \rangle$, где σ-алгебра $\mathfrak{A}$ не связана, вообще говоря, с метрикой ρ, определенной на $\mathbb{Y}$. Тогда может оказаться, что случайные элементы η_n не измеримы относительно пространства $\langle \mathbb{Y}, \mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)\rangle$, т. е. $\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho) \not\subset \mathfrak{A}$. Такое возможно, если, скажем, метрическое пространство $(\mathbb{Y},\rho)$ несепарабельно и борелевская σ-алгебра в нем «очень богата». В этом случае мы не можем применять определения 1.1 и 2.1, в которых априори предполагается измеримость случайных элементов относительно борелевской σ-алгебры.

Поясним сказанное на примере п.б.у. для случайных процессов $\eta_n = \eta_n(t)$; $t \in [0,1]$, которые изучаются в [5]. Там приходится иметь дело со следующей проблемой. В основном вероятностном пространстве в [5] фигурирует σ-алгебра $\mathfrak{A}(\mathbb{Y})$, порожденная цилиндрическими множествами (распределения процессов определяются конечномерными распределениями). При этом удается доказать, что выполнены лишь соотношения $(y)_\varepsilon \in \mathfrak{A}(\mathbb{Y})$ при любых $y \in \mathbb{Y}$, $\varepsilon > 0$, где $\mathbb{Y}$ — рассматриваемое пространство функций, т. е. что шары $(y)_\varepsilon$ в $\mathbb{Y}$ являются $\mathfrak{A}(\mathbb{Y})$-измеримыми множествами. Если метрическое пространство $(\mathbb{Y},\rho)$ сепарабельно, то отсюда сразу следует, что борелевская σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ (порожденная открытыми множествами в изучаемом пространстве) является частью $\mathfrak{A}(\mathbb{Y})$ и случайные элементы η_n можно рассматривать как заданные на измеримом пространстве $\langle \mathbb{Y}, \mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)\rangle$. Это означает, что мы можем пользоваться результатами настоящей работы. Однако если $(\mathbb{Y},\rho)$ несепарабельно, то, вообще говоря, требуемое вложение σ-алгебр не имеет места. В этом случае можно вместо борелевской σ-алгебры $\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ рассматривать «промежуточную» более бедную σ-алгебру $\mathfrak{B}_0(\mathbb{Y},\rho)$, порожденную шарами (так называемую *шаровую* σ-алгебру):

$$\mathfrak{B}_0(\mathbb{Y},\rho) := \sigma((y)_\varepsilon : y \in \mathbb{Y},\ \varepsilon > 0).$$

Шаровая σ-алгебра: (a) достаточно богата (ей принадлежат все множества B, представляющие практический интерес, см. примеры), (b) она включена в $\mathfrak{A}(\mathbb{Y})$, (c) для нее сохраняются все проведенные выше рассмотрения, если с самого начала случайные элементы η_n предполагать заданными на измеримом пространстве $\langle \mathbb{Y}, \mathfrak{B}_0(\mathbb{Y},\rho)\rangle$, и в определениях 1.1, 2.1 борелевскую σ-алгебра заменить шаровой. Таким образом, для несепарабельных пространств $(\mathbb{Y},\rho)$ полученные выше результаты также могут быть использованы, но при предложенной модификации измеримого пространства (очевидно, что в этом случае доказательства всех без исключения утверждений сохраняются).

С описанной выше ситуацией мы уже отчасти встречались в примере 6.2(b), где рассматривались траектории случайных блужданий в пространстве $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{C}})$. Как известно, это пространство несепарабельно. Аналогичная ситуация имеет место в примере, рассмотренном в разд. 8.2 ниже.

8. П.б.у. для полиномиальных распределений. Теорема Санова. Рассмотрим еще два связанных между собой примера реализации л.п.б.у.

8.1. Полиномиальное распределение. Пусть ξ_j — независимые d-мерные случайные векторы с полиномиальным распределением, т. е. ξ_j принимает значения $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (единица стоит на i-м месте) с вероятностью $p_i > 0$, где $\sum p_i = 1$. Если положить, как и прежде, $S_n := \sum\limits_{j\le n} \xi_j$, и через k обозначить вектор $k = (k_1,\dots,k_d)$ с целочисленными координатами, $\sum\limits_{j\le n} k_i = n$, то в силу известной локальной теоремы можно в явном виде найти асимптотику вероятности $\mathbf{P}(S_n = k)$ при $n \to \infty$ (см., например, теорему 3.2.4

в [10]). Из нее следует, в частности, что

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \exp\{-nD(k/n) + O(\ln n)\},$$

где для $y = (y_1, \dots, y_d)$, $y_k \geq 0$, $k = 1, \dots, d$,

$$D(y) = \sum_{i=1}^{d} y_i \ln(y_i/p_i).$$

Если положить $\eta_n = \frac{S_n}{n}$, $y = \frac{k}{n}$, то получим, что при $n \to \infty$

$$\ln \mathbf{P}(\eta_n = k) \sim -nD(y).$$

Это означает, что справедлив л.п.б.у. в «очень сильной» локальной форме. Из него, конечно, нетрудно извлечь л.п.б.у. в обычной форме (см. определение 1.1) и п.б.у. (множество $D_v := \{y : D(y) \leq v\}$ — компакт в $\mathbb{R}^d$ при любом $v \geq 0$).

8.2. Теорема Санова. Рассмотрим выборку $X = (x_1, \dots, x_n)$ из распределения $\mathbf{F}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{G}$ — какое-нибудь другое распределение на $\mathbb{R}$ и $\mathbf{F}_n$ — эмпирическое распределение, построенное по выборке X. Разобьем вещественную ось на конечное число d полуинтервалов $(\Delta_1, \dots, \Delta_d) =: \Delta$ так, что $\mathbf{F}(\Delta_i) > 0$ при всех i. Случайный вектор $\mathbf{F}_n(\Delta) := (\mathbf{F}_n(\Delta_1), \dots, \mathbf{F}_n(\Delta_d))$ можно интерпретировать как сумму $\frac{S_n}{n}$, соответствующую полиномиальному распределению, описанному в разд. 8.1 при $p_i = \mathbf{F}(\Delta_i) > 0$, $i = 1, \dots, d$. Поэтому при $n \to \infty$, $y = \mathbf{G}(\Delta) := (\mathbf{G}(\Delta_1), \dots, \mathbf{G}(\Delta_d))$ для вектора $\mathbf{F}_n(\Delta)$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\mathbf{F}_n(\Delta) \in (y)_\varepsilon) \sim -D((y)_\varepsilon) = -\inf \sum_{i=1}^{d} \tilde{y}_i \ln(\tilde{y}_i/p_i), \tag{8.1}$$

где inf берется по множеству $\tilde{y} \in (y)_\varepsilon$, $\tilde{y}_i \geq 0$, $\sum\limits_{1 \leq i \leq d} \tilde{y}_i = 1$. Здесь в $\mathbb{R}^d$ в качестве метрики ρ можно взять либо евклидову метрику, либо, скажем, «равномерную» метрику $\rho(y, \tilde{y}) = \max\{|Y_j - \widetilde{Y}_j|\}$, $Y_j = \sum\limits_{i \leq j} y_i$, $\widetilde{Y}_j$ определяется аналогично. При малых ε правая часть в (8.1) близка к

$$-D(\mathbf{G}(\Delta)) = -\sum_{i=1}^{d} \mathbf{G}(\Delta_i) \ln \frac{\mathbf{G}(\Delta_i)}{\mathbf{F}(\Delta_i)}.$$

В [15] путем предельного перехода при d, растущем вместе с n, найдена логарифмическая асимптотика вероятности того, что $\mathbf{F}_n$ принадлежит некоторой специальной окрестности распределения $\mathbf{G}$. Там же утверждается, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\mathbf{F}_n \in (\mathbf{G})_\varepsilon) = -K(\mathbf{G}, \mathbf{F}), \tag{8.2}$$

где $K(\mathbf{G}, \mathbf{F}) = \int \ln \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{F}} d\mathbf{G}$ — расстояние Кульбаха — Лейблера между распределениями $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$. Распределения $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}_n$ можно отождествить с соответствующими функциями распределения F, G, F_n и в качестве пространства $(\mathbb{Y}, \rho)$ выбрать пространство $\mathbb{V}^{\uparrow}$ всех неубывающих функций ограниченной вариации на вещественной прямой с равномерной метрикой $\rho_{\mathbb{C}}$. Но, как нетрудно видеть, метрическое пространство $(\mathbb{V}^{\uparrow}, \rho_{\mathbb{C}})$ несепарабельно (множество функций распределения $F^{(v)}$, сосредоточенных в точке v, несчетно, и $\rho_{\mathbb{C}}(F^{(v)}, F^{(u)}) = 1$ для любых $v \neq u$). Поэтому соотношение (8.2) можно трактовать как л.п.б.у. в пространстве $(\mathbb{V}^{\uparrow}, \rho_{\mathbb{C}})$ относительно шаровой σ-алгебры $\mathfrak{B}_0(\mathbb{V}^{\uparrow}, \rho_{\mathbb{C}})$. При этом, как показано в [BBUVFP], имеет место и р.п.б.у. (совпадающий с «обычным» п.б.у.) в том же пространстве $(\mathbb{V}^{\uparrow}, \rho_{\mathbb{C}})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12, № 4. С. 635–654.
2. *Varadhan S. R. S.* Asymptotic probabilities and differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 19, N 3. P. 261–286.
3. *Пухальский А. А.* К теории больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 3. С. 490–497.
4. *Varadhan S. R. S.* Large deviations // Ann. Probab. 2008. V. 36, N 2. P. 397–419.
5. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Расширенный принцип больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II // Теория вероятностей и ее применения. (В печати).
6. *Боровков А. А.* Расширенный принцип больших уклонений для траекторий случайных блужданий при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. (В печати).
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
8. *Боровков А. А., Могульский А. А* Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов и для траекторий случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. (В печати).
9. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Т. 1. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит АНО, 2008.
10. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009.
11. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992.
12. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 2. С. 260–294.
13. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 4. С. 641–673.
14. *Могульский А. А.* Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 2. С. 309–323.
15. *Санов И. И.* О вероятности больших отклонений случайных величин // Мат. сб. 1957. Т. 42, № 1. С. 14–44.

Статья поступила 1февраля 2010 г.

Боровков Александр Алексеевич, Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2
borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru