*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2011. Том 52, № 3*

*УДК 517.55*

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ РАНГА 3

**М. А. Шевелин**

**Аннотация.** Доказано, что каждый автоморфизм конечного порядка свободной алгебры Ли ранга 3 над алгебраически замкнутым полем сопряжен с линейным, если характеристика поля не делит порядок автоморфизма.

**Ключевые слова:** свободная алгебра Ли, группа автоморфизмов.

**1.** В 2004 г. И. П. Шестаковым и У. У. Умирбаевым [1, 2] решена проблема Нагаты о существовании диких автоморфизмов алгебры многочленов от трех неизвестных. В последовавших за этим работах [3, 4] У. У. Умирбаев нашел определяющие соотношения для группы ручных автоморфизмов алгебры многочленов от трех неизвестных и в группе автоморфизмов свободной конечно порожденной алгебры шрейерова многообразия. Дренски в работе [5] и В. М. Петроградский в [6] изучали алгебры инвариантов конечных групп, действующих на свободной конечно порожденной алгебре Ли при помощи линейных преобразований пространства $W$, натянутого на фиксированное множество $x_1, \dots, x_r$ свободных порождающих. Первый из этих авторов доказал при слабых предположениях, что такие алгебры инвариантов (кроме тривиальных случаев) не являются конечно порожденными, а второй автор более точно описал порождающие множества алгебр инвариантов в терминах производящих функций. Кон в работе [7] доказал, что каждая конечная группа автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры ранга 2 над телом (централизующим порождающие) сопряжена с подгруппой группы линейных автоморфизмов, если порядок группы не делится на характеристику тела.

В этой работе мы изучаем расположение произвольных элементов конечного порядка в группе автоморфизмов свободной алгебры Ли ранга три. Пусть $K$ — произвольное поле, $r$ — натуральное число. Через $F_r$ обозначаем свободную алгебру Ли с множеством свободных порождающих $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. Умножение в $F_r$ обозначаем как коммутатор $x, y \mapsto [x, y]$. Члены нижнего центрального ряда определяются по индукции: $F_r^1 = F_r$, $F_r^k = \left[F_r^{k-1}, F_r\right]$. Подалгебру, порожденную множеством $S$, обозначаем через $\langle S\rangle$, векторное пространство $Kx_1 + Kx_2 + \dots + Kx_r \subset F_r$ — через $W$. Множество

$$I = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(F_r) \mid x_i\varphi \equiv x_i (\mathrm{mod}\ [F_r, F_r]) \text{ для всех } i \in \{1, \dots, r\}\}$$

является нормальной подгруппой в $\mathrm{Aut}(F_r)$. В $\mathrm{Aut}(F_r)$ имеется также подгруппа

$$\{\varphi \in \mathrm{Aut}(F_r) \mid W\varphi = W\},$$

изоморфная $GL(W)$. Эта группа называется *группой линейных автоморфизмов*, и чтобы не усложнять обозначений, мы обозначаем ее через $GL(W)$. Автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_r)$ полностью определен, если известно действие $\varphi$ на порождающие $x_1, \dots, x_r$. В этой ситуации удобно писать $(x_1, \dots, x_r)\varphi = (x_1\varphi, \dots, x_r\varphi)$. Автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_r)$ называется *элементарным*, если для некоторого целого числа $j$ выполнено равенство

$$(x_1, \dots, x_j, \dots, x_r)\varphi = (x_1, \dots, \alpha x_j + u, \dots, x_r), \tag{1}$$

причем $1 \leq j \leq r$, $u \in \langle x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_r\rangle$ и $\alpha \in K \setminus \{0\}$.

Для двух элементов $x, y$ из некоторой группы через $x^y$ обозначается элемент $y^{-1}xy$, а через $(x, y)$ — коммутатор $x^{-1}y^{-1}xy$. Коммутант алгебры Ли $L$ обозначаем через $L'$.

Цель этой работы — доказательство следующего результата.

**1.1. Теорема.** *Пусть $K$ — алгебраически замкнутое поле, $g$ — элемент в $\mathrm{Aut}(F_3)$ конечного порядка $n$. Допустим, что число $n$ не делится на характеристику поля $K$. Тогда $g$ сопряжен в $\mathrm{Aut}(F_3)$ с некоторым элементом группы $GL(W)$.*

П. 2 является вводным. В п. 3 выписаны определяющие соотношения для группы автоморфизмов алгебры $F_r$ из работы [4], которая служит исходной точкой для настоящей статьи. Ключевую роль в нашей аргументации играет предложение 4.2, которое выводится в п. 9 из основного результата работы [4] при помощи метода Рейдемейстера — Шрейера. Доказательство основной теоремы изложено в п. 7. В п. 8 разобран простой пример, призванный проиллюстрировать метод доказательства теоремы 1.1.

План доказательства теоремы 1.1 следующий. Сначала из определяющих соотношений (2)–(4) для группы $\mathrm{Aut}(F_r)$ с использованием специфики случая $r = 3$ выводятся определяющие соотношения для подгруппы $I$ автоморфизмов, действующих тождественно по модулю коммутанта. Из этих соотношений следует, что группа $I$ раскладывается в свободное произведение (бесконечного числа) своих подгрупп. Теорема Серра позволяет построить из этого произведения дерево $T$. Элемент конечного порядка $g \in \mathrm{Aut}(F_3)$ определяет автоморфизм конечного порядка $\Psi(g)$ дерева $T$, сохраняющий ориентацию, $\Psi(g)$ подобран таким образом, что его неподвижные вершины соответствуют элементам $w \in \mathrm{Aut}(F_3)$, сопряжение которыми переводит $g$ в линейный автоморфизм.

**2.** Нам потребуются некоторые известные утверждения о группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_r)$.

**2.1. Предложение.** *Группа $\mathrm{Aut}(F_r)$ является расщепляемым расширением $I$ с помощью $GL(W)$. Если поле $K$ имеет положительную характеристику, то порядки периодических элементов группы $I$ делятся на характеристику поля $K$, в противном случае группа $I$ не имеет кручения.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе, заметим, что базис Холла (см. [8]) свободной алгебры Ли $F_r$ согласован с нижним центральным рядом. Поэтому для каждого $0 \neq f \in F_r$ можно найти единственное натуральное число $\nu(f)$ со свойством $f \in F_r^{\nu(f)} \setminus F_r^{\nu(f)+1}$. Поясним, что $\nu(f)$ — это степень младшего одночлена, входящего с ненулевым коэффициентом в разложение элемента $f$ по базису Холла.

Если $1 \neq \varphi \in I$, то

$$(x_1, \dots, x_r)\varphi = (x_1 + u_1, \dots, x_r + u_r) \quad (u_i \in F_r').$$

Отсюда следует, что при $k > 0$ выполнены равенства

$$(x_1, \dots, x_r)\varphi^k = (x_1 + ku_1 + w_1, \dots, x_r + ku_r + w_r).$$

Либо каждый из элементов $w_i$ $(1 \leq i \leq r)$ нулевой, либо $\nu(w_i) > \nu(u_i)$. Поэтому из предположения $\varphi^k = 1$ вытекает, в частности, что $ku_i = 0$ при $1 \leq i \leq r$. Найдется $i \in \{1, \dots, r\}$, для которого $u_i \neq 0$. Следовательно, $k = 0$ в $K$.

**2.2.** В работе Кона [9] доказано, что группа $\mathrm{Aut}(F_r)$ порождена элементарными автоморфизмами.

**3.** В работе У. У. Умирбаева [4], продолжившей цикл работ о группах автоморфизмов приведенно свободных алгебр, (среди прочего) найдено множество определяющих соотношений группы $\mathrm{Aut}(F_r)$ относительно порождающего множества, состоящего из элементарных автоморфизмов. А именно, обозначим автоморфизм, определенный правилом (1), через $\varphi(j, \alpha, u)$. Тогда соотношения

$$\varphi(i, \alpha, u)\varphi(i, \beta, v) = \varphi(i, \alpha\beta, \alpha v + u) \quad (u, v \in \langle X \setminus \{x_i\}\rangle), \tag{2}$$

$$\varphi(i, \alpha, u)^{\varphi(j,\beta,v)} = \varphi(i, \alpha, u\varphi(j, \beta, v)) \quad (v \in \langle X \setminus \{x_i, x_j\}\rangle), \tag{3}$$

$$\varphi(i, \alpha, u)^{\theta} = \varphi(i\theta, \alpha, u\theta) \tag{4}$$

составляют множество определяющих соотношений группы $\mathrm{Aut}(F_r)$ [3, теорема 1]. В соотношении (4) через $\theta$ обозначена перестановка множества $\{1, \dots, r\}$, а также автоморфизм, соответствующим образом переставляющий порождающие. Мы предполагаем, что в левой части соотношения (4) автоморфизм $\theta$ представлен в виде произведения элементарных (линейных) автоморфизмов и что $1 \leq i, j \leq r$. Отметим также, что в [4] соотношение (4) написано только для автоморфизмов, соответствующих транспозициям $\theta \in S_n$.

Пусть $\rho \in I$. Разложим автоморфизм $\rho$ на произведение элементарных автоморфизмов:

$$\rho = \lambda_1\varphi_1\lambda_2\varphi_2 \dots \lambda_l\varphi_l\lambda_{l+1}.$$

В этом разложении символы $\varphi$ обозначают порождающие вида

$$\varphi(k, 1, u) \quad (u \in \langle X \setminus \{x_k\}\rangle'),$$

а символы $\lambda$ — произведения элементарных линейных автоморфизмов. Переставляя символы $\lambda$ налево при помощи равенства $\varphi\lambda = \lambda\varphi^{\lambda}$, получаем, что $I$ порождается множеством автоморфизмов вида $\varphi(i, 1, u)^{\lambda}$ $(u \in F_3', \lambda \in GL(W))$.

Начиная с этого момента, предполагаем, что $r = 3$.

**4. Лемма.** *Существует множество представителей $C_1 \subset SL_3(K)$ правых смежных классов группы $SL_3(K)$ по подгруппе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SL_2(K) \end{pmatrix}$, инвариантное относительно действия группы диагональных матриц на $SL_3(K)$ сопряжениями.*

Доказательство. Требуется найти однозначно определенную нормальную форму $\bar{a}$, к которой можно привести заданную матрицу

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ a_2 & * & * \\ a_3 & * & * \end{pmatrix} \in SL_3(K)$$

при помощи умножения ее подматрицы, состоящей из двух последних столбиков, слева на матрицу $g \in SL_2(K)$. В зависимости от числа $s$ ненулевых миноров, содержащихся в этих двух последних столбиках, и их расположения возможны лишь семь вариантов. Для каждого из этих вариантов в нижеследующем списке выбрана нормальная форма $\bar{a}$. Первые три варианта соответствуют $s = 1$, варианты 4–6 — $s = 2$ и вариант 7 — $s = 3$. Определители всех матриц из списка равны 1, через $d$ обозначено значение некоторого ненулевого минора порядка 2, расположенного в последних двух столбиках матрицы $a$.

Вариант 1. $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -a_3^{-1} \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант 2. $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2^{-1} & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 3. $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1^{-1} & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 4. $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c \\ a_2 & d & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$

Вариант 5. $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & c & 0 \\ a_2 & d & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$

Вариант 6. $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & d & 0 \\ a_2 & 0 & c \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$

Вариант 7. $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ a_2 & d & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,\ c \neq 0.$

В каждом из вариантов элементы матрицы $\bar{a}$ подобраны так, чтобы при сопряжении $\bar{a}$ диагональной матрицей получалась матрица такого же вида, что и $\bar{a}$. Например, для варианта 1 имеем ($\alpha$, $\beta$, $\gamma \in K$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -a_3^{-1} \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -\frac{\alpha}{\gamma} a_3^{-1} \\ \frac{\beta}{\alpha} a_2 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha} a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -(\frac{\gamma}{\alpha} a_3)^{-1} \\ \frac{\beta}{\alpha} a_2 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha} a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

**4.1.** Замечание. Относительно еще двух вложений $SL_2$ в $SL_3$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(K)$, очевидно, справедливы утверждения, аналогичные лемме 4. Соответствующие множества представителей обозначаем через $C_2$ и $C_3$ соответственно.

**4.2. Предложение.** *Пусть $\mu \in C_j$ $(1 \le j \le 3)$. Обозначим подгруппу в $I$, порожденную множеством $\{\varphi(j,1,u)^{\mu}) \mid u \in \langle X \setminus \{x_j\}\rangle'\}$, через $I_j^{\mu}$. Тогда*

$$I = *\big\{I_j^{\mu} \mid 1 \le j \le 3,\ \mu \in C_j\big\}.$$

Это предложение будет доказано в п. 9.

**5.** В доказательстве теоремы 1.1 будет использовано описание Серра свободных произведений с объединенной подгруппой в терминах действий на деревьях. Коротко напомним, о чем идет речь.

*Графом* называется ориентированный 1-комплекс, 1-клетки графа называются *ребрами*, 0-клетки — *вершинами.* Для каждого ребра $e$ через $\bar{e}$ обозначается обратное ребро, т. е. то же множество, что и $e$, только с противоположной ориентацией. Через $h(e)$ и $t(e)$ обозначаются начало и конец ребра $e$ соответственно. Очевидно, $h(\bar{e}) = t(e)$. *Путем* в графе называется последовательность (возможно, пустая) ребер $e_1, e_2, \dots, e_s$, в которой $t(e_i) = h(e_{i+1})$ $(i = 1, \dots, s-1)$. Путь называется *приведенным*, если в нем нет соседних взаимно обратных ребер. *Петлей* называется путь, у которого начало первого ребра совпадает с концом последнего. *Деревом* называется граф, не содержащий непустых приведенных петель.

**5.1. Теорема Серра** [10]. *Группа $H$ раскладывается в свободное произведение*

$$H = H_1 *_{H_2} H_3 \tag{5}$$

*своих подгрупп $H_1$ и $H_3$ с объединенной подгруппой $H_2$ $(H_2 < H_1,\ H_2 < H_3)$ тогда и только тогда, когда найдется дерево $T$, на котором $H$ действует как группа автоморфизмов, причем ребро $e$ дерева $T$ является фундаментальной областью для этого действия. При этом $H_1$ и $H_3$ — стабилизаторы вершин ребра $e$, а $H_2$ — стабилизатор ребра $e$.*

*Если $H$ раскладывается в свободное произведение с объединенной подгруппой (5), то дерево $T$ можно получить следующим образом. Каждое ребро $T$ — смежный класс $H_2x$, а каждая его вершина — смежный класс $H_1x$ или смежный класс $H_3x$ $(x \in H)$; начало ребра $H_2x$ — $H_1x$, а конец — $H_3x$.*

Слова «$e$ является фундаментальной областью» означают здесь, что каждое ребро дерева $T$ получается из $e$ под действием некоторого элемента группы $H$ и каждая вершина получается при действии некоторого элемента группы $H$ из одной и только одной вершины $h(e)$ или $t(e)$.

Здесь уместно напомнить известное утверждение, которым мы будем пользоваться.

**5.2. Предложение** [10, гл. I, п. 6.3.1]. *Конечная группа $G$, действующая на дереве $T$ при помощи автоморфизмов дерева, имеет неподвижную вершину.*

**6. Предложение.** *Пусть $A$ — группа, $L$, $I$, $G$ — ее подгруппы. Допустим, что $I$ — нормальная подгруппа, $A = L \cdot I$, $L \cap I = 1$, $G$ — периодическая группа и порядки элементов $I$ отличны от порядков всех элементов группы $G$. Тогда множество*

$$\{l \in L \mid lz \in G \text{ для некоторого } z \in I\}$$

*есть подгруппа в $L$, изоморфная $G$.*

Доказательство. Каждый элемент $g \in G$ имеет единственную запись вида $g = \lambda(g)\sigma(g)$ $(\lambda(g) \in L,\ \sigma(g) \in I)$. Отображение $g \mapsto \lambda(g)$ является изоморфизмом, поскольку $\lambda(g) = 1$ влечет $g \in I$ в противоречие с условием на порядки элементов группы $I$.

**6.1.** Замечание. Наш подход к доказательству теоремы 1.1 состоит в том, чтобы найти элемент из $\mathrm{Aut}(F_3)$, сопряжение которым переводит $g$ в его «линейную часть» $\lambda(g)$.

**7.** Доказательство теоремы 1.1. Элемент $g$ может быть единственным образом записан в виде

$$g = \lambda(g)\sigma(g) \quad (\lambda(g) \in GL(W),\ \sigma(g) \in I).$$

Выберем такой базис пространства $W$, относительно которого $\lambda(g)$ имеет диагональную матрицу. Поскольку переход к такому базису изменяет элементы группы $\mathrm{Aut}(F_3)$ на сопряженные, далее считаем, что $x_1, x_2, x_3$ — именно такой базис пространства $W$. Циклическую группу, порожденную $g$, обозначаем через $G$.

Каждая из групп $I_j^1$ (см. предложение 4.2), построенных по выбранному множеству порождающих, переходит в себя при действии группы $\lambda(G)$ на $I$ сопряжениями. Например, пусть $\lambda \in \lambda(G)$, $\sigma \in I_1^1$, $x_i\lambda^{-1} = \mu_i x_i$, $x_1\sigma = x_1 + u$, $x_2\sigma = x_2$, $x_3\sigma = x_3$ ($u \in \langle x_2, x_3\rangle'$, $0 \neq \mu_i \in K$, $1 \leq i \leq 3$). Тогда

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3)\lambda^{-1}\sigma\lambda &= (\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \mu_3 x_3)\sigma\lambda \\ &= (\mu_1 x_1 + \mu_1 u, \mu_2 x_2, \mu_3 x_3)\lambda = (x_1 + \mu_1 u\lambda, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Обозначим через $J_i$ подгруппу, порожденную множеством

$$\{\varphi(i, 1, u)^\mu \mid u \in \langle X \setminus \{x_i\}\rangle',\ \mu \in C_i\}.$$

Построим граф $T$ с множеством ребер $E$ и множеством вершин $V$, где

$$E = \{J_2 w \mid w \in I\}, \quad V = \{(J_1 * J_2)w \mid w \in I\} \cup \{(J_2 * J_3)w \mid w \in I\}.$$

Положим $h(J_2 w) = (J_1 * J_2)w$, $t(J_2 w) = (J_2 * J_3)w$, $\overline{(J_1 * J_2)w} = (J_2 * J_3)w$. (Напомним, что верхней чертой обозначено обратное ребро). Из предложения 4.2 по теореме Серра 5.1 следует, что граф $T$ является деревом.

Определим отображение $\Psi$ группы $G$ в множество перестановок множества $E$ правилом

$$(J_2 x)\Psi(g) = J_2 x^{\lambda(g)}\sigma(g).$$

(При $x \in I$ очевидно, что $x^{\lambda(g)} \in I$. По определению элемента $\sigma(g)$ имеем $\sigma(g) \in I$. Поэтому произведение $x^{\lambda(g)}\sigma(g)$ лежит в $I$ и, следовательно, правая часть предыдущего равенства является ребром.) Отображение группы $G$ в множество перестановок множества $V$, которое элементу $g \in G$ ставит в соответствие перестановку, отправляющую смежный класс $(J_1 * J_2)x$ в смежный класс $(J_1 * J_2)x^{\lambda(g)}\sigma(g)$, а смежный класс $(J_2 * J_3)x$ в смежный класс $(J_2 * J_3)x^{\lambda(g)}\sigma(g)$, будем тоже обозначать через $\Psi$. Отображение $\Psi$ в обоих случаях определено корректно, потому что, как следует из определения множеств $C_i$ (см. п. 4), при сопряжениях элементами $\lambda(G)$ группы $J_1, J_2, J_3$ инвариантны. Например, пусть $E \ni e = J_2 x = J_2 y$. Тогда

$$(J_2 x)\Psi(g) = J_2 x^{\lambda(g)}\sigma(g) = (J_2 x)^{\lambda(g)}\sigma(g) = (J_2 y)\Psi(g).$$

Проверка корректности для вершин аналогична.

Проверим, что $\Psi$ — гомоморфизм групп. Если $\Psi(G)$ действует на ребрах, то при $g, h \in G$ получаем

$$\begin{aligned}(J_2 x)\Psi(gh) &= J_2 x^{\lambda(gh)}\sigma(gh) J_2 x^{\lambda(g)\lambda(h)}\sigma(g)^{\lambda(h)}\sigma(h) \\ &= J_2(x^{\lambda(g)}\sigma(g))^{\lambda(h)}\sigma(h) = (J_2 x^{\lambda(g)}\sigma(g))\Psi(h) = ((J_2 x)\Psi(g))\Psi(h).\end{aligned}$$

Точно так же проверяется гомоморфность $\Psi$ в случае действия на вершинах.

Поясним, почему $\Psi(G)$ действует на $T$ при помощи автоморфизмов дерева $T$, сохраняющих ориентацию. Пусть $e \in E$, $h(e) = v \in V$, $e = J_2w$, $v = (J_1 * J_2)w$. Тогда для всех $g \in G$ получаем

$$h(e\Psi(g)) = h(J_2w^{\lambda(g)}\sigma(g)) = (J_1 * J_2)w^{\lambda(g)}\sigma(g)$$
$$= ((J_1 * J_2)w)^{\lambda(g)}\sigma(g) = (h(e))\Psi(g).$$

Если $e_1, e_2$ — два ребра с общей вершиной $v$, например $e_1 = J_2w_1$, $e_2 = J_2w_2$, $v = (J_1 * J_2)w_1 = (J_1 * J_2)w_2$, то для каждого $g \in G$

$$h(e_1\Psi(g)) = (J_1 * J_2)w_1^{\lambda(g)}\sigma(g) = ((J_1 * J_2)w_1)^{\lambda(g)}\sigma(g)$$
$$((J_1 * J_2)w_2)^{\lambda(g)}\sigma(g) = (J_1 * J_2)w_2^{\lambda(g)}\sigma(g) = h(e_2\Psi(g)).$$

Тем самым образы имеют общее начало $v\Psi(g)$.

Ориентация при действии $\Psi$ сохраняется потому, что, во-первых, $\lambda(G)$ переводит группы $J_1 * J_2$ и $J_2 * J_3$ в себя, а во-вторых, равенство смежных классов $(J_1 * J_2)w_1 = (J_2 * J_3)w_2$ для некоторых $w_1, w_2 \in I$ влечет

$$w_1w_2^{-1} \in (J_1 * J_2) \cap (J_2 * J_3) = J_2 \quad \text{и} \quad J_1 * J_2 = J_2 * J_3,$$

что, очевидно, неверно. Значит, начало ребра не может переходить в конец образа этого ребра. Этим установлено, что $\Psi$ определяет действие $G$ на $T$ при помощи автоморфизмов $T$, сохраняющих ориентацию.

Согласно 5.2 в этом случае действие $\Psi$ имеет неподвижную вершину, например, $(J_1 * J_2)w$. Это значит, что для всех $g \in G$ справедливо равенство

$$(J_1 * J_2)w^{\lambda(g)}\sigma(g) = (J_1 * J_2)w,$$

или, что то же,

$$w\lambda(g)\sigma(g)w^{-1} = wgw^{-1} \in \lambda(g)(J_1 * J_2).$$

Последнее включение позволяет нам предполагать (изменив группу $G$ на сопряженную с ней группу $G^{w^{-1}}$), что $\sigma(G) \subset J_1 * J_2$ и, следовательно,

$$(J_1 * J_2)\Psi(G) \subseteq (J_1 * J_2)\sigma(G) \subseteq (J_1 * J_2) \cdot (J_1 * J_2) = J_1 * J_2. \tag{6}$$

Снова рассмотрим дерево $T_1$, каждое ребро которого есть элемент $w \in J_1 * J_2$, а каждая вершина — смежный класс $J_1w$ или смежный класс $J_2w$ ($w \in J_1 * J_2$). Начало и конец ребра $w$ определим формулами $h(w) = J_1w$ и $t(w) = J_2w$. Благодаря свойству (6) $\Psi$ снова определяет действие группы $G$ на $T_1$ при помощи автоморфизмов дерева $T_1$. Из предложения 5.2 следует существование неподвижной вершины. Пусть неподвижная вершина этого действия будет, например, $J_1w$. Тогда опять получаем

$$wGw^{-1} \subset \lambda(G)J_1, \quad \sigma(G^{w^{-1}}) \subset J_1.$$

Заменив $G$ на $G^{w^{-1}}$, считаем, что $\sigma(G) \subset J_1$. Группа $J_1$ является свободным произведением (см. предложение 4.2), и, следовательно, на ней имеется стандартная функция длины, связанная с нормальными формами элементов $x \mapsto |x|$ [11, с. 192]. Положим $|\lambda(g)\sigma(g)| = |\sigma(g)|$.

Среди элементов, сопряженных с $g$ при помощи элементов из $J_1$, выберем элемент минимальной длины $m$ и допустим, что $m > 1$. Мы хотим получить противоречие. Можно считать, что сам $g = \lambda(g)\prod\limits_{i=1}^{m}\sigma_i^{\mu_i}$ и есть элемент минимальной длины. Здесь $\sigma_i \in I_1$, $\mu_i \in C_1$. Поскольку $g^n = 1$ и $\lambda(g)^n = 1$, то

$$\begin{aligned}1 = g^n = \lambda(g)^n \prod_{j=n-1}^{0}\prod_{i=1}^{m}\sigma_i^{\mu_i\lambda(g)^j} &= \prod_{j=n-1}^{0}\prod_{i=1}^{m}\sigma_i^{\mu_i\lambda(g)^j}\\ &= \prod_{j=n-1}^{0}\prod_{i=1}^{m}\sigma_i^{\lambda(g)^j\mu_i^{\lambda(g)^j}} = \prod_{j=n-1}^{0}\prod_{i=1}^{m}{\sigma'}_{ij}^{\mu_{ij}}, \qquad (7)\end{aligned}$$

где $\sigma'_{ij} = \sigma_i^{\lambda(g)^j} \in I_1$, $\mu_i \in C_1$, $\mu_{ij} = \mu_i^{\lambda(g)^j} \in C_1$. Заметим, что, во-первых, последнее произведение в (7) лежит в свободном произведении $*\{I_1^{\mu} \mid \mu \in C_1\}$ и, во-вторых, запись, использованная для этого элемента, не является его нормальной формой. Поэтому либо $\mu_i = \mu_{i+1}$ для некоторого $i = 1, \dots, m-1$, либо $I_1^{\mu_m\lambda(g)} = I_1^{\mu_1}$. Первая из возможностей исключается предположением о минимальности $m$, вторая — тоже, поскольку по причине равенства $I_1^{\mu_m\lambda(g)} = I_1^{\mu_1}$ оба элемента $\sigma_m^{\mu_m\lambda(g)}$ и $\sigma_1^{\mu_1}$ лежат в $I_1^{\mu_1}$ и поэтому $\sigma_m^{\mu_m\lambda(g)}\sigma_1^{\mu_1} = \sigma^{\mu_1}$ для некоторого $\sigma \in I_1$. Тем самым для элемента $\sigma_m^{\mu_m} g \sigma_m^{-\mu_m}$, сопряженного с $g$ посредством $\sigma_m^{-\mu_m} \in J_1$, получаем

$$\left|\sigma_m^{\mu_m} g\sigma_m^{-\mu_m}\right| = \left|\lambda(g)\big(\sigma_m^{\mu_m\lambda(g)}\sigma_1^{\mu_1}\big)\dots\sigma_{m-1}^{\mu_{m-1}}\right| = \left|\lambda(g)\sigma^{\mu_1}\dots\sigma_{m-1}^{\mu_{m-1}}\right| \le m-1.$$

Полученное противоречие показывает, что $m = 1$, $g = \lambda(g)\sigma^{\mu}$ ($\sigma \in I_1$, $\mu \in C_1$). Сопряжение элементом $\mu^{-1}$ позволяет считать, что $\mu = 1$.

Группа $I_1$ изоморфна аддитивной группе векторного пространства

$$\langle x_2, x_3\rangle' \cong F_2'$$

и поэтому коммутативна. Из всех элементов группы $I_1$ извлекается единственный корень $n$-й степени. Рассмотрим элемент

$$w = \Big(\prod_{x\in G}\sigma(x)\Big)^{n^{-1}} \in I_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\lambda(g), w) &= \Big(\prod_{x\in G}\sigma(x)\Big)^{-n^{-1}\lambda(g)}\Big(\prod_{y\in G}\sigma(y)\Big)^{n^{-1}}\\ &= \Big(\prod_{x\in G}\sigma(x)^{-\lambda(g)}\Big)^{n^{-1}}\Big(\prod_{y\in G}\sigma(y)\Big)^{n^{-1}} = \Big(\prod_{x\in G}\sigma(g)\sigma(xg)^{-1}\Big)^{n^{-1}}\Big(\prod_{y\in G}\sigma(y)\Big)^{n^{-1}}\\ &= \Big(\prod_{x\in G}\sigma(g)\sigma(x)^{-1}\sigma(x)\Big)^{n^{-1}} = \Big(\prod_{x\in G}\sigma(g)\Big)^{n^{-1}} = \sigma(g).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$w^{-1}\lambda(g)w = \lambda(g)\sigma(g) = g.$$

Теорема доказана.

**7.1.** Замечание. Для $r > 3$ основной момент предыдущего доказательства, разложение

$$I = *I_i^{\mu},$$

не имеет места (по крайней мере, если $\chi(K) \neq 2$). Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть подгруппу $IT_r$ группы $I$:

$$IT_r = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(F_r) \mid x_1\sigma = x_1 + u_2,\ x_2\sigma = x_2 + u_3, \dots, x_r\sigma = x_r\},$$

где через $u_i$ $(2 \leq i \leq r)$ обозначен элемент подалгебры $\langle x_i, \dots, x_r\rangle'$ алгебры $F_r$. Если $r = 3$, то группа $IT_r$ совпадает с $I_1^1$, однако при $r > 3$ группа $IT_r$ является разрешимой неабелевой группой, отличной от $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и не может содержаться в свободном произведении абелевых групп.

**8. Простой пример.** Проиллюстрируем часть предыдущего доказательства, связанную с применением теоремы Серра на простом примере. В этом пункте порождающие $F_3$ обозначаются через $x, y, z$. Если $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_3)$, то далее пишем просто $\varphi = (x\varphi, y\varphi, z\varphi)$ вместо $(x, y, z)\varphi = (x\varphi, y\varphi, z\varphi)$, $\sigma(g)$ и $\lambda(g)$ обозначают то же, что раньше.

Пусть дан автоморфизм $g$ свободной алгебры Ли $F_3$ с множеством свободных порождающих $x, y, z$ над полем $K$ характеристики, не равной 2, такой, что

$$g = (-x - 2[y, z] + 2[z, [x, z]], y + 2[x, z] - 2[z, [y, z]] + 2[z, [z, [x, z]]], z).$$

Прямая проверка показывает, что $g^2 = 1$. Очевидно, $\lambda(g) = (-x, y, z)$. Поэтому

$$\sigma(g) = \lambda(g)g = (x + 2[y, z] - 2[z, [x, z]], y + 2[x, z] - 2[z, [y, z]] + 2[z, [z, [x, z]]], z).$$

Для сокращения обозначений положим $\lambda = \lambda(g)$, $\sigma = \sigma(g)$. Наша задача найти такой элемент $\theta \in \mathrm{Aut}(F_3)$, что $g^\theta = \lambda$.

Разложим $\sigma$ на произведение элементарных автоморфизмов. Сначала проведем элементарные преобразования (см., например, [4]) с $\sigma$, пока не получим $(x, y, z) = 1$:

$$\begin{aligned}\sigma &= (x + 2[y, z] - 2[z, [x, z]], y + 2[x, z] - 2[z, [y, z]] + 2[z, [z, [x, z]]], z)\\ &\longrightarrow (x + 2[y, z] - 2[z, [x, z]], y + [x, z], z) \longrightarrow (x, y + [x, z], z) \longrightarrow (x, y, z).\end{aligned}$$

Записываем автоморфизмы, соответствующие элементарным преобразованиям:

$$\sigma_2 = (x, y - [x, z], z) \in I_2, \quad \sigma_1 = (x - 2[y, z], y, z) \in I_1,$$

$$\sigma_0 = (x, y - [x, z], z) = \sigma_2.$$

Для дальнейшего заметим, что

$$\sigma_1^{-\lambda} = \sigma_1, \quad \sigma_2^\lambda = \sigma_2^{-1}. \tag{8}$$

Разложение $\sigma$ на произведение элементарных автоморфизмов имеет вид

$$\sigma = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}.$$

Поскольку подгруппа $I_1 * I_2$ инвариантна относительно $\Psi(g)$, достаточно найти в ней неподвижный относительно $\Psi(g)$ элемент. Изобразим фрагмент дерева, построенного по свободному произведению $I_1 * I_2$ (стрелками указана ориентация ребер):

$$I_1 \xrightarrow{1} I_2 \xleftarrow{\sigma_2^{-1}} I_1\sigma_2^{-1} \xrightarrow{\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}} I_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \xleftarrow{\sigma} I_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}.$$

На вершинах этого дерева $\Psi(g)$ действует следующим образом:

$$I_1\Psi(g) = I_1^\lambda\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = I_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1};$$

$$I_2\Psi(g) = I_2^{\lambda}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = I_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1};$$
$$\big(I_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\big)\Psi(g) = I_2\sigma_1^{-\lambda}\sigma_2^{-\lambda}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = I_2\sigma_2^{-1} = I_2;$$
$$\big(I_1\sigma_2^{-1}\big)\Psi(g) = I_1\sigma_2^{-\lambda}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = I_1\sigma_2^{-1}.$$

Для вычисления образов в последних двух случаях использованы формулы (8). Мы обнаруживаем, что неподвижная вершина относительно $g$ — это $I_1\sigma_2^{-1}$.

Далее, имеем

$$g^{\sigma_2} = (x, y+[x,z], z)g\sigma_2 = (-x-2[y,z]+2[z,[x,z]], y+[x,z], z)\sigma_2$$
$$= (-x-2[y,z], y, z) = \lambda(x+2[y,z], y, z) \in \lambda I_1.$$

Из элемента $(x+2[y,z], y, z)$ группы $I_1$ извлекается корень:

$$(x+2[y,z], y, z)^{1/2} = (x+[y,z], y, z).$$

Положим $\rho = (x+[y,z], y, z)$. Тогда

$$g^{\sigma_2\rho^{-1}} = (x+[y,z], y, z)g^{\sigma_2}\rho^{-1} = (-x-[y,z], y, z)\rho^{-1} = (-x, y, z) = \lambda.$$

Таким образом, можно взять $\theta = \sigma_2\rho^{-1}$.

**9.** Доказательство предложения 4.2. Сначала заметим: в соотношении (3) можно предполагать, что $i \neq j$ (в противном случае получается тривиальное соотношение). Далее, при $r = 3$ условие на элемент $u$ из соотношения (3): $i \neq j$, $u \in \langle X \setminus \{x_i, x_j\}\rangle$, эквивалентно условиям $u = \gamma x_k$, $i \neq j \neq k$, $0 \neq \gamma \in K$ $(1 \leq i, j, k \leq 3)$.

Чтобы написать определяющие соотношения группы $I$ относительно порождающего множества, состоящего из элементов вида $\varphi(i, 1, f)^{\mu}$ $(f \in F_3'$, $\mu \in GL(W))$, используем метод Рейдемейстера — Шрейера [11, с. 92]. Для этого нужно выбрать шрейерову систему представителей левых смежных классов группы $\mathrm{Aut}(F_3)$ по подгруппе $I$ и применить переписывающий процесс Рейдемейстера — Шрейера $\tau$. Чтобы использовать хорошую систему представителей, удобно слегка изменить представление, указанное в (2)–(4). Введем новые символы $M(a)$ $(a \in GL(W))$ в дополнение к символам $\varphi(i, \alpha, f)$. Применение преобразований Титце показывает, что представление $(1 \leq i, j, k \leq 3)$

$$M(a)M(b)M(ab)^{-1}, \tag{i}$$
$$M(a)\varphi(i, \alpha, \beta x_j + \gamma x_k)M(a\varphi(i, \alpha, \beta x_j + \gamma x_k))^{-1} \ (a, b \in GL(W),\ i \neq j \neq k), \tag{ii}$$
$$\varphi(i, \alpha, f)\varphi(i, \beta, g)\varphi(i, \alpha^{-1}\beta^{-1}, -\alpha^{-1}\beta^{-1}f - \beta^{-1}g), \tag{iii}$$
$$\varphi(j, \beta, g)^{\varphi(i, \alpha, \gamma x_k)}\varphi(j, \beta^{-1}, -\beta^{-1}g\varphi(i, \alpha, \gamma x_k)) \quad (i \neq j \neq k), \tag{iv}$$
$$\varphi(i, \alpha, f)^{M(\theta)}\varphi(i\theta, \alpha^{-1}, -\alpha^{-1}f\theta) \tag{v}$$

относительно множества порождающих $\{\varphi(i, \alpha, f), M(a)\}$ определяет группу $\mathrm{Aut}(F_3)$. В соотношениях типа (v) через $\theta$ обозначены перестановка на множестве $\{1, 2, 3\}$, а также автоморфизм (очевидно, линейный), соответствующим образом переставляющий порождающие. Нам понадобятся еще несколько очевидных следствий соотношений (i)–(v):

$$M(1) = 1, \tag{vi}$$

$$\varphi(i, \alpha, f)^{\varphi(i, \beta, g)}\varphi(i, \alpha, \beta^{-1}f)^{-1}. \tag{vii}$$

Для элемента $f \in F_3$ через $l(f)$ и $c(f)$ обозначаем проекции $f$ на $W$ и $F_3'$ соответственно. Используя эти обозначения, из (iii) получаем

$$\varphi(i,\alpha,f)\varphi(i,1,\alpha^{-1}c(f))^{-1}\varphi(i,\alpha,l(f))^{-1}. \tag{viii}$$

Выберем в качестве (очевидно, шрейеровой) системы представителей левых смежных классов множество $\{M(a), a \in GL(W)\}$. Тогда представляющая функция $w \mapsto \overline{w}$ будет совпадать с отображением $w \mapsto M(l(w))$. Порождающий символ

$$s_{\varphi(i,\alpha,f),M} \quad (\text{слово } M \text{ определяет элемент из } GL(W))$$

соответствует при этом элементу группы $I$, определяемому словом

$$(\overline{\varphi(i,\alpha,f)M})^{-1}\varphi(i,\alpha,f)M = M^{-1}\overline{(\varphi(i,\alpha,f))}^{-1}\varphi(i,\alpha,f)M$$

(см. [11, с. 109, задача 25]), откуда следует, что $s_{M\varphi(i,\alpha,f),1} = s_{\varphi(i,\alpha,f),1}$. Будем писать $s^M_{\varphi(i,\alpha,f),1}$ вместо $s_{\varphi(i,\alpha,f),M}$, что не совсем корректно, но удобно для записи. Переписывающий процесс $\tau$ понадобится нам только для слов длины не больше четырех и будет выглядеть следующим образом:

$$\tau(a_1a_2a_3a_4) = s_{a_1,\overline{a_2a_3}\bar{a}_4} \cdot s_{a_2,\overline{a_3}\bar{a}_4} \cdot s_{a_3,\bar{a}_4} \cdot s_{a_4,1}.$$

Применяя $\tau$ к слову $\varphi(i,\alpha,f)\varphi(i,\beta,g)\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}f-\beta^{-1}g)$, получим

$$\begin{aligned}
&s_{\varphi(i,\alpha,f),\overline{\varphi(i,\beta,g)\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}f-\beta^{-1}g)}}\, s_{\varphi(i,\beta,g),\overline{\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}f-\beta^{-1}g)}}\\
&\qquad\times s_{\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}f-\beta^{-1}g),1}\\
&= s^{M(\varphi(i,\beta,l(g)))M(\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}l(f)-\beta^{-1}l(g)))}_{\varphi(i,\alpha,f),1}\, s^{M(\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}l(f)-\beta^{-1}l(g)))}_{\varphi(i,\beta,g),1}\\
&\qquad\times s_{\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}l(f)-\beta^{-1}l(g)),1}\\
&= s^{M(\varphi(i,\alpha^{-1},\alpha^{-1}l(f)+l(g)))}_{\varphi(i,1,\alpha^{-1}c(f)),1}\, s^{M(\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},-\alpha^{-1}\beta^{-1}l(f)-\beta^{-1}l(g)))}_{\varphi(i,1,\beta^{-1}c(g)),1}\, s_{\varphi(i,1,-c(f)-\alpha c(g)),1}\\
&= s^{M(\varphi(i,\alpha^{-1},0))}_{\varphi(i,1,\alpha^{-1}c(f)),1}\, s^{M(\varphi(i,\alpha^{-1}\beta^{-1},0))}_{\varphi(i,1,\beta^{-1}c(g)),1}\, s_{\varphi(i,1,-c(f)-\alpha c(g)),1}\\
&= s_{\varphi(i,1,c(f)),1}\, s_{\varphi(i,1,\alpha c(g)),1}\, s_{\varphi(i,1,-c(f)-\alpha c(g)),1}.
\end{aligned} \tag{ix}$$

Чуть более длинные выкладки показывают, что

$$\begin{aligned}
&\tau(\varphi(i,\alpha,\gamma x_k)^{-1}\varphi(j,\beta,g)\varphi(i,\alpha,\gamma x_k)\varphi(j,\beta,g\varphi(i,\alpha,\gamma x_k))^{-1})\\
&\qquad= s^{M(\varphi(i,\alpha,\gamma x_k))M(\varphi(j,\beta,l(g\varphi(i,\alpha,\gamma x_k)))^{-1})}_{\varphi(j,1,\beta^{-1}c(g)),1}\, s^{M(\varphi(j,\beta,l(g\varphi(i,\alpha,\gamma x_k))))^{-1}}_{\varphi(j,1,\beta^{-1}c(g\varphi(i,\alpha,\gamma x_k)))^{-1},1}
\end{aligned} \tag{x}$$

и что

$$\tau(\theta^{-1}\varphi(i,\alpha,f)\theta\varphi(i\theta,\alpha,f\theta)^{-1}) = s^{M(\theta)M(\varphi(i\theta,\alpha,l(f\theta)))^{-1}}_{\varphi(i,1,\alpha^{-1}c(f)),1}\, s^{M(\varphi(i\theta,\alpha,l(f\theta)))^{-1}}_{\varphi(i\theta,1,\alpha^{-1}c(f)\theta)^{-1},1}. \tag{xi}$$

Все остальные определяющие соотношения, доставляемые методом Рейдемейстера — Шрейера, получаются из соотношений (ix)–(xi) при помощи добавления в верхний индекс каждого $s$-символа, входящего в фиксированное соотношение, одного и того же произвольного представителя $M$ в качестве последнего сомножителя.

Если теперь освободиться от громоздких обозначений, предписываемых формализмом метода Рейдемейстера — Шрейера, то получаем следующее. В порождающих $\varphi(i,1,u)^\mu$ ($u \in \langle X \setminus \{x_i\}\rangle'$, $\mu \in GL(W)$) группа $I$ имеет определяющие соотношения

$$\varphi(i,1,u)^\mu\varphi(i,1,v)^\mu = \varphi(i,1,u+v)^\mu \quad (\mu \in GL(W)), \tag{2'}$$

$$\varphi(j,1,u)^{\mu\nu} = \varphi(j,1,u\mu)^{\nu} \quad (x_j\mu = x_j,\ (Kx_i + Kx_k)\mu = Kx_i + Kx_k), \tag{3'}$$

$$\varphi(i,1,u)^{\theta\mu} = \varphi(i\theta,1,u\theta)^{\mu} \quad (\theta \in S_3,\ \mu \in GL(W)). \tag{4'}$$

Для данной подстановки $\theta \in S_3$ выберем множество $C_\theta$, образованное представителями правых смежных классов группы $GL(W)$ по подгруппе

$$\{\lambda \in GL(W) \mid x_{1\theta}\lambda = x_{1\theta},\ (Kx_{2\theta} + Kx_{3\theta})\lambda = (Kx_{2\theta} + Kx_{3\theta})\},$$

изоморфной $GL_2(K)$. Очевидно, что можно взять $C_\theta = C_{1\theta}$ (см. п. 4).

При помощи преобразований Титце предыдущее представление можно преобразовать в представление

$$\langle \varphi(1,1,u)^{\theta\mu},\ u \in \langle x_2, x_3\rangle',\ \theta \in S_3,\ \mu \in C_\theta \mid \varphi(1,1,u)^{\theta\mu}\varphi(1,1,v)^{\theta\mu} = \varphi(1,1,u+v)^{\theta\mu}\rangle.$$

Таким образом,

$$I = *\big\{I_1^{\theta\mu} \mid \theta \in S_3,\ \mu \in C_\theta\big\} = *\big\{I_{1\theta}^{\mu} \mid \theta \in S_3,\ \mu \in C_\theta\big\}.$$

Предложение 4.2 доказано.

**9.1.** Замечание. Соотношения $(2')$–$(4')$ можно было бы получить без громоздких выкладок, подставив в (2)–(4) следствия соотношения (viii) и сократив линейные части. Однако это не гарантировало бы соотношениям $(2')$–$(4')$ свойства быть *определяющими соотношениями*.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Umirbaev U. U., Shestakov I. P.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17, N 1. P. 181–196.
2. *Umirbaev U. U., Shestakov I. P.* Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17, N 1. P. 197–227.
3. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables // J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal). 2006. V. 2006, N 600. P. 203–235.
4. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras // eprint arXiv: math/0607237. 2006. P. 1–14.
5. *Drensky V.* Fixed algebras of residually nilpotent Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120, N 4. P. 1021–1028.
6. *Петроградский В. М.* Об инвариантах действия конечной группы на свободной алгебре Ли // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 917–925.
7. *Cohn P. M.* The automorphism group of the free algebra of rank two // Serdica Math. J. 2002. N 28. P. 255–266.
8. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1976.
9. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 56. P. 618–632.
10. *Serre J.-P.* Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
11. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.


*Статья поступила 15 июня 2010 г., окончательный вариант — 3 декабря 2010 г.*

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры,
пр. Мира, 55 а, Омск 644041
shma2001@gmail.com