Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.558

V–ПОЛУКОЛЬЦА

С. Н. Ильин

Аннотация. Изучаются полукольца, над которыми все простые полумодули инъективны. В теории колец и модулей кольца с аналогичным условием называются V-кольцами, поэтому рассматриваемые полукольца естественно назвать V-полукольцами. Получены полукольцевые аналоги некоторых известных результатов о V-кольцах, в том числе аналог теоремы Капланского о коммутативных V-кольцах.

Ключевые слова: простой полумодуль, инъективный полумодуль, существенное расширение, V-кольцо.

Согласно [1] под *полукольцом* понимается непустое множество S с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ такое, что $(S, +, 0)$ — коммутативный моноид, $(S, \cdot, 1)$ — моноид, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и для всех $x \in S$ верно $0x = x0 = 0$. Мы не исключаем случай, когда $0 = 1$ и, следовательно, $S = \{0\}$.

Коммутативный моноид $(M, +, 0_M)$ называется *правым полумодулем* над полукольцом S (*правым S-полумодулем*), если задано умножение элементов из M на элементы из S справа, причем $(ms)s' = m(ss')$, $(m + m')s = ms + m's$, $m(s + s') = ms + ms'$, $m1 = m$ и $m0 = 0_M s = 0_M$ для всех $m, m' \in M$, $s, s' \in S$. Естественным образом вводятся понятия *подполумодуля*, *гомоморфизма* полумодулей и т. д. Ниже все полумодули считаются правыми.

Обозначим через $\mathrm{Cong}(M)$ решетку конгруэнций S-полумодуля M, а через 0 и 1 — ее наименьший и соответственно наибольший элементы. Полумодуль $M \neq \{0_M\}$ называется *простым*, если $\mathrm{Cong}(M) = \{0, 1\}$. Удобно также считать простым и нулевой S-полумодуль в случае, когда само полукольцо S нулевое.

Полумодуль M называется *инъективным*, если для любого S-полумодуля B и любого подполумодуля $A \subseteq B$ всякий S-гомоморфизм $\varphi : A \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $\overline{\varphi} : B \to M$.

Инъективный S-гомоморфизм $\alpha : M \to N$ называется *существенным*, если для всякого S-гомоморфизма $\beta : N \to N'$ инъективность гомоморфизма $\beta\alpha$ равносильна инъективности β. Подполумодуль $M \subseteq M'$ называется *существенным* в M', если отображение включения M в M' есть существенный гомоморфизм. Говорят также, что M' — *существенное расширение* M. Известно (см. [1, предложение 17.26]), что существенность M в M' эквивалентна тому, что ограничение произвольной ненулевой конгруэнции $\theta \in \mathrm{Cong}(M')$ на M снова ненулевая конгруэнция.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00431–а).

Назовем полукольцо S *правым V-полукольцом*, если каждый простой правый S-полумодуль инъективен. Данное определение обобщает известное в теории колец и модулей понятие правого V-кольца. Справедливы следующие результаты о V-кольцах (см. [2, п. 12.26; 3, следствие 19.53]).

Предложение A. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

1) *R — правое V-кольцо;*

2) *любое существенное расширение каждого простого правого R-модуля M совпадает с M;*

3) *каждое фактор-кольцо кольца R — правое V-кольцо.*

Теорема B (Капланский). *Коммутативное кольцо R есть V-кольцо тогда и только тогда, когда оно регулярно.*

Основная цель данной статьи — обобщить приведенные результаты о V-кольцах на случай V-полуколец.

1. Простые полумодули

Данный пункт содержит необходимые в дальнейшем результаты о простых полумодулях, в том числе о полумодулях над коммутативными полукольцами. Отметим тот факт, что исчерпывающее описание простых полумодулей над коммутативными полукольцами дано в [4], однако термины «полукольцо» и «полумодуль» в упомянутой работе понимаются в гораздо более широком смысле, нежели это было определено выше, поэтому приведенное в [4] описание простых полумодулей содержит большое количество случаев, значительная часть которых не реализуется в рассматриваемой нами ситуации. В связи с этим в нашем случае необходимые результаты о простых полумодулях удобно получить непосредственными рассуждениями, используя методы, изложенные в [4].

Пусть M — полумодуль над полукольцом S. Обозначим через $R(M)$ множество всех элементов из M, обладающих противоположными элементами. Зададим на M отношение σ, положив $m\,\sigma\,m'$ для произвольных $m, m' \in M$, если $\operatorname{Ann}(m) = \operatorname{Ann}(m')$, где $\operatorname{Ann}(m) = \{s \in S : ms = 0_M\}$ — правый аннулятор элемента $m \in M$.

Лемма 1.1. *Если $R(M) = \{0_M\}$, то σ — конгруэнция на M, при этом если M прост, то σ есть отношение равенства.*

Доказательство. Очевидно, σ является отношением эквивалентности.

Пусть $m\,\sigma\,m'$. Если $s \in \operatorname{Ann}(m+n)$ для некоторого $n \in M$, то $0_M = (m+n)s = ms + ns$, что с учетом условия $R(M) = \{0_M\}$ влечет $ms = ns = 0_M$. Но тогда $s \in \operatorname{Ann}(m) = \operatorname{Ann}(m')$, так что $m's = 0_M$, откуда $(m'+n)s = m's+ns = 0_M$, поэтому $s \in \operatorname{Ann}(m'+n)$ и, следовательно, $\operatorname{Ann}(m+n) \subseteq \operatorname{Ann}(m'+n)$. Аналогично доказывается включение $\operatorname{Ann}(m'+n) \subseteq \operatorname{Ann}(m+n)$, следовательно, $\operatorname{Ann}(m+n) = \operatorname{Ann}(m'+n)$, так что $(m+n)\,\sigma(m'+n)$.

Если для некоторых $s, t \in S$ имеем $t \in \operatorname{Ann}(ms)$, то $0_M = (ms)t = m(st)$, значит, $st \in \operatorname{Ann}(m) = \operatorname{Ann}(m')$, поэтому $0_M = m'(st) = (m's)t$, тем самым $t \in \operatorname{Ann}(m's)$, так что $\operatorname{Ann}(ms) \subseteq \operatorname{Ann}(m's)$. Аналогично $\operatorname{Ann}(m's) \subseteq \operatorname{Ann}(ms)$, откуда $\operatorname{Ann}(ms) = \operatorname{Ann}(m's)$, т. е. $(ms)\,\sigma(m's)$.

Итак, σ — конгруэнция, при этом очевидно, что если $m \neq 0_M$, то 0_M и m не находятся в отношении σ. Поэтому если полумодуль M прост, то σ — отношение равенства. $\square$

Согласно [1, предложения 15.27, 15.28] в каждом простом полумодуле сложение либо сократимо, либо идемпотентно, а если исходное полукольцо коммутативно, то каждый простой полумодуль с сократимым сложением является модулем. Эти результаты уточняет следующее

Предложение 1.2. *Каждый простой S-полумодуль M либо является модулем, либо сложение в M идемпотентно.*

Доказательство. Зададим на M отношение Бёрна θ_R по $R(M)$, т. е. полагаем $m\ \theta_R\ m'$, если $m+n=m'+n'$ для некоторых $n,n' \in R(M)$. В силу простоты полумодуля M либо θ_R есть отношение равенства, либо для всех $m,m' \in M$ верно $m\ \theta_R\ m'$. В последнем случае, в частности, для каждого $m \in M$ имеем $0_M\ \theta_R\ m$, т. е. при некоторых $n,n' \in R(M)$ верно $0_M+n=m+n'$, откуда $m+n'-n=0_M$ и, значит, $m \in R(M)$. Ввиду произвольности $m \in M$ получаем $M=R(M)$, так что M является модулем.

В оставшемся случае, когда θ_R есть отношение равенства и, следовательно, $R(M)=\{0_M\}$, для всякого $m \in M$ немедленно выводим $m\,\sigma(m+m)$, что в силу леммы 1.1 влечет $m=m+m$, тем самым сложение в M идемпотентно. $\square$

Как известно, для произвольного полукольца S множество $S \times S$ относительно сложения и умножения, определенных формулами $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$ для всех $(a,b),(c,d) \in S \times S$, образует полукольцо, на котором можно задать конгруэнцию $\triangle$, положив $(a,b)\triangle(c,d)$, если $a+d+x=b+c+x$ для некоторого $x \in S$. При этом фактор-полукольцо $S^{\triangle}=(S\times S)/\triangle$ есть кольцо (возможно, нулевое), называемое *кольцом разностей* полукольца S (см. [1, гл. 8]). Класс конгруэнтности пары $(a,b) \in S \times S$ по $\triangle$ будем обозначать через $(a,b)^{\triangle}$.

Замечание 1.3. Всякий S-модуль M можно рассматривать как $S^{\triangle}$-модуль, полагая $m(a,b)^{\triangle}=ma-mb$ для всех $m \in M$, $(a,b)^{\triangle} \in S^{\triangle}$. Наоборот, правило $ms=m(s,0)^{\triangle}$ задает на каждом $S^{\triangle}$-модуле M структуру S-модуля.

Из указанного в замечании 1.3 соответствия для всякого модуля M почти очевидным образом вытекает равенство $\mathrm{Cong}(M_S)=\mathrm{Cong}(M_{S^{\triangle}})$. В частности, M прост как S-модуль в точности тогда, когда он прост как $S^{\triangle}$-модуль. Применяя хорошо известный результат о простых модулях над кольцами (см. [5, предложение 9.1]), получаем

Предложение 1.4. *Модуль M над полукольцом S прост тогда и только тогда, когда он изоморфен модулю $S^{\triangle}/J$, где J — некоторый максимальный правый идеал кольца разностей $S^{\triangle}$.*

Перейдем к простым полумодулям с идемпотентным сложением. Как показывает следующее предложение, такие полумодули над коммутативными полукольцами устроены довольно просто. Предварительно дадим необходимые определения.

Идеал $I \subset S$ называется *строгим*, если $a+b \in I$ влечет $a,b \in I$ для любых $a,b \in S$. Двусторонний идеал $I \subset S$ называется *первичным*, если $JK \subseteq I$ влечет $J \subseteq I$ или $K \subseteq I$ для любых двусторонних идеалов $J,K \subset S$. Если полукольцо S коммутативно, то первичность идеала $I \subset S$ равносильна тому, что $ab \in I$ влечет $a \in I$ или $b \in I$ для любых $a,b \in S$ [1, следствие 7.6].

Предложение 1.5. *Каждый простой полумодуль с идемпотентным сложением над ненулевым коммутативным полукольцом S содержит ровно два* *элемента. Моноид* $M = \{0_M, m\}$ *с идемпотентным сложением есть простой* S-*полумодуль в точности тогда, когда* $\mathrm{Ann}(m)$ — *строгий первичный идеал в* S.

Доказательство. Пусть M — простой S-полумодуль с идемпотентным сложением. Фиксируем произвольный элемент $s \in S$ и рассмотрим множество $A_s = \{m \in M : ms = 0_M\}$. Используя коммутативность полукольца S, нетрудно убедиться в том, что A_s — подполумодуль в M. Обозначим через θ_s отношение Бёрна по A_s на M. Поскольку M прост, то либо θ_s есть отношение равенства и тогда $A_s = \{0_M\}$, либо для всякого $m \in M$ имеем $0_M \; \theta_s \; m$, т. е. при подходящих $n, n' \in A_s$ верно $n = 0_M + n = m + n'$, откуда $0_M = ns = ms + n's = ms$, так что $m \in A_s$ и, следовательно, $A_s = M$.

Итак, при каждом фиксированном $s \in S$ имеем либо $A_s = \{0_M\}$, либо $A_s = M$, поэтому для любых отличных от 0_M элементов $m, m' \in M$ равенство $ms = 0_M$ имеет место ровно тогда, когда $m's = 0_M$, тем самым $\mathrm{Ann}(m) = \mathrm{Ann}(m')$. Поскольку сложение в M идемпотентно, то $R(M) = \{0_M\}$, откуда в силу леммы 1.1 получаем $m = m'$, так что полумодуль M содержит ровно один отличный от 0_M элемент, т. е. $M = \{0_M, m\}$.

Покажем, что идеал $\mathrm{Ann}(m)$ является строгим и первичным. Действительно, если $s + s' \in \mathrm{Ann}(m)$ для некоторых $s, s' \in S$, то $0_M = m(s + s') = ms + ms'$, откуда в силу идемпотентности сложения в M выводим $ms = ms' = 0_M$, тем самым $s, s' \in \mathrm{Ann}(m)$, что доказывает строгость идеала $\mathrm{Ann}(m)$. Если теперь $s, s' \notin \mathrm{Ann}(m)$, то $ms \neq 0_M$ и $ms' \neq 0_M$, следовательно, $ms = ms' = m$, поэтому $m(ss') = (ms)s' = ms' = m \neq 0_M$, откуда $ss' \notin \mathrm{Ann}(m)$, что с учетом коммутативности S влечет первичность идеала $\mathrm{Ann}(m)$.

Обратно, пусть $M = \{0_M, m\}$ — моноид с идемпотентным сложением и $I \subset S$ — строгий первичный идеал. Зададим умножение элементов из M на элементы из S, положив $0_M s = 0_M$ для всех $s \in S$, $ms = 0_M$ при $s \in I$ и $ms = m$ при $s \notin I$. Непосредственная проверка показывает, что M — простой S-полумодуль. □

2. Правые V-полукольца

Напомним, что согласно предложению А кольцо R является правым V-кольцом тогда и только тогда, когда любое существенное расширение каждого простого правого R-модуля M совпадает с M. Рассмотрим аналогичное свойство полуколец:

$$\begin{gathered}\text{любое существенное расширение каждого простого правого}\\ S\text{-полумодуля } M \text{ совпадает с } M.\end{gathered} \tag{1}$$

Очевидно, что если $\alpha : S \to T$ — сюръективный гомоморфизм полуколец, то любой T-полумодуль M можно рассматривать одновременно и как S-полумодуль, полагая $ms = m\alpha(s)$ для всех $s \in S$. Ясно, что $\mathrm{Cong}(M_S) = \mathrm{Cong}(M_T)$, поэтому если T-полумодуль M' есть существенное расширение простого T-полумодуля M, то ровно то же самое верно для M и M' как S-полумодулей. Следовательно, справедливо

Предложение 2.1. *Всякий гомоморфный образ полукольца со свойством* (1) *снова есть полукольцо со свойством* (1).

Полукольцо S называется *антикольцом* (*антинегативным* полукольцом), если $a + b = 0$ влечет $a = b = 0$ для любых $a, b \in S$. Очевидно, что S является антикольцом ровно тогда, когда его идеал $R(S)$, состоящий из всех аддитивно обратимых элементов, нулевой. С учетом этого нетрудно показать, что фактор-полукольцо S/θ_R, где θ_R — отношение Бёрна по идеалу $R(S)$, есть антикольцо. Отметим также, что S является кольцом в том и только том случае, когда фактор-полукольцо S/θ_R нулевое.

Таким образом, ввиду предложения 2.1 каждое не являющееся кольцом полукольцо со свойством (1) факторизацией по θ_R можно превратить в ненулевое антикольцо со свойством (1). Прежде чем установить связь между правыми V-полукольцами и полукольцами со свойством (1) в общем случае, получим сначала соответствующий результат для антиколец. Докажем предварительно несколько вспомогательных лемм.

Заметим, что на любом S-полумодуле M можно задать отношение $\trianglelefteq_M$, положив $m \trianglelefteq_M m'$ для произвольных $m, m' \in M$, если при некотором натуральном k' и некотором $n \in M$ верно $k'm' = m+n$. Легко видеть, что $\trianglelefteq_M$ есть предпорядок, причем $m \trianglelefteq_M m'$ влечет $(m+m'') \trianglelefteq_M (m'+m'')$ и $(ms) \trianglelefteq_M (m's)$ для всех $m'' \in M$, $s \in S$, так что отношение $\diamond_M$, определенное правилом: $m \diamond_M m'$, если $m \trianglelefteq_M m'$ и $m' \trianglelefteq_M m$, есть конгруэнция на M. Отметим также, что если в качестве M взять само полукольцо S, то соответствующая конгруэнция $\diamond_S$ на S является не только полумодульной, но и полукольцевой. Непосредственно из определения конгруэнции $\diamond_M$ вытекает соотношение $m \diamond_M (m+m)$ для любого $m \in M$, следовательно, справедлива следующая

Лемма 2.2. *Сложение в фактор-полумодуле $M^\diamond = M/\diamond_M$ идемпотентно, причем полумодуль $M^\diamond$ нулевой ровно тогда, когда M является модулем. В частности, если полукольцо S не является кольцом, то фактор-полукольцо $S^\diamond = S/\diamond_S$ — ненулевое аддитивно идемпотентное полукольцо.*

Обозначим через $s^\diamond$ класс конгруэнтности элемента $s \in S$ по $\diamond_S$.

Лемма 2.3. *Правило $ms^\diamond = ms$ для всех $m \in M$, $s \in S$ задает на всяком S-полумодуле M с идемпотентным сложением структуру $S^\diamond$-полумодуля, при этом* $\mathrm{Cong}(M_S) = \mathrm{Cong}(M_{S^\diamond})$. *В частности, для любого S-полумодуля N фактор-полумодуль $N^\diamond = N/\diamond_N$ является одновременно и S-, и $S^\diamond$-полумодулем.*

Доказательство. Пусть $m \in M$, $s, s' \in S$ и $s \diamond_S s'$. Тогда для подходящих натуральных k, k' и некоторых $t, t' \in S$ выполнены равенства $k's' = s+t$ и $ks = s'+t'$, что ввиду идемпотентности сложения в M влечет $ms = k(ms) = m(ks) = ms' + mt'$ и аналогично $ms' = ms + mt$, откуда $ms = ms' + mt' = ms' + mt' + ms' = ms + ms' = ms + ms + mt = ms + mt = ms'$. Таким образом, умножение элементов из M на элементы полукольца $S^\diamond$ определено корректно. Оставшаяся часть утверждения леммы очевидна. □

Лемма 2.4. *Пусть M — полумодуль над антикольцом S. Тогда существуют такие S-полумодуль $\widetilde{M}$ и элемент $z \in \widetilde{M}$, что $M \subseteq \widetilde{M}$ и $m + z = z$ для всех $m \in M$.*

Доказательство. Зададим на S-полумодуле $M \times S$ отношение $\sim$, положив $(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2)$, если, во-первых, $s_1 = s_2$ и, во-вторых, для некоторого натурального k существуют элементы $m'_i, m''_i \in M$, $x_i, x'_i \in S$ $(i = 1, \ldots, k)$ такие, что $x_i + x'_i = s_1$ и $m_1 + \sum\limits_i m'_i x_i = m_2 + \sum\limits_i m''_i x_i$.

Согласно [6, предложение 1.6] отношение $\sim$ есть конгруэнция. Обозначим через $\widetilde{M}$ фактор-полумодуль $(M \times S)/\sim$, а через $[m, s]$ — класс конгруэнтности произвольной пары $(m, s) \in M \times S$. В доказательстве предложения 1.7 статьи [6] установлено, что если $R(S) = \{0\}$ (другими словами, если S — антикольцо), то отображение $\alpha : M \to \widetilde{M}$, действующее по правилу $\alpha(m) = [m, 0]$, является инъективным S-гомоморфизмом, причем для всех $m \in M$ верно $[m, 0]+[0_M, 1] = [0_M, 1]$. Следовательно, отождествляя элементы из M с их образами в $\widetilde{M}$ при действии α и полагая $z = [0_M, 1]$, можно считать, что M есть подполумодуль в $\widetilde{M}$ и при этом $m + z = z$ для всех $m \in M$. $\square$

Предложение 2.5. *Если антикольцо S обладает свойством* (1), *то кольцо разностей $S^{\triangle}$ нулевое.*

Доказательство. Пусть $S^{\triangle} \neq \{0\}$. Тогда найдется простой $S^{\triangle}$-модуль $M \neq \{0_M\}$, который является также простым S-модулем (см. замечание 1.3 и рассуждения, предваряющие предложение 1.4). В силу леммы 2.4 найдутся полумодуль $\widetilde{M}$, содержащий M, и такой элемент $z \in \widetilde{M}$, что $m + z = z$ для всех $m \in M$. Последнее означает, что $z \notin M$, следовательно, $M \subset \widetilde{M}$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех элементов решетки $\mathrm{Cong}(\widetilde{M})$, ограничение которых на M есть отношение равенства. В частности, таковой является нулевая конгруэнция на $\widetilde{M}$, поэтому множество $\mathfrak{M}$ непусто. Легко видеть, что объединение элементов произвольной возрастающей цепи в $\mathfrak{M}$ снова лежит в $\mathfrak{M}$, тем самым $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна и, следовательно, обладает максимальным элементом θ. Поскольку ограничение конгруэнции θ на M есть отношение равенства, то $M' = \widetilde{M}/\theta$ есть расширение M, причем ввиду максимальности θ это расширение существенно. Обозначив через z' класс конгруэнтности элемента $z \in \widetilde{M}$ по θ и отождествив элементы из M с их классами конгруэнтности в M', получаем $m + z' = z'$ для всех $m \in M$, откуда $z' \notin M$ и, следовательно, M' — существенное расширение простого S-модуля M, не совпадающее с M. Полученное противоречие со свойством (1) завершает доказательство. $\square$

Полукольцо S называется *зероидным*, если для всякого $s \in S$ найдется такой $z \in S$, что $s + z = z$. Очевидно, зероидность полукольца S равносильна разрешимости в S уравнения $1 + x = x$, которая, в свою очередь, равносильна тому, что кольцо разностей $S^{\triangle}$ нулевое, поэтому ввиду предложения 2.5 каждое антикольцо со свойством (1) зероидно. Отметим также тот очевидный факт, что любое зероидное полукольцо есть антикольцо.

Класс зероидных полуколец довольно обширен и содержит, в частности, все аддитивно идемпотентные полукольца. Для последних справедлив следующий важный результат (см. [7]).

Теорема 2.6. *Каждый полумодуль над аддитивно идемпотентным полукольцом обладает инъективной оболочкой.*

В [8] аналогичное утверждение доказано в гораздо более общем случае: для полумодулей над аддитивно регулярными полукольцами. Однако легко видеть, что далеко не все зероидные полукольца аддитивно регулярны, поэтому вопрос о существовании инъективных оболочек полумодулей над зероидными полукольцами весьма важен и интересен. Некоторое продвижение в его решении дает следующая

Теорема 2.7. *Каждый простой полумодуль над зероидным полукольцом обладает инъективной оболочкой.*

Доказательство. Пусть S — зероидное полукольцо и M — простой S-полумодуль. Если полукольцо S нулевое, то утверждение тривиально верно, поэтому можно считать, что $S \neq \{0\}$ и, следовательно, $M \neq \{0_M\}$. В силу предложения 1.2 полумодуль M либо является модулем, либо сложение в M идемпотентно. Но зероидность полукольца S означает, что кольцо разностей $S^{\triangle}$ нулевое, поэтому ввиду замечания 1.3 первый случай невозможен, следовательно, M — полумодуль с идемпотентным сложением. В силу лемм 2.2 и 2.3 S-полумодуль M можно рассматривать как полумодуль над аддитивно идемпотентным полукольцом $S^{\diamond}$, следовательно, по теореме 2.6 он обладает инъективной оболочкой — $S^{\diamond}$-полумодулем N. Для завершения доказательства достаточно установить, что N является инъективной оболочкой для M и в том случае, когда M и N рассматриваются как S-полумодули.

Итак, пусть A, B — произвольные S-полумодули, причем $A \subseteq B$, и $\varphi : A \to N$ — S-гомоморфизм. Обозначим через $\diamond'_A$ ограничение конгруэнции $\diamond_B$ на A и положим $A' = A/\diamond'_A$, $B^{\diamond} = B/\diamond_B$. Ясно, что отображение $\imath_{A'} : A' \to B^{\diamond}$, сопоставляющее каждому классу конгруэнтности $a' \in A'$ элемента $a \in A$ содержащий его класс $a^{\diamond} \in B^{\diamond}$, есть инъективный $S^{\diamond}$-гомоморфизм, поэтому можно считать, что $A' \subseteq B^{\diamond}$. Очевидно также, что если $\pi_A : A \to A'$ и $\pi_B : B \to B^{\diamond}$ — естественные сюръективные гомоморфизмы, а $\imath_A : A \to B$ — вложение A в B, то $\imath_{A'} \circ \pi_A = \pi_B \circ \imath_A$.

Пусть $a_1, a_2 \in A$ — произвольные элементы, находящиеся в отношении $\diamond'_A$, т. е. для некоторых натуральных k_1, k_2 и некоторых $b_1, b_2 \in B$ верны равенства $k_1 a_1 = a_2 + b_2$ и $k_2 a_2 = a_1 + b_1$. Положим $n_i = \varphi(a_i)$ $(i = 1, 2)$. Учитывая идемпотентность сложения в N, получаем $n_1 = k_1 n_1 = \varphi(k_1 a_1) = \varphi(a_2 + b_2)$ и аналогично $n_2 = \varphi(a_1 + b_1)$. Покажем, что $\mathrm{Ann}(n_1) = \mathrm{Ann}(n_2)$.

Действительно, пусть $s \in \mathrm{Ann}(n_1)$. Тогда $n_1 s = 0_N$ и, значит, $n_1 s z = 0_N$, где $z \in S$ — некоторый элемент, удовлетворяющий равенству $1 + z = z$ и существующий в силу зероидности полукольца S. Получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 0_N = n_1 s z = \varphi(a_2 + b_2) s z = \varphi(a_2 s z + b_2 s z) = \varphi(a_2 s + a_2 s z + b_2 s z) \\ = \varphi(a_2 s) + \varphi(a_2 s z + b_2 s z) = \varphi(a_2) s = n_2 s, \end{aligned}$$

тем самым $s \in \mathrm{Ann}(n_2)$. Таким образом, $\mathrm{Ann}(n_1) \subseteq \mathrm{Ann}(n_2)$. Аналогично доказывается обратное включение.

Итак, аннуляторы элементов n_1 и n_2 в S совпадают. Ввиду леммы 2.3 для любых $n \in N$, $s \in S$ справедливо равенство $ns = ns^{\diamond}$, так что n_1 и n_2 имеют одинаковые аннуляторы и в $S^{\diamond}$. Воспользовавшись леммой 1.1, зададим на $N_{S^{\diamond}}$ конгруэнцию σ, ограничение которой на $M_{S^{\diamond}}$ согласно той же лемме есть отношение равенства в силу простоты M_S и, следовательно, простоты $M_{S^{\diamond}}$. Но тогда и сама конгруэнция $\sigma \in \mathrm{Cong}(N_{S^{\diamond}})$ есть отношение равенства ввиду существенности $M_{S^{\diamond}}$ в $N_{S^{\diamond}}$, так что $n_1 = n_2$ или, что то же самое, $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$.

Таким образом, для любых $a_1, a_2 \in A$ отношение $a_1 \diamond'_A a_2$ влечет $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Поэтому S-гомоморфизм $\varphi : A \to N$ индуцирует корректно определенный $S^{\diamond}$-гомоморфизм $\varphi' : A' \to N$, где $\varphi'(a') = \varphi(a)$ для каждого $a' \in A'$, при этом $\varphi = \varphi' \circ \pi_A$. Наконец, заметим, что в силу инъективности N как $S^{\diamond}$-полумодуля существует такой $S^{\diamond}$-гомоморфизм $\overline{\varphi}' : B^{\diamond} \to N$, что $\varphi' = \overline{\varphi}' \circ \imath_{A'}$. Соответствующая коммутативная диаграмма изображена на рис. 1.

Легко видеть, что отображение $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}' \circ \pi_B : B \to N$ является S-гомоморфизмом, ограничение которого на A совпадает с φ, что доказывает инъективность N как S-полумодуля. Осталось заметить, что с учетом выполненных в силу леммы 2.3 равенств $\mathrm{Cong}(N_S) = \mathrm{Cong}(N_{S^{\diamond}})$ и $\mathrm{Cong}(M_S) = \mathrm{Cong}(M_{S^{\diamond}})$ существенность M_S в N_S есть следствие существенности $M_{S^{\diamond}}$ в $N_{S^{\diamond}}$. $\square$

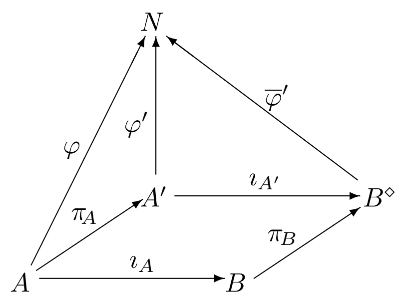

Рис. 1.

Следствие 2.8. *Каждое антикольцо со свойством* (1) *есть правое V-полукольцо.*

Доказательство. Пусть M — простой правый полумодуль над антикольцом S, обладающим свойством (1). Согласно предложению 2.5 кольцо разностей $S^{\triangle}$ нулевое, следовательно, само полукольцо S зероидно. Тогда по теореме 2.7 полумодуль M обладает инъективной оболочкой, совпадающей с M в силу (1), тем самым M инъективен и, значит, S — правое V-полукольцо. $\square$

Вернемся к полукольцам общего вида. Как говорилось в начале данного пункта (см. рассуждения после предложения 2.1), любое полукольцо S можно превратить в антикольцо S/θ_R.

Предложение 2.9. *Если антикольцо $\overline{S} = S/\theta_R$ зероидно, то $S = R \oplus T$, где R — кольцо, а T — зероидное полукольцо, изоморфное $\overline{S}$.*

Доказательство. Пусть фактор-полукольцо $\overline{S}$ зероидно. В случаях, когда $R(S) = S$ или $R(S) = \{0\}$, исходное полукольцо S является кольцом или соответственно зероидным полукольцом, тем самым доказываемое утверждение тривиально верно. Поэтому можно считать, что $\{0\} \subset R(S) \subset S$.

Так как $\overline{S}$ зероидно, то для некоторого $\bar{z} \in \overline{S}$ верно $\bar{1} + \bar{z} = \bar{z}$ или, что то же самое, $(1 + z)\ \theta_R\ z$ при некотором $z \in S$. Последнее с учетом определения конгруэнции θ_R означает, что для подходящих $r_1, r_2 \in R(S)$ верно $1 + z + r_1 = z + r_2$ или эквивалентно $1 + z = r + z$, где $r = r_2 - r_1 \in R(S)$.

Умножая равенство $1+z = r+z$ справа на произвольный элемент $r' \in R(S)$, получаем $r' + zr' = rr' + zr'$, откуда, сокращая на $zr' \in R(S)$, выводим $r' = rr'$. Аналогично умножение равенства $1 + z = r + z$ на r' слева дает $r'r = r'$, тем самым ввиду произвольности выбора $r' \in R(S)$ элемент $r \in R(S)$ является локальной единицей в $R(S)$. Поскольку $R(S)$ — двусторонний идеал в S, то $rs, sr \in R(S)$ при любом $s \in S$, значит, $rs = rsr = sr$ и, в частности, $r^2 = r$, так что r — центральный идемпотент и, стало быть, для полукольца S имеет место разложение Пирса $S = rS \oplus (1-r)S$. Полагая $R = rS$ и $T = (1-r)S$, замечаем, что $R = R(S)$ — кольцо, а T — антикольцо, поскольку $R(T) = R((1-r)S) = R(S) \cap (1-r)S = \{0\}$.

Наконец, легко видеть, что отображение $\psi : S \to T$, где $\psi(s) = (1-r)s$ для всех $s \in S$, есть сюръективный гомоморфизм, причем $\psi(s) = \psi(s')$ в точности тогда, когда $s\ \theta_R\ s'$. Следовательно, по основной теореме о гомоморфизмах полуколец $\overline{S} = S/\theta_R \cong T$. $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат данного пункта — полукольцевой аналог предложения A.

Теорема 2.10. *Для полукольца S следующие условия эквивалентны:*

1) *S — правое V-полукольцо;*

2) *любое существенное расширение каждого простого правого S-полумодуля M совпадает с M;*

3) *$S = R \oplus T$, где R — правое V-кольцо, T — зероидное правое V-полукольцо;*

4) *каждое фактор-полукольцо полукольца S есть правое V-полукольцо.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) есть следствие легко проверяемого утверждения (см. [1, предложение 17.29]) о том, что каждое существенное расширение инъективного полумодуля совпадает с ним.

2) $\Rightarrow$ 3) Условие 2 означает, что для S верно (1), поэтому с учетом предложения 2.1 свойством (1) обладает и антикольцо S/θ_R. Следовательно, в силу предложения 2.5 его кольцо разностей нулевое, так что антикольцо S/θ_R зероидно. Тогда по предложению 2.9 имеем $S = R \oplus T$, где R — кольцо, а $T \cong S/\theta_R$ — антикольцо, причем и для R, и для T ввиду предложения 2.1 верно (1). Осталось воспользоваться упомянутым выше предложением A и следствием 2.8, согласно которым каждое кольцо со свойством (1) есть правое V-кольцо, а каждое антикольцо со свойством (1) есть правое V-полукольцо.

Нетрудно видеть, что прямая сумма двух правых V-полуколец снова есть правое V-полукольцо, что доказывает справедливость импликации 3) $\Rightarrow$ 1).

Наконец, импликация 4) $\Rightarrow$ 1) очевидна, а импликация 1) $\Rightarrow$ 4) с учетом уже доказанной эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2) вытекает из предложения 2.1. $\square$

3. Коммутативные V-полукольца

Основная цель данного пункта — получение полукольцевого аналога теоремы Капланского о коммутативных V-кольцах (теорема B). В силу теоремы 2.10 любое коммутативное V-полукольцо является прямой суммой коммутативного V-кольца и коммутативного зероидного V-полукольца. «Внутреннюю» характеризацию коммутативных V-колец дает упомянутая теорема B, соответствующая характеризация коммутативных зероидных V-полуколец содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Коммутативное зероидное полукольцо S является V-полукольцом в том и только том случае, когда оно обладает свойством:*

$$\text{если } I \subset S \text{ — строгий первичный идеал и } x \in I, \text{ то } \mathrm{Ann}(x) \not\subseteq I. \tag{2}$$

Доказательство. Согласно теореме 2.10 полукольцо S является V-полукольцом в точности тогда, когда оно обладает свойством (1). Поэтому достаточно убедиться в том, что для коммутативных зероидных полуколец свойства (1) и (2) эквивалентны.

(1) $\Rightarrow$ (2) Зафиксируем произвольный строгий первичный идеал $I \subset S$ и рассмотрим его подмножество $H(I) = \{x \in I : \mathrm{Ann}(x) \not\subseteq I\}$. Очевидно, требуется доказать равенство $H(I) = I$, для чего достаточно установить, что строгое включение $H(I) \subset I$ противоречит свойству (1).

Итак, пусть $H(I) \subset I$. Справедлива следующая

Лемма 3.2. *Множество $H(I)$ есть строгий идеал в S.*

Доказательство. Сначала убедимся, что $H(I)$ — идеал в S. В самом деле, $\mathrm{Ann}(0) = S \not\subseteq I$, так что $0 \in H(I)$, следовательно, множество $H(I)$ непусто. Если $x, y \in H(I)$, то $x+y \in I$ и для некоторых $s, t \notin I$ верно $xs = yt = 0$. Тогда с учетом коммутативности S и первичности I верно $st \in \mathrm{Ann}(x+y)\setminus I$, тем самым $x + y \in H(I)$. Наконец, для произвольных $x \in H(I)$, $s \in S$ имеем $xs \in I$, что ввиду включения $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathrm{Ann}(xs)$ влечет $xs \in H(I)$.

Покажем теперь, что идеал $H(I)$ строгий. Действительно, пусть $x + y \in H(I)$. Тогда $x + y \in I$, следовательно, $x, y \in I$ в силу строгости идеала I. Поскольку полукольцо S зероидно и, значит, является антикольцом, верны включения $\mathrm{Ann}(x + y) \subseteq \mathrm{Ann}(x)$, $\mathrm{Ann}(x + y) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$, откуда $x, y \in H(I)$. $\square$

Итак, $H(I)$ — строгий идеал в S. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $H(I) = \{0\}$. Добавим к коммутативному моноиду $(S, +, 0)$ еще один элемент $m \notin S$ и доопределим на получившемся множестве $V = S \cup \{m\}$ операцию сложения, положив $m + 0 = 0 + m = m + m = m$ и $m + s = s + m = s$ для любого ненулевого $s \in S$. С учетом того, что полукольцо S зероидно и, значит, $R(S) = \{0\}$, легко проверяется следующая

Лемма 3.3. $(V, +, 0)$ — *коммутативный моноид.*

Для каждого отличного от m элемента $v \in V$ и каждого $s \in S$ естественным образом определено произведение vs. Положим $ms = 0$ при любом $s \in I$ и $ms = m$ для всех $s \notin I$.

Лемма 3.4. *Моноид V является S-полумодулем.*

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить справедливость входящих в определение полумодуля равенств при условии, что по крайней мере один из участвующих в них элементов есть m.

Для произвольных $s, t \in S$ сравним выражения $(ms)t$ и $m(st)$. В случае, когда хотя бы один из элементов s и t лежит в идеале I, оба выражения дают 0 и, следовательно, равны друг другу. Если же $s, t \notin I$, то $st \notin I$ ввиду первичности I и поэтому $(ms)t = mt = m = m(st)$. В итоге $(ms)t = m(st)$ при любых $s, t \in S$.

Далее, сравним выражения $(m + v)s$ и $ms + vs$, где $v \in V$, $s \in S$. Если $v = 0$, то $(m + 0)s = ms = ms + 0s$ при любом $s \in S$. Если $v = m$, то при $s \in I$ имеем $(m + m)s = ms = 0 = 0 + 0 = ms + ms$, а при $s \notin I$ — $(m + m)s = ms = m = m + m = ms + ms$. Пусть теперь $v \in V$ отличен от 0 и от m. В частности, $v \notin H(I)$. Если $s \in I$, то $(m + v)s = vs = 0 + vs = ms + vs$. Наконец, если $s \notin I$, то $vs \neq 0$ либо в силу первичности I при $v \notin I$, либо ввиду условия $v \notin H(I)$ при $v \in I$. Следовательно, $(m + v)s = vs = m + vs = ms + vs$.

Проверим справедливость равенства $m(s+t) = ms+mt$ для любых $s, t \in S$. Действительно, если $s, t \in I$, то $s + t \in I$, откуда $m(s + t) = 0 = 0 + 0 = ms + mt$. Если же, например, $s \notin I$, то $s + t \notin I$ в силу строгости I, поэтому вне зависимости от того, чему равно произведение mt: либо 0, либо m, получаем $m(s + t) = m = m + 0 = m + m = ms + mt$.

Наконец, $1 \notin I$ и $0 \in I$, поэтому $m1 = m$ и $m0 = 0$. $\square$

Из построения полумодуля V непосредственно видно, что $R(V) = R(S) = \{0\}$, следовательно, опираясь на лемму 1.1, можно построить фактор-полумодуль $V' = V/\sigma$, где, напомним, $v_1 \,\sigma\, v_2$ означает, что $\mathrm{Ann}(v_1) = \mathrm{Ann}(v_2)$.

Для произвольного $v \in V$ обозначим через v' его класс конгруэнтности относительно σ. Ясно, что $\mathrm{Ann}(v') = \mathrm{Ann}(v)$, поэтому разные элементы из V' имеют разные аннуляторы.

Заметим также, что $\mathrm{Ann}(0') = S$, $\mathrm{Ann}(m') = I$ и $\mathrm{Ann}(1') = \{0\}$, а поскольку в силу сделанных выше предположений верны включения $\{0\} = H(I) \subset I \subset S$, то полумодуль V' содержит по крайней мере три различных элемента — $0'$, m' и $1'$. Легко также видеть, что $M = \{0', m'\} \subset V'$ — простой подполумодуль.

Лемма 3.5. *Полумодуль V' есть существенное расширение полумодуля M.*

Доказательство. Пусть θ — произвольная ненулевая конгруэнция на V'. Тогда для некоторых $v_1', v_2' \in V'$, $v_1' \neq v_2'$, верно $v_1' \; \theta \; v_2'$. Поскольку аннуляторы различных элементов из V' различны, найдется $s \in S$, который аннулирует ровно один из элементов v_1' и v_2'. Пусть для определенности $v_1's = 0'$ и соответственно $v_2's \neq 0'$. Тогда $0' = (v_1's) \; \theta \; (v_2's) \neq 0'$. Прибавив к обеим частям элемент m', получаем $m' = (m' + 0') \; \theta \; (m' + v_2's) = (v_2's) \; \theta \; 0'$, так что $m' \; \theta \; 0'$ и, следовательно, ограничение конгруэнции θ на M есть ненулевая конгруэнция, что и доказывает существенность M в V'. $\square$

Таким образом, построен простой S-полумодуль M, обладающий нетривиальным существенным расширением V', что противоречит свойству (1).

Случай 2: $\{0\} \neq H(I)$. Зададим на S отношение Бёрна θ_H по идеалу $H(I)$.

Лемма 3.6. *Фактор-полукольцо $\overline{S} = S/\theta_H$ — коммутативное зероидное полукольцо, обладающее свойством* (1), *$\overline{I} = \{\bar{a} : a \in I\} \subset \overline{S}$ — его ненулевой строгий первичный идеал и $H(\overline{I}) = \{\bar{x} \in \overline{I} : \mathrm{Ann}(\bar{x}) \not\subseteq \overline{I}\} = \{\bar{0}\}$.*

Доказательство. Очевидно, полукольцо $\overline{S}$ коммутативно и зероидно как фактор-полукольцо коммутативного зероидного полукольца S. Поскольку S обладает свойством (1), в силу предложения 2.1 тем же свойством обладает и $\overline{S}$.

Легко видеть, что $\overline{I}$ — идеал в $\overline{S}$. Заметим, что если $\bar{a} \in \overline{I}$, то при некоторых $z \in I$, $x, y \in H(I)$ верно $a + x = z + y \in I + H(I) = I$, откуда ввиду строгости идеала I выводим $a \in I$. Следовательно, $\bar{1} \notin \overline{I}$, так что идеал $\overline{I}$ собственный. Аналогично, используя строгость и первичность идеала I, можно доказать, что идеал $\overline{I}$ строгий и первичный.

Отметим также, что в силу леммы 3.2 идеал $H(I)$ является строгим, поэтому если $\bar{a} = \bar{0}$, то для подходящих $x, y \in H(I)$ имеем $a + x = 0 + y = y \in H(I)$, следовательно, $a \in H(I)$. В частности, поскольку $H(I) \subset I$, то при $a \in I \backslash H(I)$ имеем $\bar{a} \neq \bar{0}$, так что идеал $\overline{I}$ ненулевой.

Наконец, если $\bar{x}$ — произвольный ненулевой элемент из $\overline{I}$ и для некоторого $\bar{s} \in \overline{S}$ верно $\bar{x}\bar{s} = \bar{0}$, то $xs \in H(I)$, значит, найдется такой элемент $t \notin I$, что $xst = 0$. Тогда $st \in \mathrm{Ann}(x)$, а так как $\bar{x} \in \overline{I}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, то $x \in I \backslash H(I)$, поэтому $\mathrm{Ann}(x) \subseteq I$, откуда $st \in I$. Но идеал I первичен и $t \notin I$, следовательно, $s \in I$ и поэтому $\bar{s} \in \overline{I}$. Таким образом, для всякого отличного от $\bar{0}$ элемента $\bar{x} \in \overline{I}$ равенство $\bar{x}\bar{s} = \bar{0}$ влечет $\bar{s} \in \overline{I}$, тем самым $\mathrm{Ann}(\bar{x}) \subseteq \overline{I}$. Следовательно, $H(\overline{I}) = \{\bar{0}\}$. $\square$

Согласно лемме 3.6 полукольцо $\overline{S}$ и его идеалы $\overline{I}$ и $H(\overline{I})$ удовлетворяют тем же предположениям, которым удовлетворяли полукольцо S и его идеалы I и $H(I)$ в случае 1. Как показано ранее, эти предположения противоречивы.

Итак, в обоих случаях условие $H(I) \subset I$ приводит к противоречию со свойством (1), что и требовалось.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть S — коммутативное зероидное полукольцо, обладающее свойством (2). Зафиксируем произвольный простой S-полумодуль M и покажем, что всякое его существенное расширение M' совпадает с M. Очевидно, можно считать, что полукольцо S ненулевое и, следовательно, $M \neq \{0_M\}$.

Прежде всего заметим, что из зероидности полукольца S вытекает, что его кольцо разностей $S^{\triangle}$ нулевое, поэтому с учетом замечания 1.3 простой (следовательно, ненулевой) S-полумодуль M не может быть модулем. Тогда в силу предложений 1.2 и 1.5 $M = \{0_M, m\}$ — полумодуль с идемпотентным сложением, причем $\mathrm{Ann}(m)$ — строгий первичный идеал в S.

Рассмотрим какой-либо S-полумодуль M', являющийся существенным расширением M. Легко видеть, что случай $R(M') \neq \{0_M\}$ невозможен. В самом деле, тогда отношение Бёрна θ_R по $R(M')$ являлось бы нетривиальной конгруэнцией на M', при этом ее ограничение на M было бы отношением равенства, что противоречило бы существенности M в M'. Следовательно, $R(M') = \{0_M\}$.

Теперь можно применить лемму 1.1, согласно которой конгруэнция σ на M' ввиду простоты полумодуля M и его существенности в M' есть отношение равенства. Другими словами, аннуляторы различных элементов из M' различны.

Фиксируем произвольный отличный от 0_M элемент $m' \in M'$ и какой-либо элемент $s \in \mathrm{Ann}(m')$. Как и в доказательстве предложения 1.5, обозначим через A_s подполумодуль $\{n \in M' : ns = 0_M\}$ и зададим на M' отношение Бёрна θ_s по A_s. Поскольку $0_M, m' \in A_s$ и, значит, $0_M \ \theta_s \ m'$, то θ_s — ненулевая конгруэнция на M', следовательно, ввиду существенности $M = \{0_M, m\}$ в M' получаем $0_M \ \theta_s \ m$, т. е. для некоторых $a, a' \in A_s$ верно $a = m + a'$. Умножая это равенство справа на s, имеем $0_M = as = (m + a')s = ms + 0_M = ms$, тем самым $s \in \mathrm{Ann}(m)$. Следовательно, для каждого $m' \in M'$, $m' \neq 0_M$, верно $\mathrm{Ann}(m') \subseteq \mathrm{Ann}(m)$.

Предположим теперь, что M' не совпадает с M. Тогда найдется $m_0 \in M'$, отличный от 0_M и m, откуда $\mathrm{Ann}(m_0) \subset \mathrm{Ann}(m)$, т. е. для подходящего $s \in S$ верно $ms = 0_M$, но $m_0 s \neq 0_M$. В силу первого равенства s лежит в $\mathrm{Ann}(m)$, а поскольку $\mathrm{Ann}(m)$ — строгий первичный идеал в S, согласно свойству (2) найдется такой элемент $t \in S \setminus \mathrm{Ann}(m)$, что $st = 0$. Получаем, что, с одной стороны, $t \notin \mathrm{Ann}(m)$, а с другой — $m_0 st = m_0 0 = 0_M$, поэтому с учетом $m_0 s \neq 0_M$ имеем $t \in \mathrm{Ann}(m_0 s) \subseteq \mathrm{Ann}(m)$. Полученное противоречие означает совпадение M с M'.

Итак, каждое существенное расширение простого S-полумодуля M совпадает с M, тем самым ввиду произвольности M полукольцо S обладает свойством (1).

Теорема полностью доказана. □

Из теорем 3.1, 2.10 и теоремы Капланского о коммутативных V-кольцах (теорема B) немедленно вытекает основной результат данного пункта — теорема о коммутативных V-полукольцах.

Теорема 3.7. *Коммутативное полукольцо S является V-полукольцом в том и только том случае, когда $S = R \oplus T$, где R — регулярное кольцо, а T — зероидное полукольцо со свойством* (2).

В качестве дополнения к теореме 3.7 приведем несколько примеров и несложных утверждений, показывающих, как свойство «быть V-полукольцом» по-разному ведет себя применительно к кольцам и к зероидным полукольцам.

Во-первых, отметим, что в свойстве (2), которому должна удовлетворять «зероидная» часть коммутативного V-полукольца, в отличие от «кольцевой» части регулярность вообще не упоминается. Отсутствие какой-либо связи между этими свойствами подтверждает

Пример 3.8. Рассмотрим коммутативные зероидные полукольца: полукольцо $\mathbb{R}_+$ всех неотрицательных действительных чисел и полукольцо $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, умножение в которых обычное, а в качестве сложения элементов берется их максимум. Нетрудно видеть, что каждое из этих полуколец содержит ровно один строгий первичный идеал: нулевой. В самом деле, нулевой идеал является строгим и первичным в любом антикольце без делителей нуля. Кроме того, полукольцо $\mathbb{R}_+$ является полуполем и, следовательно, вообще не имеет ненулевых собственных (тем более строгих первичных) идеалов, а отсутствие строгих собственных ненулевых идеалов в полукольце $\mathbb{N}$ вытекает из следующих рассуждений. Если $I \neq \{0\}$ — строгий идеал в $\mathbb{N}$, то найдется $n \in I$, $n \neq 0$, так что $\max(1, n) = n \in I$, откуда $1 \in I$ ввиду строгости I, следовательно, $I = \mathbb{N}$. Ясно, что для нулевого идеала свойство (2) выполняется тривиальным образом, поэтому оба полукольца являются V-полукольцами по теореме 3.1, при этом первое полукольцо регулярно, а второе — нет. Примеры, показывающие, что среди регулярных коммутативных зероидных полуколец есть как V-полукольца, так и полукольца, ими не являющиеся, легко обнаруживаются с учетом доказываемого ниже предложения 3.10.

Во-вторых, заметим, что в отличие от регулярности свойство (2) затрагивает лишь те элементы полукольца, каждый из которых лежит в каком-либо строгом первичном идеале. Интуитивно ясно, что если таких идеалов в полукольце «мало», то и ограничение, накладываемое свойством (2) на полукольцо, должно быть достаточно слабым, что демонстрирует следующий

Пример 3.9. Пусть S — произвольное коммутативное полукольцо, не являющееся кольцом. Легко видеть, что его подполукольцо $S_1 = \{0\} \cup \{1 + s : s \in S\}$ является антикольцом без делителей нуля. Следовательно, мы можем пополнить его «бесконечно удаленным» элементом $z \notin S_1$, положив $a + z = z + a = z$ для всех $a \in S_1 \cup \{z\}$, $0z = z0 = 0$ и $az = za = z$ при любом отличном от нуля $a \in S_1 \cup \{z\}$. Получаем коммутативное зероидное полукольцо $T = S_1 \cup \{z\}$, в котором имеется ровно один строгий первичный идеал: нулевой. Следовательно, для T верно (2), поэтому T есть V-полукольцо.

С другой стороны, если строгих первичных идеалов в коммутативном зероидном полукольце «много», то можно ожидать, что из свойства (2) будут вытекать достаточно жесткие ограничения на структуру полукольца. Например, имеет место

Предложение 3.10. *Ограниченная дистрибутивная решетка D обладает свойством (2) тогда и только тогда, когда D — булева алгебра.*

Доказательство. Предположим, что для D верно (2), и зафиксируем произвольный элемент $a \in D$. Покажем, что идеал $I = aD + \mathrm{Ann}(a) \subseteq D$ не может быть собственным.

Действительно, пусть $I \subset D$. Тогда I содержится в некотором максимальном идеале $H \subset D$. Очевидно, что если $x + y \in H$, то $x = (x + y)x \in H$ и $y = (x + y)y \in H$, поэтому идеал H является строгим (как, собственно, любой идеал произвольной решетки). Кроме того, согласно [1, следствие 7.13] всякий максимальный идеал произвольного ненулевого полукольца первичен, следовательно, H первичен. Поскольку $a \in I \subseteq H$, в силу свойства (2) найдется такой элемент $s \in D \backslash H$, что $as = 0$. Но тогда, с одной стороны, $s \notin H$, а с другой — $s \in \mathrm{Ann}(a) \subseteq I \subseteq H$. Полученное противоречие показывает, что случай $I \subset D$ невозможен.

Итак, $I = D$. Поскольку $I = aD + \mathrm{Ann}(a)$, для некоторых $x \in D$, $y \in \mathrm{Ann}(a)$ имеем $1 = ax + y$, откуда $1 = a + 1 = a + ax + y = a + y$, а поскольку $y \in \mathrm{Ann}(a)$, то $ay = 0$, так что y есть дополнение к a. Ввиду произвольности выбора элемента $a \in D$ заключаем, что каждый элемент дистрибутивной решетки D обладает дополнением, т. е. D является булевой алгеброй.

Обратно, пусть D — булева алгебра и a — произвольный элемент некоторого первичного идеала $I \subset D$. Ясно, что дополнение a' элемента a не лежит в I, поскольку в противном случае $1 = a + a' \in I$ и, следовательно, $I = D$, что противоречит предположению $I \subset D$. Так как $aa' = 0$, то $a' \in \mathrm{Ann}(a)$, значит, $\mathrm{Ann}(a) \nsubseteq I$, тем самым для D верно (2). $\square$

С помощью предложения 3.10, а также теорем 2.10 и 3.1 получаем следующую «гомологическую» характеризацию булевых алгебр внутри класса ограниченных дистрибутивных решеток.

Следствие 3.11. *Для ограниченной дистрибутивной решетки D следующие условия эквивалентны:*

1) *D — булева алгебра;*
2) *D — V-полукольцо;*
3) *любое существенное расширение каждого простого D-полумодуля M совпадает с M.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1999.
2. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
3. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979.
4. *Ježek J., Kepka T.* Simple semimodules over commutative semirings // Acta Sci. Math. 1983. V. 46, N 1. P. 17–27.
5. *Anderson F. W., Fuller K. R.* Rings and categories of modules. New York: Springer-Verl., 1992.
6. *Ильин С. Н.* Прямые суммы инъективных полумодулей и прямые произведения проективных полумодулей над полукольцами // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 31–44.
7. *Wang H.* Injective hulls of semimodules over additively-idempotent semirings // Semigroup Forum. 1994. V. 48, N 3. P. 377–379.
8. *Katsov Y.* Tensor products and injective envelopes of semimodules over additive regular semirings // Algebra Colloq. 1997. V. 4, N 2. P. 121–131.

Статья поступила 15 марта 2011 г.

Ильин Сергей Николаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
кафедра алгебры и математической логики,
Кремлевская, 18, Казань 420008
`Sergey.Ilyin@ksu.ru`