Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 512.542

ПРОНОРМАЛЬНОСТЬ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ

Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин

Аннотация. Доказана пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах. Тем самым решена проблема 17.45(a) из «Коуровской тетради».

Ключевые слова: холлова группа, пронормальная подгруппа, простая группа.

Введение

В соответствии с определением Ф. Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$. Классическими примерами пронормальных подгрупп являются:

• нормальные подгруппы;

• максимальные подгруппы;

• силовские подгруппы конечных групп;

• картеровы (т. е. нильпотентные самонормализуемые) подгруппы конечных разрешимых групп;

• холловы подгруппы (т. е. подгруппы, у которых порядок и индекс взаимно просты) конечных разрешимых групп.

Пронормальность подгрупп в последних трех примерах следует из сопряженности силовских, картеровых и холловых подгрупп в конечных группах из соответствующих классов. В [1, теорема 9.2] первому автору удалось доказать сопряженность картеровых подгрупп в произвольных конечных группах. Как следствие, картеровы подгруппы конечных групп пронормальны.

В отличие от картеровых подгрупп холловы подгруппы в произвольной конечной группе могут оказаться несопряженными. Целью авторов является исследовать вопрос, для каких классов конечных групп выполнена гипотеза о пронормальности холловых подгрупп. В данной статье нами получен следующий результат.

Теорема 1. *Холловы подгруппы конечных простых групп пронормальны.*

Эта теорема дает положительный ответ на вопрос 17.45(a) из «Коуровской тетради» [2] и анонсирована авторами в [3, теорема 7.9]. В дальнейшем предполагается использовать этот результат для изучения наследуемости холлова свойства C_π надгруппами π-холловых подгрупп для произвольного множества π простых чисел [2, проблема 17.44(a); 4, гипотеза 3; 5, проблемы 2, 3] (все определения см. ниже).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–00391 и 10–01–90007) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0346).

1. Обозначения, соглашения и предварительные результаты

Используемые в статье обозначения в основном стандартны.

Если G — конечная группа, H — ее подгруппа и x — произвольный элемент из G, то через $Z(G)$, $O_\infty(G)$, $N_G(H)$, $C_G(H)$ и $C_G(x)$ обозначаются центр группы G, разрешимый радикал группы G, нормализатор в G подгруппы H, централизатор в G подгруппы H и централизатор в G элемента x соответственно. Для групп A и B через $A \times B$ и $A \circ B$ обозначаются соответственно прямое и некоторое центральное произведения. Если при этом A и B — подгруппы группы G, то через $\langle A, B\rangle$ и $[A, B]$ обозначаются соответственно подгруппа, порожденная множеством $A \cup B$, и взаимный коммутант подгрупп A и B.

Будем часто использовать обозначения из [6]. В частности, через $A : B$, $A^{\cdot}B$ и $A\,.\,B$ обозначаем некоторые расщепляемое, нерасщепляемое и произвольное расширения группы A с помощью группы B соответственно. Для группы G и подгруппы S симметрической группы Sym_n символом $G \wr S$ будем обозначать подстановочное сплетение G с помощью S (при этом n и вложение S в Sym_n считаются известными).

Тот факт, что H является пронормальной подгруппой группы G, будем обозначать через $H \operatorname{prn} G$.

В статье всегда символом π обозначается некоторое множество простых чисел. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется π-*числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, — π-*группой*. Для наибольшего π-числа, делящего натуральное число n, используется символ n_π. Подгруппа H группы G называется π-*холловой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G:H|) \subseteq \pi'$. Множество π-холловых подгрупп группы G будем обозначать символом $\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Холлова подгруппа — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π.

В соответствии с [7] будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π (или, короче, $G \in E_\pi$), если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G *обладает свойством* C_π ($G \in C_\pi$). Если к тому же любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством* D_π ($G \in D_\pi$). Группу со свойством E_π (C_π, D_π) будем называть также E_π- (соответственно C_π-, D_π-) *группой*.

Конечная группа, обладающая (суб)нормальным рядом, все факторы которого являются π- или π'-группами, называется π-*разделимой*.

Лемма 2 [7, лемма 1]. *Пусть A — нормальная подгруппа конечной группы G. Если $G \in E_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то $A, G/A \in E_\pi$, причем $H \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$ и $HA/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$.*

Лемма 3 [8; 7, следствие D5.2]. *Всякая π-разделимая группа обладает свойством D_π.*

Лемма 4. *Пусть H — подгруппа группы G, $g \in G$, $y \in \langle H, H^g\rangle$. Тогда если подгруппы H^y и H^g сопряжены в $\langle H^y, H^g\rangle$, то подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$.*

Доказательство. Пусть $z \in \langle H^y, H^g\rangle$ и $H^{yz} = H^g$. Тогда $z \in \langle H, H^g\rangle$, так как $\langle H^y, H^g\rangle \le \langle H, H^g\rangle$. Положим $x = yz$. Тогда $x \in \langle H, H^g\rangle$ и $H^x = H^g$. $\square$

Лемма 5. *Пусть H — подгруппа конечной группы G. Предположим, что подгруппа H содержит некоторую пронормальную (например, силовскую) подгруппу S группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $H \operatorname{prn} G$;

(2) *подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$ для любого $g \in N_G(S)$.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть (2) верно. Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Заметим, что $S, S^g \leq \langle H, H^g\rangle$. В силу пронормальности S существует элемент $y \in \langle S, S^g\rangle \leq \langle H, H^g\rangle$, для которого справедливо равенство $S^{gy} = S$. В частности, $gy \in N_G(S)$. Ввиду утверждения (2) подгруппы H и H^{gy} сопряжены в $\langle H, H^{gy}\rangle$. Тогда подгруппы $H^{y^{-1}}$ и H^g сопряжены в $\langle H^{y^{-1}}, H^g\rangle$. Теперь H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$ согласно лемме 4. $\square$

Лемма 6. *Пусть $^{-} : G \to G_1$ — гомоморфизм групп, $H \leq G$. Тогда если $H \operatorname{prn} G$, то $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$.*

Доказательство очевидно. $\square$

Лемма 7. *Пусть G — конечная группа и $G_1, \dots, G_n$ — нормальные подгруппы группы G такие, что $[G_i, G_j] = 1$ при $i \neq j$ и $G = G_1 \dots G_n$. Пусть для любого $i = 1, \dots, n$ в группе G_i выбрана пронормальная подгруппа H_i и $H = \langle H_1, \dots, H_n\rangle$. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Тогда $g = g_1 \dots g_n$ для некоторых элементов $g_1 \in G_1, \dots, g_n \in G_n$. Так как по условию для любого $i = 1, \dots, n$ подгруппа H_i пронормальна в G_i, существуют элементы $x_i \in \left\langle H_i, H_i^{g_i}\right\rangle$ такие, что $H_i^{x_i} = H_i^{g_i}$. Ввиду условия $[G_i, G_j] = 1$ при $i \neq j$ для всех $i = 1, \dots, n$ имеем $H_i^g = H_i^{g_i}$. Из тех же соображений $H_i^{x_i} = H_i^x$, где $x = x_1 \dots x_n$. Очевидно, что

$$x \in \left\langle H_i, H_i^{g_i} \mid i = 1, \dots, n\right\rangle = \left\langle H_i, H_i^g \mid i = 1, \dots, n\right\rangle = \langle H, H^g\rangle.$$

Кроме того,

$$H^g = \left\langle H_i^g \mid i = 1, \dots, n\right\rangle = \left\langle H_i^{g_i} \mid i = 1, \dots, n\right\rangle = \left\langle H_i^{x_i} \mid i = 1, \dots, n\right\rangle$$
$$= \left\langle H_i^x \mid i = 1, \dots, n\right\rangle = H^x. \quad \square$$

Лемма 8. *Пусть G — конечная группа, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $A \trianglelefteq G$ и $G = HA$. Тогда если $(H \cap A) \operatorname{prn} A$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. По лемме 2 подгруппа $H \cap A$ является π-холловой в A. Пусть $(H \cap A) \operatorname{prn} A$. Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и покажем, что $H^x = H^g$ для некоторого $x \in \langle H, H^g\rangle$.

Так как $G = HA$, существуют $h \in H$ и $a \in A$ такие, что $g = ha$. Поскольку $(H \cap A) \operatorname{prn} A$, найдется элемент $y \in \langle H \cap A, H^a \cap A\rangle$ такой, что $H^y \cap A = H^a \cap A$. Ввиду того, что

$$y \in \langle H \cap A, H^a \cap A\rangle \leq \langle H, H^a\rangle = \langle H, H^{ha}\rangle = \langle H, H^g\rangle,$$

и с учетом леммы 4 достаточно рассмотреть случай, когда $H = H^y$. В частности,

$$H \cap A = H^a \cap A = H^g \cap A.$$

Теперь H, H^g и g содержатся в $N_G(H \cap A)$. Так как $G = HA$, имеем $G = AN_G(H \cap A)$. Заметим, что группа

$$N_G(H \cap A)/N_A(H \cap A) = N_G(H \cap A)/(A \cap N_G(H \cap A)) \simeq AN_G(H \cap A)/A = G/A$$

является π-группой. Рассмотрим нормальный ряд

$$N_G(H \cap A) \trianglerighteq N_A(H \cap A) \trianglerighteq H \cap A \trianglerighteq 1$$

группы $N_G(H \cap A)$. Каждый его фактор является π- или π'-группой, поэтому группа $N_G(H \cap A)$ будет π-разделимой. Следовательно, подгруппа $\langle H, H^g \rangle$ группы $N_G(H \cap A)$ также π-разделима, и, в частности, $\langle H, H^g \rangle \in D_\pi$ по лемме 3. Таким образом, π-холловы подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. $\square$

Следующая лемма дает достаточное условие для обращения леммы 6 в случае, когда H — холлова подгруппа группы G.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и такой, что $\mathfrak{X} \subseteq C_\pi$. Пусть G — конечная группа, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, $A \trianglelefteq G$ и $^{-} : G \to G/A$ — естественный гомоморфизм. Предположим также, что $A \in \mathfrak{X}$. Тогда $H \operatorname{prn} G$, если и только если $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ справедлива по лемме 6.

Докажем $\Leftarrow$. Пусть $g \in G$. Требуется показать, что $H^x = H^g$ для некоторого элемента $x \in \langle H, H^g \rangle$. Так как $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$, существует $y \in \langle H, H^g \rangle$ такой, что $H^y A = H^g A$. Ввиду леммы 4 можно заменить H на H^y и считать, что $HA = H^g A$.

Рассмотрим подгруппу $M = \langle H \cap A, H^g \cap A \rangle$. В силу того, что $M \leq A$, $A \in \mathfrak{X}$ и класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп, имеем $M \in \mathfrak{X} \subseteq C_\pi$. Кроме того, $H \cap A, H^g \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$ по лемме 2, и $M \leq A$, значит, $H \cap A, H^g \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(M)$. Поэтому $H^a \cap A = H^g \cap A$ для некоторого $a \in M$. Так как $M \leq \langle H, H^g \rangle$, ввиду леммы 4 можно заменить H на H^a и считать, что $H \cap A = H^g \cap A$. В этом случае $g \in N_G(H \cap A)$ и $H, H^g \leq N_G(H \cap A)$. Поскольку $A \in C_\pi$, ввиду аргумента Фраттини имеем $G = AN_G(H \cap A)$. Далее,

$$N_G(H \cap A)/N_A(H \cap A) = N_G(H \cap A)/(A \cap N_G(H \cap A)) \simeq AN_G(H \cap A)/A = G/A = \overline{G}.$$

В силу того, что, как заметили выше, $\overline{H} = \overline{H}^{\overline{g}}$, из этого изоморфизма следует, что $HN_A(H \cap A) = H^g N_A(H \cap A)$. Обозначим для краткости последнюю группу через B. Тогда группа B является π-разделимой и $H, H^g \leq B$. Кроме того, группа $\langle H, H^g \rangle$ также π-разделима как подгруппа π-разделимой группы B. В частности, по лемме 3

$$\langle H, H^g \rangle \in D_\pi \quad \text{и} \quad H, H^g \in \mathrm{Hall}_\pi(\langle H, H^g \rangle),$$

откуда следует, что H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. $\square$

Пусть G — конечная группа и $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Согласно [7] будем говорить, что группа G *обладает силовской башней типа*[1)] $(p_1, \dots, p_n)$, если G обладает нормальным рядом

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_n = 1$$

таким, что каждая его секция G_{i-1}/G_i изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G.

[1)] Круглые скобки в записи $(p_1, \dots, p_n)$ используются для обозначения упорядоченного набора в отличие от фигурных скобок. Скажем, симметрическая группа Sym_3 обладает силовской башней типа $(2, 3)$, в то время как знакопеременная группа Alt_4 — силовской башней типа $(3, 2)$.

Лемма 10. *Пусть G — конечная группа, H — ее холлова подгруппа, обладающая силовской башней. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $g \in G$. Покажем, что H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Согласно [7, теорема A1] любые две холловы подгруппы конечной группы, обладающие силовской башней одного типа, сопряжены. Поскольку H и H^g — две холловы подгруппы группы $\langle H, H^g \rangle$, обладающие силовскими башнями одного типа, H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. $\square$

Лемма 11. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, H — ее холлова подгруппа, порядок которой не делится на 2 или 3. Тогда H обладает силовской башней.*

Доказательство. В случае, когда 2 не делит порядок H, лемма доказана в [9, теорема B]. В случае, когда 3 не делит порядок H, требуемое следует из [10, лемма 5.1, теорема 5.2]. $\square$

Симметрическую и знакопеременные группы степени n будем обозначать соответственно через Sym_n и Alt_n.

Конечное поле, содержащее q элементов, обозначается через $\mathbb{F}_q$.

Для нечетного числа q положим $\varepsilon(q) = (-1)^{(q-1)/2}$, т. е. $\varepsilon(q) = 1$, если $q-1$ делится на 4, и $\varepsilon(q) = -1$ в противном случае. Без дополнительных пояснений также будем использовать символы ε, η для обозначения произвольного элемента из множества $\{+1, -1\}$ или знака этого элемента.

Для групп лиева типа через q всегда обозначается порядок базового поля (см., например, [1]), а через p — его характеристика. Для матричной группы G через $\mathrm{P}G$ всегда обозначена редукция по модулю скаляров.

В обозначениях классических групп будем следовать [11]. Отметим лишь некоторые специальные обозначения из этой книги, к которым будем часто прибегать:

$\mathrm{GL}_n^+(q) = \mathrm{GL}_n(q)$ — полная (общая) линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_q$;

$\mathrm{SL}_n^+(q) = \mathrm{SL}_n(q)$ — специальная линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_q$;

$\mathrm{PGL}_n^+(q) = \mathrm{PGL}_n(q)$ — проективная линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_q$;

$\mathrm{PSL}_n^+(q) = \mathrm{PSL}_n(q)$ — проективная специальная линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_q$;

$\mathrm{GL}_n^-(q) = \mathrm{GU}_n(q)$ — полная унитарная линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_{q^2}$;

$\mathrm{SL}_n^-(q) = \mathrm{SU}_n(q)$ — специальная унитарная линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_{q^2}$;

$\mathrm{PSL}_n^-(q) = \mathrm{PSU}_n(q)$ — проективная специальная унитарная линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_{q^2}$;

$\mathrm{PGL}_n^-(q) = \mathrm{PGU}_n(q)$ — проективная унитарная линейная группа степени n над полем $\mathbb{F}_{q^2}$;

$\mathrm{Sp}_n(q)$ — симплектическая группа степени n над полем $\mathbb{F}_q$;

$\mathrm{PSp}_n(q)$ — проективная симплектическая группа степени n над полем $\mathbb{F}_q$.

Необходимые сведения о строении и свойствах групп лиева типа можно найти в [12–15], о линейных алгебраических группах — в [12], о связи между группами лиева типа и линейными алгебраическими группами — в [13–14]. Там же можно найти определения подгрупп Бореля и Картана, группы Вейля, параболической подгруппы и максимального тора для конечной группы лиева типа.

Будем обозначать группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ через $E_6^+(q)$ и $E_6^-(q)$ соответственно.

Отображением Фробениуса алгебраической группы $\overline{G}$ называется сюръективный эндоморфизм $\sigma : \overline{G} \to \overline{G}$ такой, что множество его неподвижных точек $\overline{G}_\sigma$ конечно. Известно, что любая простая группа лиева типа над конечным полем F характеристики p совпадает для некоторой алгебраической группы $\overline{G}$ над алгебраическим замыканием поля F и некоторого ее отображения Фробениуса σ с $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — подгруппой группы $\overline{G}_\sigma$, порожденной всеми p-элементами.

Пусть $\overline{R}$ — замкнутая σ-инвариантная подгруппа алгебраической группы $\overline{G}$ для некоторого отображения Фробениуса σ группы $\overline{G}$. Рассмотрим подгруппы $R = G \cap \overline{R}$ и $N(G,R) = G \cap N_{\overline{G}}(\overline{R})$, где $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Заметим, что $N(G,R) \leq N_G(R)$ и в общем случае $N(G,R) \neq N_G(R)$.

Лемма 12 [16, следствие теорем 1–3]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Тогда $N_G(S) = S$, за исключением следующих случаев:*

(1) $G \simeq J_2,\ J_3,\ Suz$ или HN и $|N_G(S):S| = 3$;

(2) $G \simeq {}^2G_2(q)$ или J_1 и $N_G(S) \simeq 2^3.7.3 < \mathrm{Hol}(2^3)$;

(3) G — группа лиева типа над полем характеристики 2 и $N_G(S)$ — подгруппа Бореля в группе G;

(4) $G \simeq \mathrm{PSL}_2(q)$, где $3 < q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $N_G(S) \simeq \mathrm{Alt}_4$;

(5) $G \simeq E_6^\eta(q)$, $\eta = \pm$, q нечетно и $N_G(S) = S \times C$, где C — неединичная циклическая группа порядка $(q-\eta)_{2'}/(q-\eta,3)_{2'}$;

(6) $G \simeq \mathrm{PSp}_{2m}(q)$, $m \geq 2$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, фактор-группа $N_G(S)/S$ изоморфна элементарной абелевой 3-группе порядка 3^t и число t находится из двоичного разложения

$$m = 2^{s_1} + \dots + 2^{s_t},$$

где $s_1 > \dots > s_t \geq 0$;

(7) $G \simeq \mathrm{PSL}_n^\eta(q)$, $n \geq 3$, $\eta = \pm$, q нечетно,

$$N_G(S) \simeq S \times C_1 \times \dots \times C_{t-1},$$

число t находится из двоичного разложения

$$n = 2^{s_1} + \dots + 2^{s_t},$$

где $s_1 > \dots > s_t \geq 0$, и $C_1, \dots, C_{t-2}, C_{t-1}$ — циклические группы порядков $(q-\eta)_{2'}, \dots, (q-\eta)_{2'}, (q-\eta)_{2'}/(q-\eta,n)_{2'}$ соответственно.

Лемма 13 [7, теорема A4; 17]. *Пусть $2,3 \in \pi$. Тогда точный список всех случаев, когда симметрическая группа Sym_n содержит собственную π-холлову подгруппу, приведен в табл. 1. В частности, любая собственная π-холлова подгруппа группы Sym_n максимальна в Sym_n.*

Таблица 1. π-Холловы подгруппы в симметрических группах

n	$\pi \cap \pi(\mathrm{Sym}_n)$	$H \in \mathrm{Hall}_\pi(\mathrm{Sym}_n)$
простое	$\pi((n-1)!)$	Sym_{n-1}
7	$\{2,3\}$	$\mathrm{Sym}_3 \times \mathrm{Sym}_4$
8	$\{2,3\}$	$\mathrm{Sym}_4 \wr \mathrm{Sym}_2$

Лемма 14 [18, теорема 4.1]. *Пусть G является либо одной из 26 спорадических групп, либо группой Титса. Предположим, что π содержит 2 и 3. Тогда группа G обладает собственной π-холловой подгруппой H в том и только том случае, когда выполняется одно из условий на G и $\pi \cap \pi(G)$ из табл. 2. Там же указано строение подгруппы H.*

Таблица 2. π-Холловы подгруппы
в спорадических группах, случай $2, 3 \in \pi$

G	$\pi \cap \pi(G)$	Строение H
M_{11}	$\{2,3\}$	$3^2 : Q_8.2$
	$\{2,3,5\}$	$\mathrm{Alt}_6\,.2$
M_{22}	$\{2,3,5\}$	$2^4 : \mathrm{Alt}_6$
M_{23}	$\{2,3\}$	$2^4 : (3 \times \mathrm{Alt}_4) : 2$
	$\{2,3,5\}$	$2^4 : \mathrm{Alt}_6$
	$\{2,3,5\}$	$2^4 : (3 \times \mathrm{Alt}_5) : 2$
	$\{2,3,5,7\}$	$\mathrm{L}_3(4) : 2_2$
	$\{2,3,5,7\}$	$2^4 : \mathrm{Alt}_7$
	$\{2,3,5,7,11\}$	M_{22}
M_{24}	$\{2,3,5\}$	$2^6 : 3\dot{}\mathrm{Sym}_6$
J_1	$\{2,3\}$	$2 \times \mathrm{Alt}_4$
	$\{2,3,5\}$	$2 \times \mathrm{Alt}_5$
	$\{2,3,7\}$	$2^3 : 7 : 3$
J_4	$\{2,3,5\}$	$2^{11} : (2^6 : 3\dot{}\mathrm{Sym}_6)$

Лемма 15 [19, теорема 3.3]. *Пусть G — конечная группа лиева типа над полем характеристики $p \in \pi$. Если H — π-холлова подгруппа группы G, то H либо содержится в подгруппе Бореля, либо является параболической подгруппой группы G.*

Лемма 16 [20, лемма 3.1]. *Пусть $G \simeq \mathrm{P\,SL}_2(q) \simeq \mathrm{P\,SL}_2^{\eta}(q) \simeq \mathrm{P\,Sp}_2(q)$, где q — степень нечетного простого числа p, и положим $\varepsilon = \varepsilon(q)$. Допустим, что $2, 3 \in \pi$, а $p \notin \pi$. Тогда $G \in E_\pi$, если и только если имеет место один из случаев в табл. 3.*

Таблица 3. π-Холловы подгруппы H группы
$\mathrm{PSL}_2(q)$, $2, 3 \in \pi$, $p \notin \pi$

$\pi \cap \pi(G)$	H	Условия
$\subseteq \pi(q-\varepsilon)$	$D_{q-\varepsilon}$	—
$\{2,3\}$	Alt_4	$(q^2-1)_{\{2,3\}} = 24$
$\{2,3\}$	Sym_4	$(q^2-1)_{\{2,3\}} = 48$
$\{2,3,5\}$	Alt_5	$(q^2-1)_{\{2,3,5\}} = 120$

Лемма 17 [20, лемма 3.2]. *Предположим, что $G = \mathrm{GL}_2^{\eta}(q)$, где q — степень простого числа p, $\mathrm{P} : G \to G/Z(G) = \mathrm{PGL}_2^{\eta}(q)$ — естественный гомоморфизм, и пусть $\varepsilon = \varepsilon(q)$. Предположим также, что $2, 3 \in \pi$ и $p \notin \pi$. Подгруппа H группы G является π-холловой тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) $\pi\cap\pi(G)\subseteq\pi(q-\varepsilon)$, $\mathrm{P}H$ — π-холлова подгруппа в диэдральной подгруппе $D_{2(q-\varepsilon)}$ порядка $2(q-\varepsilon)$ группы $\mathrm{P}G$;

(2) $\pi\cap\pi(G)=\{2,3\}$, $(q^2-1)_{\{2,3\}}=24$, $\mathrm{P}H\simeq\mathrm{Sym}_4$.

При этом любые две π-холловы подгруппы группы G, удовлетворяющие одному и тому же утверждению (1) или (2), сопряжены.

Лемма 18 [20, лемма 4.3]. *Пусть $G^*=\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ — специальная линейная или унитарная группа с базовым полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, и пусть $n\geq 2$. Предположим, что $2,3\in\pi$ и $p\notin\pi$. Допустим, что $G^*\in E_\pi$ и H^* — π-холлова подгруппа группы G^*. Тогда для G^*, H^* и π выполнено одно из следующих утверждений.*

(1) *$n=2$ и для групп $G=G^*/Z(G^*)$ и $H=H^*Z(G^*)/Z(G^*)$ выполнены условия в табл. 3.*

(2) *Либо $q\equiv\eta \pmod{12}$, либо $n=3$ и $q\equiv\eta\pmod 4$; группа Sym_n обладает свойством E_π, $\pi\cap\pi(G^*)\subseteq\pi(q-\eta)\cup\pi(n!)$ и если $r\in(\pi\cap\pi(n!))\setminus\pi(q-\eta)$, то $|G^*|_r=|\mathrm{Sym}_n|_r$; подгруппа H^* содержится в подгруппе*

$$M=L\cap G^*\simeq Z^{n-1}\,.\,\mathrm{Sym}_n,$$

где $L=Z\wr\mathrm{Sym}_n\leq\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ и $Z=\mathrm{GL}_1^\eta(q)$ — циклическая группа порядка $q-\eta$.

(3) *$n=2m+k$, где $k\in\{0,1\}$, $m\geq 1$, $q\equiv-\eta\pmod 3$, $\pi\cap\pi(G^*)\subseteq\pi(q^2-1)$, группы Sym_m и $\mathrm{GL}_2^\eta(q)$ обладают свойством E_π*[2)]*; подгруппа H^* содержится в подгруппе*

$$M=L\cap G^*\simeq\big(\underbrace{\mathrm{GL}_2^\eta(q)\circ\dots\circ\mathrm{GL}_2^\eta(q)}_{m\text{ раз}}\big)\,.\,\mathrm{Sym}_m\circ Z,$$

где $L=\mathrm{GL}_2^\eta(q)\wr\mathrm{Sym}_m\times Z\leq\mathrm{GL}_n(q)$ и Z — циклическая группа порядка $q-\eta$ в случае, когда $k=1$, и $Z=1$ в случае, когда $k=0$. Подгруппа H^*, действуя сопряжениями на множестве сомножителей вида $\mathrm{GL}_2^\eta(q)$ в произведении

$$\underbrace{\mathrm{GL}_2^\eta(q)\circ\dots\circ\mathrm{GL}_2^\eta(q)}_{m\text{ раз}},\tag{1}$$

имеет не более двух орбит. Пересечение подгруппы H^* с каждым из сомножителей $\mathrm{GL}_2^\eta(q)$ в (1) является π-холловой подгруппой в $\mathrm{GL}_2^\eta(q)$. Все пересечения H^* с сомножителями, лежащими в одной и той же орбите, удовлетворяют одному и тому же утверждению (1) или (2) в лемме 17.

(4) *$n=4$, $\pi\cap\pi(G^*)=\{2,3,5\}$, $q\equiv5\eta\pmod 8$, $(q+\eta)_3=3$, $(q^2+1)_5=5$ и $H^*\simeq 4\,.\,2^4\,.\,\mathrm{Alt}_6$.*

(5) *$n=11$, $\pi\cap\pi(G^*)=\{2,3\}$, $(q^2-1)_{\{2,3\}}=24$, $q\equiv-\eta\pmod 3$, $q\equiv\eta\pmod 4$, подгруппа H^* содержится в подгруппе $M=L\cap G^*$, где L — подгруппа группы G^* вида $\big(\big(\mathrm{GL}_2^\eta(q)\wr\mathrm{Sym}_4\big)\perp\big(\mathrm{GL}_1^\eta(q)\wr\mathrm{Sym}_3\big)\big)$ и*

$$H^*=(((Z\circ 2\,.\,\mathrm{Sym}_4)\wr\mathrm{Sym}_4)\times(Z\wr\mathrm{Sym}_3))\cap G,$$

где Z — силовская 2-подгруппа циклической группы порядка $q-\eta$.

Лемма 19 [20, лемма 4.4]. *Пусть $G^*=\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ — симплектическая группа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Предположим, что $2,3\in\pi$ и $p\notin\pi$. Допустим, что $G^*\in E_\pi$ и $H^*\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Тогда группы Sym_n и $\mathrm{SL}_2(q)$ обладают*

[2)] Ввиду леммы 16 условия $\mathrm{GL}_2^\eta(q)\in E_\pi$ и $q\equiv-\eta\pmod 3$ означают, что $q\equiv-\eta\pmod r$ для всех нечетных чисел $r\in\pi(q^2-1)\cap\pi$.

свойством E_π *и* $\pi \cap \pi(G^*) \subseteq \pi(q^2-1)$. *Кроме того,* H^* *является* π*-холловой подгруппой группы*

$$M = \mathrm{Sp}_2(q) \wr \mathrm{Sym}_n \simeq (\underbrace{\mathrm{SL}_2(q) \times \cdots \times \mathrm{SL}_2(q)}_{n \text{ раз}}) : \mathrm{Sym}_n \leq G^*.$$

Лемма 20 [20, лемма 7.3]. *Пусть* $G = E_6^\eta(q)$, *где* q — *степень простого числа* p, *и* $\varepsilon = \varepsilon(q)$. *Предположим, что* $2,3 \in \pi$ *и* $p \notin \pi$. *Допустим, что группа* G *обладает* π*-холловой подгруппой* H. *Тогда* $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$ *и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\eta = \varepsilon$, $5 \in \pi$ *и* H *является* π*-холловой подгруппой в группе*

$$M = ((q-\eta)^6.W(E_6))/(3, q-\eta);$$

(2) $\eta = -\varepsilon$ *и* H *является* π*-холловой подгруппой в группе*

$$M = (q^2-1)^2(q+\eta)^2.W(F_4).$$

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — конечная простая группа и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Покажем, что $H \,\mathrm{prn}\, G$, и тем самым докажем теорему 1. Ввиду лемм 10 и 11 можно считать, что $2,3 \in \pi$. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(H) \subseteq \mathrm{Syl}_2(G)$ и $g \in N_G(S)$ — произвольный элемент. Согласно лемме 5 достаточно показать, что подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Если $N_G(S) = S$, то требуемое верно: $g \in N_G(S) = S \leq H$, поэтому $H^g = H$. Следовательно, можно считать, что имеет место один из исключительных случаев (1)–(7) в лемме 12 и H — собственная π-холлова подгруппа группы G.

Будем рассматривать случаи (1)–(7) в лемме 12, доказывая попутно ряд вспомогательных лемм. Для согласования обозначений в леммах с уже введенными будем говорить, что *выполнено условие* $(\star)$, если

(а) G — конечная простая группа;
(б) $2,3 \in \pi$;
(в) $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ и $H < G$;
(г) $S \in \mathrm{Syl}_2(H) \subseteq \mathrm{Syl}_2(G)$;
(д) $g \in N_G(S)$.

Из леммы 14 непосредственно вытекает следующая

Лемма 21. *Пусть выполнено условие* $(\star)$. *Тогда если* $G \simeq J_2, J_3, Suz$ *или* HN, *то группа* G *не содержит собственных* π*-холловых подгрупп.*

Таким образом, если имеет место случай (1) в лемме 12, то ввиду леммы 5 $H \,\mathrm{prn}\, G$.

Лемма 22. *Пусть выполнено условие* $(\star)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если* $G \simeq {}^2G_2(q)$, *то* G *не содержит собственных* π*-холловых подгрупп.*
(2) *Если* $G \simeq J_1$, *то имеет место один из следующих случаев:*
(а) $H \simeq 2 \times \mathrm{Alt}_4$ *и* H *обладает силовской башней;*
(б) $H \simeq 2^3 : 7 : 3$ *и* H *обладает силовской башней;*
(в) $H \simeq 2 \times \mathrm{Alt}_5$ *и* H *является максимальной в* G.

(3) *Если $G \simeq J_1$, то H сопряжена с H^g элементом из $\langle H, H^g\rangle$.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из [19, теорема 1.2], так как $3 \in \pi$ и 3 является характеристикой основного поля для группы ${}^2G_2(q)$. Тот факт, что H в утверждении (2) имеет указанное строение, вытекает из леммы 14, причем видно, что в случаях (а) и (б) подгруппа обладает силовской башней. В случае (в) подгруппа H максимальна согласно [6]. Утверждение (3) следует из (2) с учетом леммы 10 и пронормальности максимальных подгрупп. □

Леммы 5 и 22 гарантируют, таким образом, что $H \operatorname{prn} G$, если имеет случай (2) в лемме 12.

Лемма 23. *Пусть выполнено условие ($\star$), причем G является группой лиева типа над полем характеристики 2. Тогда S — максимальная унипотентная подгруппа, $N_G(S)$ — подгруппа Бореля в группе G и имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) *H содержится в подгруппе Бореля и обладает силовской башней;*

(2) *H является параболической и содержит $N_G(S)$.*

В любом случае H сопряжена с H^g элементом из $\langle H, H^g\rangle$.

Доказательство. Справедливость одного из утверждений (1), (2) следует из леммы 15, строения подгрупп Бореля и того факта, что любая параболическая подгруппа содержит некоторую подгруппу Бореля. Используя лемму 10, заключаем, что H сопряжена с H^g элементом из $\langle H, H^g\rangle$, если верно утверждение (1). Для утверждения (2) аналогичный вывод очевиден, так как $g \in H$. □

Таким образом, если имеет место случай (3) в лемме 12, то $H \operatorname{prn} G$.

Лемма 24. *Пусть выполнено условие ($\star$), причем $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $q > 3$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) *H является π-холловой подгруппой в диэдральной группе порядка $q-\varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon(q) = (-1)^{(q-1)/2}$, и обладает силовской башней;*

(2) *$H \simeq \mathrm{Alt}_4$ и H обладает силовской башней;*

(3) *$H \simeq \mathrm{Alt}_5$ и H содержит $N_G(S) \simeq \mathrm{Alt}_4$, в частности, $H^g = H$.*

В любом случае подгруппа H сопряжена с H^g элементом из $\langle H, H^g\rangle$.

Доказательство. Утверждение о строении H вытекает из леммы 16 и условий $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $q > 3$. При этом если H содержится в диэдральной подгруппе или $H \simeq \mathrm{Alt}_4$, то очевидно, что она обладает силовской башней. Допустим, что $H \simeq \mathrm{Alt}_5$. Тогда $\mathrm{Alt}_4 = N_H(S) \le N_G(S) \simeq \mathrm{Alt}_4$, поэтому $N_H(S) = N_G(S)$. Из утверждений (1)–(3), используя при необходимости лемму 10, получаем требуемое. □

Тем самым доказано, что если имеет место случай (4) в лемме 12, то $H \operatorname{prn} G$.

Из леммы 24 вытекает также следующее утверждение, которое будет активно использоваться при изучении случаев (6) и (7) в лемме 12.

Лемма 25. *Пусть $2, 3 \in \pi$, q — степень нечетного простого числа $p \notin \pi$, $G^* \in \left\{\mathrm{PSL}_2(q),\ \mathrm{PGL}_2^\eta(q),\ \mathrm{SL}_2(q),\ \mathrm{GL}_2^\eta(q)\right\}$ и $H^* \in \mathrm{Hall}_\pi(G^*)$. Тогда $H^* \operatorname{prn} G^*$.*

Доказательство. Если $G^* = \mathrm{PSL}_2(q)$ и $S^* \in \mathrm{Syl}_2(H^*) \subseteq \mathrm{Syl}_2(G^*)$, то по лемме 12 либо $N_{G^*}(S^*) = S^*$, либо группа G^* удовлетворяет условию леммы 24. В обоих случаях H^* пронормальна.

Далее, пусть $G^* = \mathrm{PGL}_2^\eta(q)$ и $A^* = \mathrm{PSL}_2^\eta(q) \simeq \mathrm{PSL}_2(q)$ — нормальная подгруппа индекса 2 в G^*. По доказанному $H^* \cap A^* \operatorname{prn} A^*$ и $G^* = A^*H^*$. Применяя лемму 8, заключаем, что $H^* \operatorname{prn} G^*$.

Наконец, пусть G^* совпадает с одной из групп $\mathrm{SL}_2(q)$ или $\mathrm{GL}_2^\eta(q)$. Возьмем в лемме 9 в качестве $\mathfrak{X}$ класс всех 2-групп. Согласно этой лемме с учетом доказанного $H^* \operatorname{prn} G^*$. $\square$

Изучим случай (5) в лемме 12.

Лемма 26. *Пусть выполнено условие* $(\star)$ *и* $G = E_6^\eta(q)$, *где* q — *степень некоторого числа* $p \notin \pi$. *Обозначим число* $\varepsilon(q)$ *через* ε. *Тогда*

(1) G *содержит инвариантный относительно* S *максимальный тор* T *такой, что*

$$|T| = \begin{cases} (q-\varepsilon)^6/(3, q-\varepsilon), & \text{если } \eta = \varepsilon, \\ (q-\varepsilon)^4(q+\varepsilon)^2, & \text{если } \eta = -\varepsilon, \end{cases}$$

причем $H \leq N_G(T)$ *и* $N_G(T)$ *является расширением* T *с помощью* π*-группы;*

(2) $N_G(T)$ *содержит* $N_G(S)$*;*

(3) *подгруппы* H *и* H^g *сопряжены в* $\langle H, H^g\rangle$.

Доказательство. (1) Существование тора T, инвариантного относительно S, следует из [12, теорема 4.10.2]. Ввиду [10, лемма 3.10] такой тор определен однозначно с точностью до сопряжения и $N_G(T) = N(G,T)$. Кроме того, ввиду [10, лемма 3.11] порядок тора T равен $(q-\varepsilon)^6/(3, q-\varepsilon)$, если $\varepsilon = \eta$, и равен $(q-\varepsilon)^4(q+\varepsilon)^2$, если $\varepsilon = -\eta$. Поскольку $G \in E_\pi$ и $2, 3 \in \pi$, а $p \notin \pi$, из леммы 20 получаем, что H лежит в $N_G(T)$ для некоторого такого тора T и $N_G(T)/T$ является π-группой.

(2) Поскольку $H \leq N_G(T)$ и $3 \in \pi$, группа $N_G(T)$ содержит силовскую 3-подгруппу группы G. Поэтому из [10, лемма 3.13] вытекает, что $N_G(S) \leq N_G(T)$.

(3) Ввиду утверждения (2) леммы достаточно доказать, что $H \operatorname{prn} N_G(T)$. В силу (1) группа $N_G(T)$ является расширением абелевой группы T с помощью π-группы, в частности, $N_G(T) = HT$. Теперь $H \operatorname{prn} N_G(T)$ согласно лемме 8. $\square$

Значит, если имеет место случай (5) в лемме 12, то $H \operatorname{prn} G$.

В следующей лемме изучаются случай (6) и частично (7) из леммы 12. Нам потребуется понятие фундаментальной подгруппы из [21]. Мы будем его использовать только для простых линейных, унитарных и симплектических групп нечетной характеристики и их естественных центральных расширений. Напомним, что если G — одна из таких групп, X^+ — длинная корневая подгруппа в G и X^- — противоположная корневая подгруппа, то *фундаментальной* будет называться любая подгруппа, сопряженная в G с $\langle X^+, X^-\rangle \simeq \mathrm{SL}_2(q)$. Если $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, то через $\mathrm{Fun}_G(S)$ обозначается множество всех таких фундаментальных подгрупп K группы G, для которых $K \cap S \in \mathrm{Syl}_2(K)$. Известно [21], что $\mathrm{Fun}_G(S)$ — максимальное по включению S-инвариантное множество попарно перестановочных фундаментальных подгрупп группы G.

Лемма 27. *Пусть выполнено условие* $(\star)$ *и* G — *одна из групп* $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ *или* $\mathrm{PSp}_n(q)$, *где* $n > 2$. *Пусть* $\Delta = \mathrm{Fun}_G(S)$, *и допустим, что множество* Δ *инвариантно относительно* H *(т. е.* $H \leq N_G(\Delta)$ *в обозначениях работы* [21]*). Тогда подгруппы* H *и* H^g *сопряжены в* $\langle H, H^g\rangle$.

Доказательство. Пусть $m = [n/2]$. Тогда $|\Delta| = m$.

Согласно [11, предложения 4.1.4, 4.2.9 и 4.2.10] полный стабилизатор $N_G(\Delta)$ в группе G множества Δ совпадает с образом в G подгруппы M из $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ или $\mathrm{Sp}_n(q)$, где подгруппа M определяется следующим образом. Если $G=\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$, то

$$M = L\cap \mathrm{SL}_n^\eta(q)\simeq \big(\underbrace{\mathrm{GL}_2^\eta(q)\circ\dots\circ \mathrm{GL}_2^\eta(q)}_{m\text{ раз}}\big).\,\mathrm{Sym}_m\circ Z,$$

причем $L=\mathrm{GL}_2^\eta(q)\wr \mathrm{Sym}_m\times Z\leq \mathrm{GL}_n^\eta(q)$ и Z — циклическая группа порядка $q-\eta$ в случае, когда n нечетно, и $Z=1$ в случае, когда n четно. Если же $G=\mathrm{PSp}_n(q)$, то

$$M=\mathrm{Sp}_2(q)\wr \mathrm{Sym}_m\simeq (\underbrace{\mathrm{SL}_2(q)\times\dots\times \mathrm{SL}_2(q)}_{m\text{ раз}}):\mathrm{Sym}_m\leq \mathrm{Sp}_n(q).$$

Пусть через

$$\rho: N_G(\Delta)\to \mathrm{Sym}(\Delta)\simeq \mathrm{Sym}_m$$

обозначено действие группы $N_G(\Delta)$ на Δ. Согласно [21, теорема 2] $N_G(\Delta)^\rho=\mathrm{Sym}(\Delta)$. Из леммы 13 следует, что π-холлова подгруппа H^ρ либо максимальна в $\mathrm{Sym}(\Delta)$, либо равна $\mathrm{Sym}(\Delta)$. В частности,

$$H^\rho \operatorname{prn} \mathrm{Sym}(\Delta)\quad\text{и}\quad N_{\mathrm{Sym}(\Delta)}(H^\rho)=H^\rho.$$

Поскольку $N_G(S)\leq N_G(\Delta)$ и $g\in N_G(S)$, существует элемент $y\in\langle H,H^g\rangle$ такой, что $(H^g)^\rho=(H^y)^\rho$. Тогда

$$(gy^{-1})^\rho\in N_{\mathrm{Sym}(\Delta)}(H^\rho)=H^\rho.$$

Пусть через A обозначено ядро гомоморфизма ρ. Из строения подгруппы $N_G(\Delta)$ вытекает, что если $\overline{}: A\to A/O_\infty(A)$ — естественный гомоморфизм, то группа $\overline{A}$ содержит нормальную подгруппу, изоморфную

$$\underbrace{\mathrm{PSL}_2(q)\times\dots\times \mathrm{PSL}_2(q)}_{m\text{ раз}},$$

индекс которой в $\overline{A}$ является степенью двойки. Из лемм 7–9 (в качестве $\mathfrak{X}$ в лемме 9 берем класс разрешимых групп) и 25 заключаем, что π-холловы подгруппы в группе A пронормальны. Теперь по лемме 8 π-холловы подгруппы в HA пронормальны. Кроме того, $gy^{-1}\in HA$, так как $(gy^{-1})^\rho\in H^\rho$. Следовательно, $H^z=H^{gy^{-1}}$ для некоторого $z\in\langle H,H^{gy^{-1}}\rangle\leq\langle H,H^g\rangle$. Пусть $x=zy$. Тогда $H^x=H^g$ и $x\in\langle H,H^g\rangle$. □

Таким образом, если имеет место случай (6) в лемме 12 или случай (7) и для прообраза $H^*\leq G^*=\mathrm{SL}^\eta(q)$ подгруппы H справедливо утверждение (3) в лемме 18, то $H\operatorname{prn}G$. Заметим также, что если имеет место случай (7) в лемме 12 и справедливо утверждение (1) в лемме 18, то $H\operatorname{prn}G$ по лемме 25.

Следующая лемма позволяет также исключить из рассмотрения ситуацию, когда имеет место случай (7) в лемме 12 и справедливо утверждение (4) в лемме 18.

Лемма 28. *Пусть $G=\mathrm{PSL}_4^\eta(q)$, где q нечетно. Тогда $N_G(S)=S$.*

Доказательство. Требуемое следует из леммы 12, поскольку в двоичном разложении числа 4 содержится только одна единица. □

В ситуации, когда имеет место случай (7) в лемме 12 и справедливо утверждение (2) в лемме 18, подгруппа H нормализует максимальный тор порядка $(q-\eta)^{n-1}/(n,q-\eta)$ группы $G=\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$. Разбор этой ситуации аналогичен разбору случая (5) в лемме 12 и производится в следующей лемме.

Лемма 29. *Пусть выполнено условие* $(\star)$ *и* $G = \mathrm{PSL}_n^\eta(q)$, *где* q — *степень некоторого простого числа* $p \notin \pi$. *Предположим также, что* $q \equiv \eta \pmod 4$ *и существует максимальный* H*-инвариантный тор* T *порядка* $(q-\eta)^{n-1}/(n, q-\eta)$. *Тогда*

(1) $N_G(T) = N(G, T)$;

(2) $N_G(T)/T \simeq \mathrm{Sym}_n$;

(3) $N_G(T)$ *содержит* $N_G(S)$;

(4) *подгруппы* H *и* H^g *сопряжены в* $\langle H, H^g\rangle$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из [10, лемма 3.10], так как тор T инвариантен относительно заданной силовской 2-подгруппы S группы G.

(2) Поскольку справедливо равенство $N_G(T) = N(G, T)$, фактор-группа $N_G(T)/T = N(G, T)/T$ изоморфна группе Sym_n (с одной стороны, эта фактор-группа вкладывается в группу Вейля группы G, изоморфную Sym_n, а с другой — подгруппа вида $T.\mathrm{Sym}_n$ содержится в G и, следовательно, в $N_G(T)$).

(3) Поскольку $H \leq N_G(T)$ и $3 \in \pi$, нормализатор $N_G(T)$ содержит силовскую 3-подгруппу группы G. Поэтому из [10, лемма 3.13] вытекает, что $N_G(S) \leq N_G(T)$.

(4) В силу утверждения (3) леммы достаточно доказать, что $H \,\mathrm{prn}\, N_G(T)$. Ввиду утверждения (2) леммы группа $N_G(T)$ является расширением абелевой группы T с помощью Sym_n. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\overline{}$: $N_G(T) \to N_G(T)/T \simeq \mathrm{Sym}_n$. В силу [20, лемма 2.1(a)] подгруппа $\overline{H}$ является π-холловой подгруппой группы Sym_n. Поскольку ввиду условия $2, 3 \in \pi$ и леммы 13 любая π-холлова подгруппа либо максимальна в Sym_n, либо совпадает с Sym_n, имеем $\overline{H} \,\mathrm{prn}\, \overline{N_G(T)}$. Беря в лемме 9 в качестве $\mathfrak{X}$ класс всех конечных абелевых групп, получаем, что $H \,\mathrm{prn}\, N_G(T)$. $\square$

Таким образом, мы разобрали все возможные случаи, за исключением ситуации, когда имеет место случай (7) в лемме 12, $G = \mathrm{PSL}_{11}^\eta(q)$ и выполнено утверждение (5) леммы 18 для прообраза $H^* \leq \mathrm{SL}_{11}^\eta(q)$ подгруппы H. В частности, справедлива

Лемма 30. *Пусть* $2, 3 \in \pi$ *и* q — *степень простого числа* $p \notin \pi$. *Тогда в группах* $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$, $\mathrm{PGL}_n^\eta(q)$, $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ *и* $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ *при* $n \leq 4$ *и* $n = 8$ *все* π*-холловы подгруппы пронормальны.*

Доказательство. Для $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ лемма доказана непосредственно ввиду леммы 18. Для $\mathrm{PGL}_n^\eta(q)$ требуемое вытекает из леммы 8, поскольку индекс

$$\left|\mathrm{PGL}_n^\eta(q) : \mathrm{PSL}_n^\eta(q)\right| = (n, q-\eta)$$

делит n и, следовательно, является π-числом. Наконец, группы $\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ и $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$ являются расширениями абелевых групп с помощью групп $\mathrm{PSL}_n^\eta(q)$ и $\mathrm{PGL}_n^\eta(q)$. Утверждение леммы для них справедливо ввиду доказанного и леммы 9. $\square$

Рассмотрим последний оставшийся случай. Нам потребуется

Лемма 31. *Пусть* $G^* = \mathrm{SL}_{11}^\eta(q)$, q *нечетно и* $S^* \in \mathrm{Syl}_2(G^*)$. *Пусть* $\Delta = \mathrm{Fun}_G(S^*)$. *Тогда*

(1) $|\Delta| = 5$ *и группа* S^*, *действуя на* Δ, *имеет ровно две орбиты:* Γ *порядка* 4 *и* Γ_0 *порядка* 1;

(2) Γ *и* Γ_0 *инвариантны относительно* $N_{G^*}(S^*)$;

(3) *если* Γ' — *некоторое множество попарно перестановочных фундаментальных подгрупп группы* G^*, *инвариантное относительно* S^* *и такое, что* $|\Gamma'| = 4$, *то* $\Gamma' = \Gamma$.

Доказательство. Обозначим через ρ действие группы $N_{G^*}(\Delta)$ на Δ. Согласно [21, теорема 2]

$$N_{G^*}(\Delta)^\rho = \mathrm{Sym}(\Delta) \simeq \mathrm{Sym}_5\,.$$

Группа S^ρ является силовской 2-подгруппой группы Sym_5 и поэтому имеет две орбиты на Δ: одну длины 4 и одну длины 1. Тем самым утверждение (1) верно. Утверждение (2) следует из того, что S^* и Δ инвариантны относительно $N_{G^*}(S^*)$. Наконец, Γ' содержится в Δ, поскольку Δ — единственное максимальное множество попарно перестановочных фундаментальных подгрупп, инвариантное относительно S^*. Поэтому Γ' является объединением некоторых орбит S^* на Δ и ввиду утверждения (1) равно Γ. $\square$

Лемма 32. *Пусть* $G^* = \mathrm{SL}^\eta_{11}(q)$ — *специальная линейная или унитарная группа и* V — *ее естественный модуль, снабженный тривиальной или унитарной формой соответственно. Допустим, что* $H^* \in \mathrm{Hall}_\pi(G^*)$, *где* $\pi \cap \pi(G^*) = \{2, 3\}$, *и предположим, что* H^* *содержится в подгруппе вида*

$$L = \big(\big(\mathrm{GL}^\eta_2(q) \wr \mathrm{Sym}_4\big) \times \big(\mathrm{GL}^\eta_1(q) \wr \mathrm{Sym}_3\big)\big) \cap G^*.$$

Пусть $S^* \in \mathrm{Syl}_2(H^*) \subseteq \mathrm{Syl}_2(G^*)$ *и* $g^* \in N_{G^*}(S^*)$. *Тогда*

(1) H^* *оставляет инвариантным некоторое множество* $\Gamma' = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ *из четырех попарно перестановочных фундаментальных подгрупп;*

(2) Γ' *инвариантно относительно* $N_{G^*}(S^*)$;

(3) *если* $V_i = [K_i, V]$ *и* $U = \sum V_i$, *то подпространство* U *инвариантно относительно* H^* *и* $N_{G^*}(S^*)$;

(4) *стабилизатор* M *в* G^* *подпространства* U *является подгруппой, в которой* π*-холловы подгруппы пронормальны;*

(5) $H^* \,\mathrm{prn}\, G^*$.

Доказательство. В группе $L = \big(\big(\mathrm{GL}^\eta_2(q) \wr \mathrm{Sym}_4\big) \times \big(\mathrm{GL}^\eta_1(q) \wr \mathrm{Sym}_3\big)\big) \cap G^*$ рассмотрим подгруппу $\big(\mathrm{GL}^\eta_2(q) \wr \mathrm{Sym}_4\big) \cap G^*$ и в базе соответствующего сплетения — попарно различные нормальные подгруппы K_1, K_2, K_3, K_4, изоморфные $\mathrm{SL}_2(q)$. Очевидно, $K_i \notin G^*$ и $K_i \notin L$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Кроме того, множество $\Gamma' = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ инвариантно относительно L и, следовательно, относительно H^*. Утверждение (1) доказано. Утверждение (2) вытекает из леммы 31. Заметим, что V_i можно рассматривать как естественный модуль для подгруппы K_i, поэтому $\dim(V_i) = 2$ и $V_i \cap V_j = 0$ при $i \neq j$. В частности, $\dim(U) = 8$. Инвариантность Γ' относительно H^* и $N_{G^*}(S^*)$ влечет инвариантность относительно этих же подгрупп множества $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ и, следовательно, подпространства U. Таким образом, (3) доказано. Если $\eta = +$, то стабилизатор M подпространства U является расширением некоторой p-группы с помощью центрального произведения $\mathrm{GL}_8(q) \circ \mathrm{GL}_3(3)$ (см. [11, предложение 4.1.17]), и из лемм 30, 7 и 9 заключаем, что π-холловы подгруппы в M пронормальны. Если же $\eta = -$, то M изоморфна центральному произведению $\mathrm{GU}_8(q) \circ \mathrm{GU}_3(q)$ (см. [11, предложение 4.1.4]), и, снова применяя леммы 30 и 7, получаем требуемое в (4). Ввиду утверждения (3) подгруппа H^* и любой элемент $g^* \in N_{G^*}(S^*)$ содержатся в M. Теперь из (4) и леммы 5 заключаем, что $H^* \,\mathrm{prn}\, G^*$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы и рассмотрим последний оставшийся случай. Пусть имеет место случай (7) в лемме 12, $G = \mathrm{PSL}_{11}^{\eta}(q)$ и выполнено утверждение (5) леммы 18 для прообраза $H^* \leq \mathrm{SL}_{11}^{\eta}(q)$ подгруппы H. Согласно лемме 32 имеем $H^* \operatorname{prn} \mathrm{SL}_{11}^{\eta}(q)$. Применение леммы 6 завершает доказательство теоремы 1. $\square$

Заключение

В связи с приведенным выше доказательством теоремы 1 сделаем небольшое замечание. Доказательство естественно разбивается на два случая. Первый случай, когда холлова подгруппа H конечной простой группы G имеет нечетный порядок (эквивалентно, четный индекс). Разбор этого случая сводится к применению теоремы Холла [7, теорема A1] (лемма 10) и теоремы Гросса [9, теорема B] (лемма 11). Во втором случае, когда холлова подгруппа H имеет четный порядок (эквивалентно, нечетный индекс), техника доказательства принципиально другая. Используются тот факт, что H содержит силовскую 2-подгруппу S группы G, и лемма 5, согласно которой для доказательства пронормальности подгруппы H достаточно установить сопряженность подгрупп H и H^g в $\langle H, H^g \rangle$ только для тех g, которые нормализуют подгруппу S. После этого применяется описание нормализаторов силовских 2-подгрупп в конечных простых группах, полученное А. С. Кондратьевым (лемма 12). Возможно, данная техника применима в более общей ситуации. Например, можно исследовать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *В конечных простых группах подгруппы нечетного индекса пронормальны.*

Ввиду леммы 5 гипотеза 1 справедлива для всех конечных простых групп, в которых силовская 2-подгруппа совпадает со своим нормализатором (например, согласно теореме А. С. Кондратьева (лемма 12) в знакопеременных группах степени, большей 5, ортогональных группах, а также в большинстве спорадических и исключительных групп).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вдовин Е. П.* Картеровы подгруппы в конечных почти простых группах // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 157–216.
2. *The Kourovka notebook.* Unsolved problems in group theory. Edited by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. 17th. ed. Novosibirsk: Russian Acad. Sci. Siberian Division, Inst. Math., 2010.
3. *Ревин Д. О., Вдовин Е. П.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
4. *Ревин Д. О., Вдовин Е. П.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 506–516.
5. *Ревин Д. О.* Вокруг гипотезы Ф. Холла // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 366–380.
6. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
7. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.
8. *Чунихин С. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 1. С. 29–32.
9. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.
10. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Proc. Conf. in honour of Marcel Herzog. Ischia Group Theory 2004. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. P. 229–265. (Contemp. Math.; V. 402).
11. *Kleidman P. B., Liebeck M.* The subgroups structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

12. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Math. Surv. Monogr.; V. 4, N 3).
13. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972.
14. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
15. *Carter R. W.* Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters. London: John Wiley & Sons, 1985.
16. *Кондратьев А. С.* Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
17. *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. V. 1, N 2. P. 271–279.
18. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.
19. *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 157–205.
20. *Revin D. O., Vdovin E. P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3614–3652.
21. *Aschbacher M.* On finite groups of Lie type and odd characteristic // J. Algebra. 1980. V. 66, N 1. P. 400–424.

Статья поступила 28 июня 2011 г.

Вдовин Евгений Петрович, Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vdovin@math.nsc.ru, revin@math.nsc.ru