Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 515.16+517.988.63+517.957

О КВАДРАТИЧНОЙ ПО ТЕНЗОРУ РИЧЧИ ДЕФОРМАЦИИ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

А. Н. Плотникова

Аннотация. Доказана теорема существования в малом потока, квадратичного по тензору Риччи для римановых метрик на компактных многообразиях при определенных условиях. Построены формулы деформации тензора кривизны Римана для данного потока.

Ключевые слова: риманова метрика, кривизна Риччи, трюк Де Тюрка, линеаризация.

1. Введение

В работе рассматривается поток

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij} + \lambda R_i^l R_{lj}, \tag{1}$$

определенный для римановых метрик g_{ij} на многообразиях. Здесь R_{ij} — тензор Риччи метрики g_{ij}, а $\lambda(x)$ — гладкая функция на многообразии. Мы ограничимся случаем компактных многообразий и установим существование в малом решений данной системы (теорема 1).

Этот поток является простейшим обобщением потока Риччи

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij},$$

введенного Гамильтоном для доказательства гипотез Пуанкаре и Терстона [1]. Именно с помощью этого потока гипотезы были доказаны Перельманом [2, 3]. В отличие от потока Риччи поток (1) квадратичен (а не линеен) по тензору Риччи. Более сложные обобщения имеют вид

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij} + \sum_{k=2}^{N} \lambda_k R_i^{s_1} R_{s_1}^{s_2} \dots R_{s_{k-2}}^{s_{k-1}} R_{s_{k-1}j}.$$

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи и Я. В. Базайкина, Г. В. Демиденко и Э. Куверта за полезные обсуждения.

2. О существовании потока

Напомним формулы для тензора кривизны R_{ijkl}, тензора Риччи R_{ij} и скалярной кривизны R, отвечающих метрике g_{ij}. Символы Кристоффеля и тензоры кривизны определяются так:

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^h_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^h_{ik} + \Gamma^h_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^h_{jp}\Gamma^p_{ik},$$

$$R_{ijkl} = g_{hk}R^h_{ijl}, \quad R_{ik} = g^{jl}R_{ijkl}, \quad R = g^{ij}R_{ij}.$$

Пусть M — компактное N-мерное многообразие. Рассмотрим уравнение (1) для метрик на M с начальными данными

$$g_{ij}(x,0) = \tilde{g}_{ij}(x), \tag{2}$$

где $\tilde{g}_{ij}(x)$ — гладкая положительно определенная метрика на M.

В двумерном случае для конформно-евклидовой метрики поток сводится к нелинейному уравнению на конформный фактор. А именно, пусть $ds^2 = e^{2\alpha}dzd\bar{z}$ — конформно-евклидова метрика. Тогда поток сохраняет конформно-евклидовы метрики и принимает вид

$$\alpha_t = \Delta\alpha + \frac{\lambda}{2}(\Delta\alpha)^2,$$

где $\Delta = e^{-2\alpha}\partial\bar{\partial}$ и $R_{ik} = -\delta_{ik}\partial\bar{\partial}\alpha$.

Теорема 1. *Существуют такие $T > 0$ и $\tilde{\lambda} > 0$, зависящие от $\tilde{g}$, что система* (1) *имеет единственное C^∞-решение на $[0,T)$ при $|\lambda(x)| < \tilde{\lambda}$ для любых C^∞-гладких начальных данных.*

Доказательство. 1. Трюк Де Тюрка. Воспользуемся этим трюком, который основан на построении вспомогательной системы, имеющей решение одновременно с исходной. Новая система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij} + \lambda R^l_i R_{lj} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i, \quad g_{ij}(x,0) = \tilde{g}_{ij}(x), \tag{3}$$

где $V_i = g_{ij}g^{kl}\big(\Gamma^j_{kl} - \widetilde{\Gamma}^j_{kl}\big)$. Построить такую систему можно, проведя вычисления, аналогичные тем, что проведены в [4]. Тогда вспомогательная система может быть приведена к виду (приведение осуществляется также аналогично работе [4])

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = {}& g^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta g_{ij} - g^{\alpha\beta}g_{ip}\tilde{g}^{pq}\widetilde{R}_{j\alpha q\beta} - g^{\alpha\beta}g_{jp}\tilde{g}^{pq}\widetilde{R}_{i\alpha q\beta}\\ &+ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{pq}(\widetilde{\nabla}_i g_{p\alpha}\widetilde{\nabla}_j g_{q\beta} + 2\widetilde{\nabla}_\alpha g_{jp}\widetilde{\nabla}_q g_{i\beta} - 2\widetilde{\nabla}_\alpha g_{jp}\widetilde{\nabla}_\beta g_{iq}\\ &- 2\widetilde{\nabla}_j g_{p\alpha}\widetilde{\nabla}_\beta g_{iq} - 2\widetilde{\nabla}_i g_{p\alpha}\widetilde{\nabla}_\beta g_{iq}) + \lambda g^{nm}R_{im}R_{nj},\end{aligned} \tag{4}$$

где множители в последнем слагаемом выражаются так:

$$\begin{aligned}R_{ij} = {}& -\frac{1}{2}(g^{kl}(\widetilde{\nabla}_k\widetilde{\nabla}_l g_{ij} + \widetilde{\nabla}_i\widetilde{\nabla}_j g_{kl} - \widetilde{\nabla}_i\widetilde{\nabla}_l g_{jk} - \widetilde{\nabla}_k\widetilde{\nabla}_j g_{il})\\ &- g^{kl}g_{jp}\tilde{g}^{pq}\widetilde{R}_{ikql} - \widetilde{R}_{ij} + \frac{1}{2}g^{kl}g^{pq}(\widetilde{\nabla}_k g_{jp}\widetilde{\nabla}_q g_{il} - \widetilde{\nabla}_k g_{jp}\widetilde{\nabla}_l g_{qi}\\ &- \widetilde{\nabla}_k g_{jp}\widetilde{\nabla}_i g_{ql} + \widetilde{\nabla}_i g_{jp}\widetilde{\nabla}_l g_{qk} + \widetilde{\nabla}_i g_{jp}\widetilde{\nabla}_k g_{ql} - \widetilde{\nabla}_i g_{jp}\widetilde{\nabla}_q g_{kl}\\ &+ \widetilde{\nabla}_p g_{ij}\widetilde{\nabla}_q g_{kl} - \widetilde{\nabla}_p g_{ij}\widetilde{\nabla}_l g_{qk} - \widetilde{\nabla}_p g_{ij}\widetilde{\nabla}_k g_{ql} + \widetilde{\nabla}_j g_{ip}\widetilde{\nabla}_l g_{qk}\\ &+ \widetilde{\nabla}_j g_{ip}\widetilde{\nabla}_k g_{ql} - \widetilde{\nabla}_j g_{ip}\widetilde{\nabla}_q g_{kl}\widetilde{\nabla}_p g_{jk}\widetilde{\nabla}_l g_{qi} + \widetilde{\nabla}_p g_{jk}\widetilde{\nabla}_i g_{ql}\\ &- \widetilde{\nabla}_p g_{jk}\widetilde{\nabla}_q g_{il} + \widetilde{\nabla}_j g_{pk}\widetilde{\nabla}_q g_{il} - \widetilde{\nabla}_j g_{pk}\widetilde{\nabla}_l g_{qi} - \widetilde{\nabla}_j g_{pk}\widetilde{\nabla}_i g_{ql})).\end{aligned} \tag{5}$$

Из этих уравнений видно, что если подставить (5) в (4), то результат окажется нелинейной по первым и по вторым производным системой уравнений в частных ковариантных производных. В данной работе будем рассматривать систему (4).

Так как эта система нелинейна по производным, сложно изучать ее в том виде, в котором она представлена. Для изучения существования решения воспользуемся методом линеаризации: построим линеаризацию этой системы в окрестности начальных данных и выясним, является ли такая система параболической.

2. Линеаризация системы (4). Поскольку на параболичность линеаризованной системы будут влиять только те ее составляющие, которые содержат вторые производные от неизвестных функций, слагаемые системы (4), не содержащие вторых производных, можно откинуть еще до процедуры линеаризации: они не повлияют на тип системы. Без таких слагаемых система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = g^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta g_{ij} + \lambda(x)(\dots).$$

Полученную систему рассмотрим как систему вида

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = f_{ij}(\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta g_{kl}, \widetilde{\nabla}_\delta g_{rq}, g_{sh}),$$

где все индексы меняются от 1 до N, а $f(u_{\alpha\beta kl}, v_{\delta rq}, w_{sh})$ — вполне определенная гладкая вещественнозначная функция на $M\times M\times M$. Линеаризуем эту систему в окрестности точки $g_0 = (\widetilde{\nabla}_{\alpha\beta}\tilde{g}_{kl}, \widetilde{\nabla}_\delta\tilde{g}_{rq}, \tilde{g}_{sh})$. Получим систему следующего вида:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_{\alpha\beta kl}}\bigg|_{g_0}(\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta g_{kl} - \widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta\tilde{g}_{kl}) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial v_{\delta rq}}\bigg|_{g_0}(\widetilde{\nabla}_\delta g_{rq} - \widetilde{\nabla}_\delta\tilde{g}_{rq}) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial w_{sh}}\bigg|_{g_0}(g_{sh} - \tilde{g}_{sh}).$$

Заметим, что два последних слагаемых в этих выражениях не содержат вторых производных, поэтому не влияют на тип системы. Поэтому их можно отбросить, как и слагаемые вида $\frac{\partial f_{ij}}{\partial u_{\alpha\beta kl}}\big|_{g_0}\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta\tilde{g}_{kl}$. После такого отбрасывания остается линейная система

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_{\alpha\beta kl}}\bigg|_{g_0}\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta g_{kl} = \tilde{g}^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta g_{ij} + \lambda(x) l^{\alpha\beta\gamma\delta}\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta g_{\gamma\delta ij}, \tag{6}$$

где $l^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — некоторые гладкие функции, зависящие только от $\tilde{g}$.

3. Параболичность системы (6). Из определения параболичности: система (6) параболична тогда и только тогда, когда ее правая часть эллиптична. Правая часть системы в нашем случае имеет вид

$$\sum_{|p|=2} a_p\partial^p\begin{pmatrix} g_{11}\\ g_{12}\\ \vdots\\ g_{N(N-1)}\\ g_{NN}\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где p — мультииндекс. По определению выражение (7) эллиптично, если матрица

$$A = \sum_{|p|=2} a_p x^p$$

имеет максимальный ранг для любого вектора $x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$.

Каждая матрица a_p имеет одинаковое количество строк и столбцов, поэтому в данном случае необходимо показать невырожденность A.

Как видно из определения матрицы A, каждый ее элемент — однородный полином второй степени от $x^1, \dots, x^N$ с функциональными коэффициентами. Будем обозначать элементы матрицы через $A_{ij,kl}$, где ij — номер строки, kl — номер столбца (очевидно, строки и столбцы занумерованы соответственно уравнениям и неизвестным функциям в системе уравнений). Заметим, что все диагональные элементы $A_{ij,ij}$ отличаются от недиагональных тем, что в них есть слагаемые, свободные от λ:

$$A_{ij,ij} = (\tilde{g})^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \lambda P_{ij,ij}(x), \tag{8}$$

где $P_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x)$ — однородный полином второй степени. Все недиагональные элементы матрицы имеют вид $A_{ij,kl} = \lambda P_{ij,kl}(x)$, $(ij) \neq (kl)$.

Дополнительные слагаемые на диагонали позволяют предположить, что возможно есть строгое диагональное преобладание при каком-то λ для матрицы A. Напомним, что матрица A обладает строгим диагональным преобладанием, если

$$|A_{ij,ij}| > \sum_{kl \neq ij} |A_{ij,kl}| \quad \text{для всех } i, j.$$

Известно, что если матрица обладает строгим диагональным преобладанием, то она невырожденна (лемма Гершгорина). Таким образом, для невырожденности матрицы необходимо показать следующее соотношение для любых i, j:

$$|(\tilde{g})^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \lambda P_{ij,ij}(x)| > \lambda \sum_{kl \neq ij} |P_{ij,kl}(x)|. \tag{9}$$

Очевидно, что

$$|(\tilde{g})^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \lambda P_{ij,ij}(x)| > |(\tilde{g})^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta| - \lambda |P_{ij,ij}(x)|,$$

поэтому если покажем, что выполняется

$$|(\tilde{g})^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta| - \lambda |P_{ij,ij}(x)| > \lambda \sum_{kl \neq ij} |P_{ij,kl}(x)|,$$

то будет выполнено и соотношение (9). Последнее равносильно

$$|(\tilde{g})^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta| > \lambda \sum_{kl} |P_{ij,kl}(x)|.$$

По неравенству треугольника

$$\lambda \sum_{kl} |P_{ij,kl}(x)| \leq \lambda \sum_{kl} (|b^{11}(x^1)^2| + \dots |b^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta| + \dots) = |\lambda| \sum_{\gamma\delta} |a^{\gamma\delta}||x^\gamma x^\delta|,$$

где b^{ij} — функциональные коэффициенты полинома. В последнем равенстве просто собрали все коэффициенты вместе и переформировали сумму, переименовав «сборные» коэффициенты при степенях x в $a^{\gamma\delta}$. Таким образом, если выполняется

$$|(\tilde{g})^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta| > \lambda \sum_{\gamma\delta} |a^{\gamma\delta}||x^\gamma x^\delta|, \tag{10}$$

то выполняется и (9). Так как $\tilde{g}$ положительно определена (фактически это матрица Грама), с ее помощью можно считать норму векторов:

$$(\tilde{g})^{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \sum_{\alpha,\beta}(\tilde{g})^{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = \|x\|^2_{\tilde{g}}.$$

Преобразуем с использованием этого факта неравенство (10):

$$|\lambda| < \frac{|(\tilde{g})^{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta|/\,\|x\|^2_{\tilde{g}}}{\big(\sum\limits_{\gamma\delta}|a^{\gamma\delta}||x^\gamma x^\delta|\big)/\,\|x\|^2_{\tilde{g}}} = \frac{1}{\sum\limits_{\gamma\delta}|a^{\gamma\delta}|\frac{|x^\gamma x^\delta|}{\|x\|^2_{\tilde{g}}}}.$$

Коэффициентов $a^{\gamma\delta}$ конечное число, поэтому в каждой точке многообразия из них можно выбрать максимальный по модулю — это будет максимальное значение для (ij)-й строки в определенной точке компактного многообразия M. Обозначим его через $a_{\max,ij,x}$. Поскольку многообразие компактно, а количество строк конечно, существует положительная константа

$$a = \max_{i,j,x}|a_{\max,ij,x}|.$$

Далее, можно провести оценку для дроби:

$$\frac{|x^\gamma x^\delta|}{\|x\|^2_{\tilde{g}}} \le \frac{\|x\|^2_\infty}{\|x\|^2_{\tilde{g}}} \le C \quad \text{для всех } p \in M,$$

в некоторой системе координат. Поэтому

$$\sum_{\gamma\delta}|a^{\gamma\delta}|\frac{|x^\gamma x^\delta|}{\|x\|^2_{\tilde{g}}} < aCN^2.$$

В связи с этим будем уменьшать $|\lambda|$ для выполнения (9):

$$|\lambda(x)| < \frac{1}{aCN^2}.$$

Итак, для любого $\lambda(x)$, ограниченного по модулю некоторой положительной константой $\tilde{\lambda}$, зависящей только от начальных данных, имеет место строгое диагональное преобладание, что означает невырожденность матрицы линеаризованной системы, т. е. строгую параболичность. Нелинейная система параболична, если ее линеаризация параболична. Тогда существует единственное бесконечно гладкое решение g в малом системы (6) для любой бесконечно гладкой начальной метрики (стандартный результат).

Теорема доказана.

3. Деформация тензора кривизны

Рассмотрим деформацию тензора кривизны R_{ijkl} под действием потока (1). Для потока Риччи такая деформация была описана Гамильтоном в [1], и мы воспользуемся некоторыми его вычислениями. Для краткости будем производную $\frac{\partial}{\partial t}$ обозначать штрихом.

В [1] в процессе доказательства теоремы 7.1 выведена следующая формула:

$$R'_{ijkl} = -\frac{1}{2}(\nabla_i\nabla_k g'_{jl} - \nabla_i\nabla_l g'_{jk} - \nabla_j\nabla_k g'_{il} + \nabla_j\nabla_l g'_{ik}) + \frac{1}{2}g^{pq}(R_{ijkp}g'_{ql} + R_{ijpl}g'_{qk}).$$

Подставим в нее формулу (1) для деформации метрики:

$$\begin{aligned} R'_{ijkl} &= (\nabla_i\nabla_k R_{jl} - \nabla_i\nabla_l R_{jk} - \nabla_j\nabla_k R_{il} + \nabla_j\nabla_l R_{ik}) - g^{pq}(R_{ijkp}R_{ql} + R_{ijpl}R_{qk}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\big(\nabla_i\nabla_k\big(\lambda(x)R_j^m R_{ml}\big) - \nabla_i\nabla_l\big(\lambda(x)R_j^m R_{mk}\big) - \nabla_j\nabla_k\big(\lambda(x)R_i^m R_{ml}\big) \\ &\quad + \nabla_j\nabla_l\big(\lambda(x)R_i^m R_{mk}\big)\big) + \frac{\lambda(x)}{2}g^{pq}\big(R_{ijkp}R_q^m R_{ml} + R_{ijpl}R_q^m R_{mk}\big). \end{aligned} \tag{11}$$

Согласно лемме 7.2 из [1] верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} &\Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &\quad = (\nabla_i\nabla_k R_{jl} - \nabla_i\nabla_l R_{jk} - \nabla_j\nabla_k R_{il} + \nabla_j\nabla_l R_{ik}) + g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj}), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\Delta = g^{pq}\nabla_p\nabla_q$ и

$$B_{ijkl} = g^{pr}g^{qs}R_{piqj}R_{rksl}.$$

Легко заметить, что в (12) первая скобка в правой части совпадает с первой скобкой в правой части (11). Подставим в (11) выражение для этой скобки из (12) и получим следующий результат (который может быть выведен из более общей формулы, данной в [5]).

Теорема 2. *Под действием потока (1) тензор кривизны Римана преобразуется следующим образом:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} &= \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\ &\quad - g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijkp}R_{ql} + R_{ijpl}R_{qk}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\big(\nabla_i\nabla_k\big(\lambda(x)R_j^m R_{ml}\big) - \nabla_i\nabla_l\big(\lambda(x)R_j^m R_{mk}\big) - \nabla_j\nabla_k\big(\lambda(x)R_i^m R_{ml}\big) \\ &\quad + \nabla_j\nabla_l\big(\lambda(x)R_i^m R_{mk}\big)\big) + \frac{\lambda}{2}g^{pq}\big(R_{ijkp}R_q^m R_{ml} + R_{ijpl}R_q^m R_{mk}\big). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hamilton R. S.* Three-manifolds with positive curvature // J. Differ. Geom. 1982. V. 17, N 2. P. 255–306.
2. *Perelman G.* The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. arXiv:math/0211159 (2002).
3. *Perelman G.* Ricci flow with surgery on three-manifolds // arXiv:math/0303109 (2003).
4. *Shi Wan-Xiong.* Deforming the metric on complete Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 1989. V. 30, N 1. P. 223–301.
5. *Yi Li.* Generalized Ricci flow. I: Higher derivatives estimates for compact manifolds // arXiv:0905.0045 (2009).

Статья поступила 7 июня 2011 г.

Плотникова Александра Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sasa2111@mail.ru