Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.813;517.923;517.58

ГРУППЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

М. Д. Хриптун

Аннотация. Для обобщенных функций Бесселя, удовлетворяющих обыкновенному дифференциальному уравнению m-го порядка специального вида, выведены некоторые теоремы сложения и производящие функции с помощью алгебры, построенной для группы дифференциальных операторов 1-го порядка в частных производных, базирующихся на рекуррентных соотношениях для этих функций.

Ключевые слова: ОФБ, рекуррентные соотношения, теоремы сложения, производящие функции.

§ 1. Введение

Решения многих важных задач математической физики и техники выражаются с помощью всевозможных специальных функций (функций Лежандра, функций Бесселя, функций гипергеометрических и др.), удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) второго порядка. Найдены многие обобщения этих классических специальных функций, которые удовлетворяют ОДУ более высоких порядков и применяются в более сложных задачах: в статистических распределениях, в физических исследованиях, в инженерных вычислениях (теория сигналов), в теории массового обслуживания и др. (см., например, [1]).

Определение 1.1. *Рекуррентными соотношениями* для функций какого-то класса называются соотношения, связывающие функции этого класса и производные функции того же класса с различными индексами.

Определение 1.2. Специальные функции, т. е. решения некоторых дифференциальных уравнений, содержащие параметр, удовлетворяют счетно-аддитивным соотношениям относительно параметра, которые называются *теоремами сложения* для этих функций.

Определение 1.3. Функция $f(z,h)$ называется *производящей* для последовательности функций $\varphi_k(z)$, если ее разложение по степеням h имеет вид

$$f(z,h) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(z) h^k,$$

где α_k — числа.

Для изучения специальных функций используют обычно технику теории аналитических функций. Однако можно увидеть, что многие свойства специальных функций могут быть выведены не аналитическими методами. Эти методы можно заменить удобными понятиями алгебры Ли (или группы Ли), примыкающими к рассматриваемым специальным функциям (например, разложениями специальных функций в ряды, теоремами сложения, умножения для них и т. п.). Из выведенных формул можно находить и другие формулы, которые аналитическими методами очень трудно или невозможно получить.

Основная идея группы Ли заключается в том, что из «бесконечно малого (инфинитезимального) оператора $\mathfrak{M}$», переводящего точку $s = (x, y, z, \dots)$ в ближайшую точку $(s + ds)$, можно построить «конечный оператор» $\exp\alpha\mathfrak{M}$, который переводит точку s в точку s' на конечное расстояние вдоль части кривой однопараметрической группы $\exp\alpha\mathfrak{M}$. Если этот же оператор применить к функции $F(s)$, то он будет действовать на аргумент этой функции:

$$\exp\alpha\mathfrak{M}\cdot F(s) = F(s') = F(\exp\alpha\mathfrak{M}\cdot s), \tag{1}$$

откуда следует, что мы рассматриваем такие бесконечно малые дифференциальные операторы, которые имеют место в рекуррентных соотношениях для различных специальных функций, и строим из них конечные операторы. Пара рекуррентных соотношений для классических специальных функций, удовлетворяющих ОДУ второго порядка, может быть переписана в виде

$$\mathscr{R}\cdot F_\nu = \rho_\nu\cdot F_{\nu+1}, \quad \mathscr{L}\cdot F_\nu = \lambda_\nu\cdot F_{\nu-1},$$

где $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ — дифференциальные операторы, «повышающие» и «понижающие» индекс ν, и ρ_ν, λ_ν — постоянные. Следовательно, для некоторого целого n можно определить $\mathscr{R}^n F_\nu(s)$ и $\mathscr{L}^n F_\nu(s)$. Применив операторы $\exp\alpha\mathscr{R}$ и $\exp\alpha\mathscr{L}$ к функциям $F_\nu(s)$, получаем

$$\begin{aligned}\exp\alpha\mathscr{R}\cdot F_\nu(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\,(\rho_\nu\cdot\rho_{\nu+1}\cdots\rho_{\nu+n-1})F_{\nu+n}(s),\\ \exp\alpha\mathscr{L}\cdot F_\nu(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\,(\lambda_\nu\cdot\lambda_{\nu-1}\cdots\lambda_{\nu-n+1})F_{\nu-n}(s).\end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения (1), (2) можем комбинировать различными способами. Проще всего получить «производящие функции». Первая получается с помощью оператора $\mathscr{R}$:

$$F_\nu(\exp\alpha\mathscr{R}\cdot s) = F_\nu(s') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left\{\prod_{i=0}^{n-1}\rho_{\nu+i}\right\}F_{\nu+n}(s),$$

вторая — аналогично с помощью оператора $\mathscr{L}$:

$$F_\nu(\exp\alpha\mathscr{L}\cdot s) = F_\nu(s'') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left\{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_{\nu-i}\right\}F_{\nu-n}(s).$$

Далее можно комбинировать $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$, т. е. рассматривать $\exp(\alpha\mathscr{R}+\beta\mathscr{L})$. Если $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ коммутируют, т. е. $[\mathscr{R},\mathscr{L}] = \mathscr{R}\mathscr{L} - \mathscr{L}\mathscr{R} = 0$, имеем простой «композиционный закон» $\exp\alpha\mathscr{R}\cdot\exp\beta\mathscr{L} = \exp(\alpha\mathscr{R}+\beta\mathscr{L})$, т. е. аддитивный закон. Однако при $[\mathscr{R},\mathscr{L}] \neq 0$ левая часть отличается от правой части уравнения и зависит от значения коммутатора $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$. Совокупность таких операторов, замкнутых по отношению к коммутации, образует алгебру Ли, порождаемую $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$.

Некоторый член $\mathfrak{M}$ алгебры порождает конечный оператор $\exp\alpha\mathfrak{M}$; произведения таких операторов порождают группу Ли, соответствующую ее алгебре Ли.

Композиционный закон внутри группы определяется единственным образом с помощью правила коммутации алгебры Ли, порождаемой операторами $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$.

§ 2. Обобщенные функции Бесселя (ОФБ)

Замечание 2.1. ОФБ, удовлетворяющие ОДУ порядка $m > 2$, находят приложения в операционном исчислении, в теории чисел, в теории массового обслуживания, в сложных задачах математической физики и т. п.

Замечание 2.2. Теоремы сложения и производящие функции (ПФ) являются основными свойствами специальных функций, так как из них можно получить другие свойства и формулы для специальных функций.

Замечание 2.3. Теория ПФ для различных специальных функций и полиномов широко применяется в решениях соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных и играет важную роль в решении многих задач, включая, например, теорию массового обслуживания и статистических процессов (см. [2, 3]).

В данной работе рассмотрим одно обобщение функций Бесселя вида

$$U_\nu^{(m)}(z) = U_\nu(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu+mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+\nu+1]}, \tag{3}$$

где $\nu = \nu_m = -(m-1)p$, $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера, p — комплексный параметр и z — комплексная переменная (при $m = 2$ функция (3) является модифицированной функцией Бесселя $I_\nu(z) = U_\nu(z,2)$).

Некоторые свойства этой функции, дифференциальное уравнение, рекуррентные соотношения и другие формулы выводились автором ранее (см. [4–6]) обычными методами, которые применяются к ОДУ m-го порядка (см. [7, 8]).

Цель настоящей работы состоит в нахождении основных свойств функций $U_\nu(z,m)$ с помощью алгебры, построенной на базе рекуррентных соотношений для этих функций.

Рекуррентные соотношения для функций (3) имеют вид

$$\left(\frac{d}{dz} - \frac{\nu}{z}\right) U_\nu(z,m) = U_{\nu+(m-1)}(z,m), \tag{4}$$

$$\left[(m-1)\frac{d}{dz} + \frac{\nu}{z}\right] U_\nu(z,m) = U_{\nu-1}(z,m). \tag{5}$$

Из них следует дифференциальное уравнение для функций (3):

$$\left[(m-1)\frac{d}{dz} + \frac{\nu+1}{z}\right]\left[(m-1)\frac{d}{dz} + \frac{\nu+2}{z}\right]\cdots\left[(m-1)\frac{d}{dz} + \frac{\nu+m-1}{z}\right] \times \left(\frac{d}{dz} - \frac{\nu}{z}\right) U_\nu(z,m) = U_\nu(z,m)$$

(см. [6, с. 287, формула (1), с. 290, формулы (18), (19)], где $U_\nu^m(z) = U_\nu(z,m)$, $\nu = \nu_m$).

Дифференциальное уравнение для функций (3) не играет никакой роли в дальнейших рассуждениях и присутствует только как факт для идентификации функций (3).

Выведем некоторые теоремы сложения и производящие функции для функций (3) при целых индексах ν, встречающихся в практических задачах (например, при решении одноканального уравнения теории массового обслуживания см. [9–11]). Для этого используем алгебру группы дифференциальных операторов, построенных на основании рекуррентных соотношений (4) и (5) для функций (3).

Согласно (4) и (5)

$$\mathscr{R} = \frac{d}{dz} - \frac{\nu}{z}, \quad \mathscr{L} = (m-1)\frac{d}{dz} + \frac{\nu}{z}. \tag{6}$$

Коммутатор принимает вид

$$[\mathscr{R}, \mathscr{L}] = \mathscr{R}\mathscr{L} - \mathscr{L}\mathscr{R} = -m\nu\left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right].$$

Для того чтобы найти алгебру, порождаемую $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$, интерпретируем индекс ν как дифференциальный оператор 1-го порядка по новой независимой переменной. Тогда $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ становятся дифференциальными операторами 1-го порядка от двух независимых переменных. Если сделать, как в [12, с. 1033, 1034], т. е. взять $\nu = -y\,\frac{\partial}{\partial y}$, то коммутатор примет вид

$$[\mathscr{R}, \mathscr{L}] = my\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right] = 0,$$

т. е. $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ коммутируют. Поэтому композиционный закон в группе Ли аддитивный:

$$\exp\alpha\mathscr{R} \cdot \exp\beta\mathscr{L} = \exp(\alpha\mathscr{R} + \beta\mathscr{L}).$$

В этом случае выражения $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ будем применять уже к функции от двух переменных z и y, которую обозначим через $F_\nu(z, y)$. Для получения свойств и теорем для ОФБ (3), более удобных для сравнения с теми, которые уже получены аналитическим методом, будем также рассматривать операторы $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ в полярной системе координат. Для этого случая интерпретируем ν как результат влияния выражения $-i\frac{\partial}{\partial\Phi}$ на функцию $\exp(i\nu\Phi)$. Тогда рекуррентные соотношения в полярной системе координат будут такими:

$$\exp[i(m-1)\Phi]\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right][\exp(i\nu\Phi)U_\nu(r,m)] = \exp[i(\nu+m-1)\Phi]U_{\nu+m-1}(r,m);$$

$$\exp(-i\Phi)\left[(m-1)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right][\exp(i\nu\Phi)U_\nu(r,m)] = \exp[i(\nu-1)\Phi]U_{\nu-1}(r,m).$$

Таким образом, повышающие и понижающие индекс ν операторы $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ для функций $F_\nu(r,\Phi) = \exp(i\nu\Phi)U_\nu(r,m)$ в полярных координатах принимают вид

$$\mathscr{R} = \exp[i(m-1)\Phi]\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right], \quad \mathscr{L} = \exp(-i\Phi)\left[(m-1)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right]. \tag{7}$$

Теперь построим теоремы сложения и производящие функции для функций F_ν, которые рассмотрим как функции в полярных или декартовых координатах.

Теорема 1. *Для* ОФБ (3) *при целых индексах имеет место формула*

$$(r^m + h)^{-\nu/m}U_\nu^{(m)}[(r^m + h)^{1/m}] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(h/m)^k}{k!}r^{-[\nu+(m-1)k]}U_{\nu+(m-1)k}^{(m)}(r), \tag{8}$$

где $U_\nu^{(m)}(r) = U_\nu(r,m)$.

Доказательство. Используем оператор $\mathscr{R}$ в полярных координатах (7). Для удобства вводим координаты

$$u = r\exp(i\Phi), \quad v = r\exp[-i(m-1)\Phi]. \tag{9}$$

Рассмотрим, как влияет оператор $\mathscr{R}$ на эти координаты:

$$\mathscr{R}\cdot u = \exp[i(m-1)\Phi]\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right)\cdot r\exp(i\Phi)$$
$$= \exp[i(m-1)\Phi][\exp(i\Phi)+i\cdot i\exp(i\Phi)] = 0,$$

т. е. $\mathscr{R}$ оставляет координату u на месте,

$$\mathscr{R}\cdot v = \exp[i(m-1)\Phi]\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right)\cdot r\exp[-i(m-1)\Phi]$$
$$= \exp[i(m-1)\Phi]\{\exp[-i(m-1)\Phi]+i(-i)(m-1)\exp[-i(m-1)\Phi]\}$$
$$= 1+m-1 = m.$$

В пространстве (u,v) конечный оператор $\exp\alpha\mathscr{R}$ является оператором переноса, переносит v в $v+m\alpha$ и оставляет неизменным u. Это означает, что действие оператора $\exp\alpha\mathscr{R}$ на указанном пространстве совпадает с действием оператора $\exp\left(m\alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)$. В результате, действуя на функции от (u,v), с одной стороны, имеем

$$\exp\alpha\mathscr{R}\cdot F_\nu(u,v) = \exp\left(m\alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdot F_\nu(u,v) = F_\nu(u,v+m\alpha);$$

и, с другой стороны, —

$$\exp\alpha\mathscr{R}\cdot F_\nu(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\mathscr{R}^k\cdot F_\nu(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}F_{\nu+k(m-1)}(u,v).$$

Сравнивая эти уравнения, получаем

$$F_\nu(u,v+m\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}F_{\nu+k(m-1)}(u,v). \qquad (10)$$

Перепишем формулу (10) в прежних координатах (r,Φ) так, чтобы она имела более известный вид:

$$\exp(i\Phi) = (u/v)^{1/m}, \quad r = (u^{m-1}v)^{1/m}. \qquad (11)$$

Тогда

$$F_\nu(u,v+m\alpha) = \exp(i\nu\Phi')U_\nu^{(m)}(r') = \left\{\left(\frac{u}{v+m\alpha}\right)^{\nu/m}U_\nu^{(m)}[u^{m-1}(v+m\alpha)]^{1/m}\right\}$$
$$= \left\{\left(\frac{u^m}{u^{m-1}v+m\alpha u^{m-1}}\right)^{\nu/m}U_\nu^{(m)}[(u^{m-1}v+m\alpha u^{m-1})^{1/m}]\right\}. \qquad (12)$$

Обозначая $m\alpha u^{m-1} = h$, из (10)–(12) имеем

$$(r^m+h)^{-\nu/m}U_\nu^{(m)}[(r^m+h)^{1/m}] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(h/m)^k}{k!}\,u^{-[\nu+(m-1)k]}$$
$$\times\left\{\exp[i(\nu+(m-1)k)\Phi]U_{\nu+(m-1)k}^{(m)}(r)\right\}.$$

Подставляя в эту формулу выражения для u через r и Φ, получаем формулу (8). $\square$

Аналогично для оператора $\mathscr{L}$ можно доказать, что верна

Теорема 2. *Для функции* (3) *при целых индексах справедливо соотношение*

$$(N^m+h)^{\nu/m}U_\nu^{(m)}[(N^m+h)^{(m-1)/m}]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(h/m)^k}{k!}\,N^{\nu-k}U_{\nu-k}^{(m)}(N^{m-1}). \tag{13}$$

При $m=2$ обе формулы (8) и (13) принимают вид такой, как для функций Бесселя в [13, т. II, с. 100], где N снова надо записать как r и заменить k на m и ν на n.

Теорема 3. *Для* ОФБ (3) *имеет место теорема сложения типа Графа вида*

$$\exp(i\nu\Phi')U_\nu^{(m)}(r')=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[i(\nu+k)\Phi]U_{\nu+k}^{(m)}(r)U_{-k}^{(m)}(\alpha), \tag{14}$$

где ν — целое число.

Доказательство. Рассматривая $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ при значении $\nu=-y\frac{\partial}{\partial y}$, в декартовой системе координат получим выражения

$$\mathscr{R}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{y}{z}\frac{\partial}{\partial y},\quad \mathscr{L}=(m-1)\frac{\partial}{\partial z}-\frac{y}{z}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим комбинацию $\frac{1}{m}(\mathscr{R}+\mathscr{L})=\frac{\partial}{\partial z}$ — оператор переноса в плоскости (z,y):

$$\exp\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\cdot z=z+\alpha,\quad \exp\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\cdot y=y.$$

Применяя эту комбинацию к функции $F_\nu(z,y)$, находим

$$\left[\exp\alpha\frac{1}{m}(\mathscr{R}+\mathscr{L})\right]\cdot F_\nu(z,y)=\exp\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\cdot F_\nu(z,y)=F_\nu(z+\alpha,y). \tag{15}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\left[\exp\alpha\frac{1}{m}(\mathscr{R}+\mathscr{L})\right]\cdot F_\nu(z,y)&=\exp\left(\alpha\frac{\mathscr{R}}{m}\right)\cdot\exp\left(\alpha\frac{\mathscr{L}}{m}\right)\cdot F_\nu(z,y)\\ =\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{l!s!}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{l+s}\mathscr{R}^l\mathscr{L}^sF_\nu(z,y)&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{l!s!}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{l+s}F_{\nu+(m-1)l-s}(z,y)\\ &=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{\nu+k}(z,y)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha/m)^{ml-k}}{l![(m-1)l-k]!},\end{aligned} \tag{16}$$

где обозначили $(m-1)l-s=k$ и поменяли порядок суммирования. Приравнивая эти результаты и возвращаясь к полярным координатам, запишем

$$F_\nu(z+\alpha,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_{\nu+k}(z,y)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha/m)^{ml-k}}{l![(m-1)l-k]!},$$

откуда, учитывая, что $F_\nu(z+\alpha,y)=\exp(i\nu\Phi')U_\nu^{(m)}(r')$ и $F_{\nu+k}(r,\Phi)=\exp[i(\nu+k)\Phi]U_{\nu+k}^{(m)}(r)$, имеем

$$\exp(i\nu\Phi')U_\nu^{(m)}(r')=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[i(\nu+k)\Phi]U_{\nu+k}^{(m)}(r)\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha/m)^{ml-k}}{l![(m-1)l-k]!}\right]. \tag{17}$$

Замечание 2.4. Формула (17) содержит два хорошо известных разложения в ряды $U_\nu^{(m)}(r)$ как специальный случай.

Следствие 1. *Если* $r = \Phi = 0$, *то*

$$U_\nu^{(m)}(\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha/m)^{ml+\nu}}{l![(m-1)l+\nu]!}. \tag{18}$$

Доказательство. Из (17) при $r = \Phi = 0$ имеем $r' = \alpha$, $\Phi' = 0$, тогда

$$U_\nu^{(m)}(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{\nu+k}^{(m)}(0)\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha/m)^{ml-k}}{l![(m-1)l-k]!}\right]. \tag{19}$$

Замечание 2.5. Из рекуррентных соотношений для ОФБ легко получить, что $U_n^{(m)}(0)=0$ для всех n, за исключением $n = 0$. Поэтому если n целое, то находим нормализатор $U_0^{(m)}(0) = 1$, т. е. при $\nu + k = n = 0$ имеем $\nu = -k$, $U_{\nu+k}^{(m)}(0) = U_0^{(m)}(0) = 1$, остальные члены в сумме (19) равны нулю, остается только одно слагаемое, равное единице. Тогда из (19) следует (18).

Подставляя в формулу (17) $U_\nu^{(m)}(\alpha)$ вместо его ряда, получим теорему сложения типа Графа (14). □

Теорема 4. *Для* ОФБ *с целым индексом имеет место операторное уравнение вида*

$$\exp(\alpha\mathscr{L} + \beta\mathscr{R}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^k U_k^{(m)}(z)\mathscr{L}^k, \tag{20}$$

где $z/m = (\alpha^{m-1}\beta)^{1/m}$, $\gamma = (\alpha/\beta)^{1/m}$.

Доказательство. Используем более общий оператор $(\alpha\mathscr{L} + \beta\mathscr{R})$. Взяв $(z/m) = (\alpha^{m-1}\beta)^{1/m}$ и $\gamma = (\alpha/\beta)^{1/m}$, имеем

$$\begin{aligned}\exp(\alpha\mathscr{L} + \beta\mathscr{R}) = \exp\left[\frac{z}{m}\left(\gamma\mathscr{L} + \frac{1}{\gamma^{m-1}}\mathscr{R}\right)\right] &= \sum_{s,t=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{s+t}}{s!t!}\gamma^{s-(m-1)t}\mathscr{L}^s\mathscr{R}^t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(z/m)^{k+mt}}{t![(m-1)t+k]!}\right]\gamma^k\mathscr{L}^k. \end{aligned}\tag{21}$$

Здесь обозначили $k = s - (m-1)t$, откуда $s = (m-1)t + k$, и использовали тот факт, что при действии операторов $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}^{m-1}$ на функции $F_k(u,v) = \left[\exp(ik\Phi)U_k^{(m)}(r)\right]$ эти операторы уничтожают друг друга:

$$\mathscr{R}\cdot\mathscr{L}^{m-1}F_k = F_k = \mathscr{L}^{m-1}\mathscr{R}\cdot F_k.$$

Поэтому (действуя на функции F_k) можно заменить оператор $\mathscr{R}$ оператором $\mathscr{L}^{-(m-1)}$, откуда

$$\exp(\alpha\mathscr{L} + \beta\mathscr{R}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(z/m)^{k+mt}}{t![(m-1)t+k]!}\right]\gamma^k\mathscr{L}^k,$$

так что с учетом (18) имеем требуемое соотношение (20). □

Теорема 5. *Для* ОФБ (3) *при целых индексах имеет место общая формула сложения, которую в плоскости* (u, v) *запишем в виде*

$$F_\nu(u', v') = \exp(\alpha\mathscr{L} + \beta\mathscr{R}) \cdot F_\nu(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^k U_k^{(m)}(z) F_{\nu-k}(u, v), \tag{22}$$

где $u' = u + m\alpha$, $v' = v + m\beta$.

В полярной системе координат (r, Φ) *она имеет вид*

$$\exp(i\nu\Phi') U_\nu^{(m)}(r') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^k U_k^{(m)}(z) F_{\nu-k}(r, \Phi)$$

или, подробно,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{r\exp(i\Phi) + m\alpha}{r\exp[-i(m-1)\Phi] + m\beta}\right\}^{\nu/m} \\ \times U_\nu^{(m)}\{[r\exp(i\Phi) + m\alpha)^{m-1}(r\exp[-i(m-1)\Phi + m\beta]^{1/m}\} \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k/m} U_k^{(m)}[m(\alpha^{m-1}\beta)^{1/m}]\exp[i(\nu-k)\Phi] U_{\nu-k}^{(m)}(r).\end{aligned} \tag{23}$$

Доказательство теоремы 5 основано на операторном соотношении (20).

Из теоремы 5 для ОФБ с целым индексом можно получить различные специальные случаи.

Возьмем два случая и детально их рассмотрим.

Следствие 2. *Для* ОФБ *имеет место формула типа Графа вида*

$$\left\{\frac{r\exp(i\Phi) + z}{r\exp[-i(m-1)\Phi] + z}\right\}^{\nu/m} U_\nu^{(m)}(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k^{(m)}(z)\exp[i(\nu-k)\Phi] U_{\nu-k}^{(m)}(r), \tag{24}$$

где $Z = [(r\exp(i\Phi) + m\alpha)^{m-1}(r\exp[-i(m-1)\Phi] + m\beta)]^{1/m}$.

Доказательство. Выбирая $\alpha = \beta = z/m$, получим Z и $m(\alpha^{m-1}\beta)^{1/m} = m\alpha = z$. Для этого случая уравнение (23) принимает вид (24). $\square$

Замечание 2.6. Для функций Бесселя см. [13, с. 101]. В частности, для $\nu = 0$ из (24) получим

$$U_0^{(m)}(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-ik\Phi) U_k^{(m)}(z) U_{-k}^{(m)}(r).$$

Следствие 3. *Для* ОФБ *имеем формулу сложения*

$$t^{-\nu} U_\nu^{(m)}\left[r\left(t + \frac{1}{t^{m-1}}\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^{-2k} U_k^{(m)}(rt^{(2-m)}) U_{\nu-k}^{(m)}(r). \tag{25}$$

Доказательство. Возьмем

$$\alpha = \frac{1}{m} r\exp(i\Phi) \cdot t^{-m}, \quad \beta = \frac{1}{m} r\exp[-i(m-1)\Phi] \cdot t^m.$$

Используем результат теоремы 5, записанный в полярной системе координат вида (23). Подсчитаем множитель $\exp(i\nu\Phi')$ при $U_\nu^{(m)}(r')$ и выражение для r' в левой части формулы (23):

$$\left(\frac{r\exp(i\Phi)+m\alpha}{r\exp[-i(m-1)\Phi]+m\beta}\right)^{\nu/m}=\left[\frac{r\exp(i\Phi)(1+1/(t^m))}{r\exp[-i(m-1)\Phi](1+t^m)}\right]^{\nu/m}=t^{-\nu}\exp(i\nu\Phi);$$

$$\{[r\exp(i\Phi)+m\alpha]^{m-1}\{r\exp[-i(m-1)\Phi]+m\beta\}\}^{1/m}$$
$$=\{[r\exp(i\Phi)(1+t^{-m})]^{m-1}\{r\exp[-i(m-1)\Phi](1+t^m)\}\}^{1/m}=r\left(t+\frac{1}{t^{m-1}}\right).$$

Аналогично для правой части этой формулы находим

$$\gamma^k=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k/m}=\left\{\frac{1/m\cdot r\exp(i\Phi)\cdot t^{-m}}{1/m\cdot r\exp[-i(m-1)\Phi]\cdot t^m}\right\}^{k/m}$$
$$=\left[\frac{\exp(im\Phi)}{t^{2m}}\right]^{k/m}=t^{-2k}\exp(ik\Phi);$$

$$m(\alpha^{m-1}\beta)^{1/m}=m\left\{\left[\frac{1}{m}\cdot r\exp(i\Phi)\cdot t^{-m}\right]^{m-1}\left\{\frac{1}{m}\cdot r\exp[-i(m-1)\Phi]t^m\right\}\right\}^{1/m}$$
$$=r\cdot t^{2-m}.$$

Подставляя найденные выше выражения в формулу (23), приходим к равенству

$$t^{-\nu}\exp(i\nu\Phi)U_\nu^{(m)}\left[r\left(t+\frac{1}{t^{m-1}}\right)\right]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}t^{-2k}\exp(ik\Phi)U_k^{(m)}(rt^{2-m})\exp[i(\nu-k)\Phi]U_{\nu-k}^{(m)}(r),$$

откуда после сокращения получим (25). □

Замечание 2.7. Операторное уравнение (20) для ОФБ, как мы уже упоминали, можно применить к функциям, для которых $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}^{m-1}$ уничтожают друг друга. Пользуясь этим утверждением, выведем (очень важную для приложений) производящую функцию для ОФБ.

Теорема 6. *Для* ОФБ *имеет место производящая функция*

$$\exp\left[\frac{z}{m}\left(t+\frac{1}{t^{m-1}}\right)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}U_k^{(m)}(z)t^k, \tag{26}$$

где k целое.

Доказательство. Возьмем функцию вида $\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+u\cdot t\right)$. Рассмотрим, как на эту функцию действуют операторы $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ в плоскости (u,v):

$$\frac{\mathscr{L}}{m}\left[\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right)\right]=t\cdot\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right),\quad\text{так как }\frac{\mathscr{L}}{m}=\frac{\partial}{\partial u},$$

и

$$\frac{\mathscr{R}}{m}\left[\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right)\right]=\frac{1}{t^{m-1}}\cdot\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right),\quad\text{так как }\frac{\mathscr{R}}{m}=\frac{\partial}{\partial v}.$$

Видим, что $\mathscr{R}/m$ действует как обратное к $(\mathscr{L}/m)^{m-1}$ на функцию $\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}} + ut\right)$. Поэтому, используя операторное уравнение (20), с одной стороны, получим

$$\exp\left[\frac{\alpha}{m}(\mathscr{L}+\mathscr{R})\right]\left[\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k^{(m)}(m\alpha)\left(\frac{\mathscr{L}}{m}\right)^k \exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right)$$
$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k^{(m)}(m\alpha)t^k\right]\left[\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right)\right],$$

с другой стороны, уравнение в плоскости (u, v) дает

$$\exp\left[\frac{\alpha}{m}(\mathscr{L}+\mathscr{R})\right]\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right) = \exp\left[\frac{v+\alpha}{t^{m-1}}+(u+\alpha)t\right]$$
$$= \exp\alpha\left(\frac{1}{t^{m-1}}+t\right)\left[\exp\left(\frac{v}{t^{m-1}}+ut\right)\right].$$

Приравнивая эти два результата, находим производящую функцию для ОФБ (26), напоминая, что $m\alpha = z$, откуда $\alpha = z/m$. □

Замечание 2.8. Можно построить много других ПФ и теорем для ОФБ, которые очень удобны для практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mathai A. M., Saxena R. K.* Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973.
2. *Strivastava H. M., Manocha H.* A treatise on generating functions. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1984.
3. *Strivastava H. M., Kashyap B. R. K.* Special functions in queuing theory and related stochastic processes. New York: Acad. Press, 1982.
4. *Хриптун М. Д.* Про одне диференціальне рівняння вищого порядку // Доп. АН УРСР. 1960. № 3. С. 289–293.
5. *Хриптун М. Д.* Об одном линейном обыкновенном дифференциальном уравнении высшего порядка // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15, № 3. С. 277–289.
6. *Хриптун М. Д.* Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–293.
7. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: НТИУ, 1939.
8. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: ГИТТЛ, 1953. Т. 3, ч. 2.
9. *Luchak G.* The solution of the single-channel queuing equations characterized by a time-dependent Poisson distributed arrival rate and general class of holding times // Oper. Res. 1956. V. 4. P. 711–732.
10. *Luchak G.* The distribution of the time required to reduce to some preassigned level a simple channel queue characterized by a time dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times // Oper. Res. 1957. V. 5. P. 205–209.
11. *Luchak G.* The continuous time solution of the equations of the simple channel queue with a general class of service-time distributions by the method of generating functions // J. Roy. Statist. Soc. B. 1958. V. 20. P. 176–181.
12. *Weisner L.* Group-theoretic origin of certain generating functions // Pac. J. Math. 1955. V. 5, N 2. P. 1033–1039.
13. *Bateman G.* Higher transcendental functions. New York: Megraw-Hill Book Comp. Inc., 1953. V. II.

Статья поступила 11 ноября 2011 г.

Хриптун Мария Дмитриевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Khriptun@math.nsc.ru