Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 517.982.22+517.518.36

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ УОЛША В BMO

С. В. Асташкин,
Л. Малигранда, Р. С. Суханов

Аннотация. Рассматриваются последовательности независимых функций Уолша в пространстве функций ограниченной средней осцилляции. Изучаются геометрические свойства порожденных ими подпространств, в частности, найдены необходимые и достаточные условия их дополняемости.

Ключевые слова: функции Радемахера, функции Уолша, пространство функций ограниченной средней осцилляции, дополняемое подпространство.

1. Введение и формулировка результатов

Пространство $BMO = BMO[0,1]$ состоит из всех функций $f \in L_1[0,1]$ с ограниченной средней осцилляцией, т. е. таких, что

$$\|f\|_{BMO} := \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |f(u) - f_I|\, du < \infty,$$

где супремум берется по всем интервалам $I \subset [0,1]$ и $f_I := \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(u)\, du$. Если в последнем определении рассматривать только двоичные интервалы $I_m^i = ((i-1)2^{-m}, i2^{-m}]$ ($m = 0,1,2,\dots$, $i = 1,\dots,2^m$), то получим диадическое пространство BMO_d. Ясно, что $BMO \subset BMO_d$ и $\|f\|_d := \|f\|_{BMO_d} \le \|f\|_{BMO}$ для всех $f \in BMO$. Кроме того, $L_\infty[0,1] \subset BMO$, и для всех $f \in L_\infty = L_\infty[0,1]$ имеем $\|f\|_{BMO} \le \|f\|_{L_\infty}$. В то же время $BMO \ne L_\infty$ и $BMO_d \ne BMO$. Например, $\ln|s - 1/2|\chi_{[0,1]}(s) \in BMO \setminus L_\infty$ и $\ln|s - 1/2|\chi_{[1/2,1]}(s) \in BMO_d \setminus BMO$.

Пусть дана последовательность возрастающих натуральных чисел $1 \le p_1 < p_2 < \dots$. Рассмотрим последовательность функций Уолша

$$f_k = \prod_{i \in A_k} r_i, \quad A_k \subset \{p_k + 1, p_k + 2, \dots, p_{k+1}\}, \tag{1}$$

где $r_i(t)$ — функции Радемахера, определенные на отрезке $[0,1]$, т. е.

$$r_i(t) = \operatorname{sgn}[\sin(2^i \pi t)] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Ввиду [1, теорема 1] система $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, определенная соотношением (1), эквивалентна в BMO_d каноническому базису l_2, точнее для любой финитной последовательности $a = (a_k)_{k=1}^\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|a\|_2 \le \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k f_k \right\|_d \le \sqrt{2}\|a\|_2, \tag{2}$$

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00077).

где $\|a\|_2 := \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2}$. В этой же работе доказано, что подпространство $[f_k]$, порожденное последовательностью $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ (т. е. замкнутая линейная оболочка множества $\{f_k\}$), дополняемо в пространстве BMO_d. Напомним, что замкнутое линейное подпространство Y банахова пространства X называется *дополняемым в* X, если существует ограниченный линейный проектор $P : X \to X$, образ которого совпадает с Y.

Основная цель данной работы — изучение системы функций $\{f_k\}$ из (1) в «обычном» пространстве BMO. Важно отметить, что последнее пространство инвариантно относительно сдвига в отличие от его двоичного варианта BMO_d и поэтому играет гораздо более важную роль в анализе. Мы покажем, что в BMO соотношение (2) может не выполняться, а геометрические свойства подпространства $[f_k]$ (в частности, его дополняемость), по существу, определяются четностью количества элементов множеств A_k. Полученные здесь результаты являются естественным развитием работы [2], в которой аналогичные вопросы рассматривались для системы Радемахера. В частности, это относится к теоремам 1(a) и 3, которые обобщают соответственно теоремы 2 и 4 из [2].

Приведем формулировки основных результатов работы, где выражение вида $f \asymp g$ означает, что $cf \le g \le Cf$ для некоторых $c > 0$ и $C > 0$, причем эти константы не зависят от всех или части аргументов норм (полунорм) f и g. Кроме того, всюду далее предполагается, что множества A_k и функции f_k определяются соотношением (1).

Теорема 1. (a) *Если все множества A_k содержат нечетное число элементов, то с некоторыми универсальными константами для любой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$ выполнено*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k\right\|_{BMO} \asymp \|a\|_2 + \sup_{s\ge 1}\left|\sum_{k=1}^{s} a_k\right|. \tag{3}$$

(b) *Если все множества A_k содержат четное число элементов, то с некоторыми универсальными константами для любой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$ выполнено*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k\right\|_{BMO} \asymp \|a\|_2. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если $\{k_i\}$ $(k_1 < k_2 < \dots)$ — множество всех $k \in \mathbb{N}$, для которых количество элементов множества A_k нечетно, то с некоторыми универсальными константами для любой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$ выполнено*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k\right\|_{BMO} \asymp \|a\|_2 + \sup_{s\ge 1}\left|\sum_{i=1}^{s} a_{k_i}\right|. \tag{5}$$

Напомним, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из банахова пространства X называется *базисной*, если она является базисом в замкнутой линейной оболочке $[x_n]$. Кроме того, говорят, что базисная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *безусловна*, если для любой перестановки π натурального ряда последовательность $\{x_{\pi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ также базисная в X. Как известно (см., например, [3, теорема 1.1]), базисная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ безусловна в X тогда и только тогда, когда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$, где $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность знаков, т. е. $\theta_n = \pm 1$. Тем самым, применяя теорему 2, получаем

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны:*
1) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *безусловная базисная последовательность в* BMO*;*
2) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *эквивалентна в* BMO *каноническому базису в* l_2*;*
3) *все множества* A_k*, кроме, может быть, конечного числа, содержат четное число элементов.*

Последнее утверждение дает необходимые и достаточные условия дополняемости подпространства $[f_k]$ в BMO.

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*
1) *подпространство* $[f_k]$*, порожденное последовательностью* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$*, дополняемо в* BMO*;*
2) *все множества* A_k*, кроме, может быть, конечного числа, содержат четное число элементов.*

2. Доказательства

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся два вспомогательных предложения, первое из которых составляет содержание задачи 12(b) из [4, с. 266] (доказательство с приведенными ниже константами см. в [2, предложение 1]).

Определим функционал $A(f) = \sup\limits_{I_1, I_2} |f_{I_1} - f_{I_2}|$, где I_1, I_2 — смежные двоичные интервалы одинаковой длины.

Предложение 1. *Для всех функций* $f \in L_1[0,1]$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{3}(\|f\|_d + A(f)) \le \|f\|_{BMO} \le 32(\|f\|_d + A(f)). \tag{6}$$

Предложение 2. *Пусть функции* f_k *определены в* (1)*, последовательность вещественных чисел* $a = (a_k)$ *финитна и* $f := \sum\limits_{k \ge 1} a_k f_k$.

(i) *Если все множества* A_k *содержат нечетное число элементов, то*

$$\frac{2}{3} \max_{s \ge 1} \left| \sum_{k=1}^{s} a_k \right| \le A(f) \le 8 \max_{s \ge 1} \left| \sum_{k=1}^{s} a_k \right|. \tag{7}$$

(ii) *Если все множества* A_k *содержат четное число элементов, то*

$$A(f) = 2 \max_{s \ge 1} |a_s|. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть I — произвольный двоичный интервал длины 2^{-r}, т. е. $I = I_r^i = (i2^{-r}, (i+1)2^{-r}]$. Введем обозначения $m_k := \min A_k$, $M_k := \max A_k$, $s = s(r) = \max\{k : M_k \le r\}$. Если все $M_k > r$, то полагаем $s = 0$. Тогда

$$(f_k)_I = \begin{cases} \operatorname{sgn}(f_k|_I), & k \le s, \\ 0, & k > s. \end{cases}$$

Действительно, если $k \le s$, то f_k постоянна на I. В случае, когда $k > s$, имеем $f_k = \prod\limits_{i \in B_k \cup C_k} r_i$, причем r_i постоянны на I для всех $i \in B_k$, в то время как

$\int\limits_I \prod\limits_{i\in C_k} r_i = 0$. Отсюда ввиду независимости функций r_i, $i \in C_k$, относительно отрезка I получаем

$$(f_k)_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f_k(t)\,dt = \frac{c}{|I|}\int\limits_I \prod_{i\in C_k} r_i(t)\,dt = \frac{c}{|I|}\prod_{i\in C_k}\int\limits_I r_i(t)\,dt = 0,$$

где c равно значению функции $\prod\limits_{i\in B_k} r_i$ на I.

Поэтому если I_1, I_2 — смежные двоичные интервалы длины 2^{-r}, то

$$f_{I_1} - f_{I_2} = \sum_{k=1}^{s} a_k \operatorname{sgn}(f_k|_{I_1}) - \sum_{k=1}^{s} a_k \operatorname{sgn}(f_k|_{I_2}) = \sum_{k=1}^{s} a_k[\operatorname{sgn}(f_k|_{I_1}) - \operatorname{sgn}(f_k|_{I_2})]. \quad (9)$$

Пусть I — наименьший двоичный интервал, содержащий объединение интервалов I_1 и I_2. Предположим, что его длина равна 2^{-j}. Из определения I следует, что объединение $I_1 \cup I_2$ лежит в середине I (пусть I_1 лежит слева, а I_2 — справа). Как нетрудно видеть, в зависимости от того, каковы отрезки I_1 и I_2, индекс j пробегает все целые значения от 0 до $r-1$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. Если $a, b \in \mathbb{N}$ и $a \le b$, то $[a,b] := \{i \in \mathbb{N} : a \le i \le b\}$. Ввиду определения s имеем $\bigcup\limits_{k=1}^{s} A_k \subset [1,r]$. Положим

$$B := \bigcup_{l=1}^{s}[m_k, M_k] \quad \text{и} \quad B' := [1,r] \setminus B = \bigcup_{l=1}^{s+1}[M_{l-1}+1, m_l - 1],$$

где $M_0 = 0$, а $m_{s+1} = r+1$. Кроме того, всюду далее $|A|$ — количество элементов множества $A \subset \mathbb{N}$.

Сравним между собой значения функций f_k, $1 \le k \le s$, на промежутках I_1 и I_2. Если $m_k > j+1$, то все функции r_i с индексами из A_k меняют знак при переходе от I_1 к I_2, причем в этом случае $r_i|_{I_1} = -1$, а $r_i|_{I_2} = 1$. Следовательно, для таких k имеем $f_k|_{I_1} = (-1)^{|A_k|}$, а $f_k|_{I_2} = 1$. Если же $M_k \le j$, то все функции r_i с индексами из A_k постоянны на I, поэтому $f_k|_{I_1} = f_k|_{I_2}$. В зависимости от того, в какое из множеств B или B' попадает число $j+1$, рассмотрим два случая.

(a) $j+1 \in B'$. Иначе говоря, $M_{l-1}+1 \le j+1 \le m_l - 1$ при некотором $l = 1, 2, \ldots, s+1$. Если $l = s+1$, то $j \ge M_s$, откуда ввиду (9) и ранее сделанных замечаний следует, что $f_{I_1} - f_{I_2} = 0$. В случае, когда предыдущее неравенство выполнено для $l = 1, 2, \ldots, s$, получаем, что $M_{l-1} \le j < m_l - 2$ и, значит, в силу тех же причин

$$f_{I_1} - f_{I_2} = \sum_{k=l}^{s} a_k\,(f_k|_{I_1} - f_k|_{I_2}) = \sum_{k=l}^{s} a_k\,((-1)^{|A_k|} - 1). \quad (10)$$

Так как j принимает все значения от 0 до $r-1$, то (10) выполнено для $l \in \mathscr{F}_1$, где множество $\mathscr{F}_1$ состоит из всех таких k, что отрезок $[M_{k-1}+1, m_k - 1]$ непуст (если $2 \le k \le s$, то это эквивалентно тому, что между множествами A_{k-1} и A_k имеется «зазор»; $1 \in \mathscr{F}_1$, если $1 \notin A_1$).

(b) $j+1 \in B$. Тогда $m_l \le j+1 \le M_l$ при некотором $l = 1, 2, \ldots, s$. В этом случае функции r_i меняют знак при переходе от I_1 к I_2, если $i \in A_l^{(j)} := \{p \in A_l : p > j\}$, и постоянны на I, если $i \in A_l \setminus A_l^{(j)}$. Поэтому $f_l|_{I_2} = (-1)^{|A_l^{(j)}|} f_l|_{I_1}$.

Так как в этом случае $j+1 < m_{l+1}$ и $j \geq M_{l-1}$, учитывая замечания, сделанные перед п. (a), ввиду (9) получаем

$$f_{I_1} - f_{I_2} = a_l f_l|_{I_1}(1 - (-1)^{|A_l^{(j)}|}) + \sum_{k=l+1}^{s} a_k((-1)^{|A_k|} - 1). \tag{11}$$

Предположим, что все числа $|A_k|$ нечетны. Тогда прежде всего из (10) следует, что

$$|f_{I_1} - f_{I_2}| = 2\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right|, \quad l \in \mathscr{F}_1. \tag{12}$$

В том случае, когда существует такое j, что $m_l \leq j+1 \leq M_l$ и либо $f_l|_{I_1} = -1$, либо $\left|A_l^{(j)}\right|$ четно, опять, но уже из равенства (11) получаем соотношение (12) (но во втором случае с заменой l на $l+1$). Обозначим через $\mathscr{F}$ множество всех l, для которых выполнено (12). Ясно, что $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_1$.

Нетрудно видеть, что для каждого $l = 1, 2, \ldots, s$ имеется и иная возможность. Так, если $j = m_l - 1$, то $A_l^{(j)} = A_l$. Так как $r_{m_l}|_{I_1} = 1$ и $r_i|_{I_1} = -1$, если $i \in A_l$, $i \neq m_l$, в этом случае $f_l|_{I_1} = 1$. Поэтому из (11) следует, что

$$|f_{I_1} - f_{I_2}| = 2\left|\sum_{k=l+1}^{s} a_k - a_l\right|, \quad l = 1, 2, \ldots, s. \tag{13}$$

Заметим, что выражение $|f_{I_1} - f_{I_2}|$ для любой пары смежных двоичных интервалов I_1 и I_2 определяется одним из равенств (12) или (13). Поэтому из определения функционала $A(f)$ вытекает, что

$$A(f) = 2\max\left(\max_{1\leq l\leq s<\infty}\left|\sum_{k=l+1}^{s} a_k - a_l\right|, \max_{\substack{1\leq l\leq s<\infty,\\ l\in\mathscr{F}}}\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right|\right).$$

Кроме того, для произвольной финитной последовательности (a_k) выполнено неравенство

$$\frac{1}{3}\max_{1\leq l\leq s<\infty}\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right| \leq \max_{1\leq l\leq s<\infty}\left|\sum_{k=l+1}^{s} a_k - a_l\right| \leq 2\max_{1\leq l\leq s<\infty}\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right|. \tag{14}$$

Действительно, с одной стороны, для произвольных $1 \leq l \leq s$

$$\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=l+1}^{s} a_k - a_l\right| + 2|a_l| \leq 3\max_{1\leq l\leq s<\infty}\left|\sum_{k=l+1}^{s} a_k - a_l\right|$$

(если $s = l$, сумма $\sum\limits_{k=l+1}^{s} a_k$ полагается равной нулю). Наоборот, для $1 \leq l \leq s$

$$\left|\sum_{k=l+1}^{s} a_k - a_l\right| \leq \left|\sum_{k=l+1}^{s} a_k\right| + |a_l| \leq 2\max_{1\leq l\leq s<\infty}\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right|.$$

Кроме того,

$$\max_{s\geq 1}\left|\sum_{k=1}^{s} a_k\right| \leq \max_{1\leq l\leq s<\infty}\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right| \leq 2\max_{s\geq 1}\left|\sum_{k=1}^{s} a_k\right|. \tag{15}$$

Левое неравенство в (15) очевидно, а правое вытекает из того, что для произвольных $1 \le l \le s$

$$\left|\sum_{k=l}^{s} a_k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{s} a_k - \sum_{k=1}^{l} a_k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{s} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{l} a_k\right| \le 2\max_{s\ge 1}\left|\sum_{k=1}^{s} a_k\right|.$$

В итоге неравенство слева в соотношении (7) следует из ранее полученного равенства для $A(f)$ и левого неравенства в (14). Для того чтобы получить неравенство справа в (7), достаточно использовать правые части (14) и (15).

Ситуация, когда каждое из множеств A_k содержит четное число элементов, гораздо проще. В этом случае равенства (10) и (11) показывают, что либо $f_{I_1} - f_{I_2} = 0$, либо $|f_{I_1} - f_{I_2}| = 2|a_l|$, $l = 1, 2, \ldots, s$. Тем самым получаем (8).

Доказательство теоремы 1. Достаточно применить предложения 1 и 2, а также соотношение (2).

Доказательство теоремы 2. Пусть $f := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k f_k$. Из соотношений (10) и (11) точно так же, как при доказательстве предложения 2, следует, что

$$A(f) \asymp \max\left(\sup_{k=1,2,\ldots} |a_k|, \sup_{s\ge 1}\left|\sum_{i=1}^{s} a_{k_i}\right|\right),$$

где $\{k_i\}$ $(k_1 < k_2 < \ldots)$ — множество всех $k \in \mathbb{N}$, для которых число $|A_k|$ нечетно. Тем самым из предложения 1 и соотношения (2) получаем нужное утверждение.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение о блок-базисах последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в BMO.

Обозначим через $U = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольный блок-базис системы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е.

$$u_n = \sum_{k=s_n+1}^{s_{n+1}} a_k f_k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $1 \le s_1 < s_2 < \ldots$ и $a_k \in \mathbb{R}$. Кроме того, пусть

$$\gamma_n(U) = \sum_{k=s_n+1}^{s_{n+1}} a_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Предложение 3. *Если в последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть бесконечно много элементов, для которых $|A_k|$ нечетно, то замкнутая линейная оболочка $[f_k] \subset BMO$ содержит дополняемое в $[f_k]$ подпространство E, изоморфное c_0.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}$ — множество всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $|A_k|$ нечетно. Тогда по условию $|\mathscr{E}| = \infty$. Из предложений 1 и 2, а также соотношения (2) вытекает существование блок-базиса $U = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющего условиям:

(a) $\|u_n\|_{BMO} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$;

(b) $\|u_n\|_d \le \sqrt{2}\left(\sum\limits_{k=s_n+1}^{s_{n+1}} a_k^2\right)^{1/2} \le 2^{-n-5}$, $n = 1, 2, \ldots$;

(c) $\gamma_n(U) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(d) $\{k : a_k \ne 0\} \subset \mathscr{E}$.

Действительно, предположим, что функции $u_1, \dots, u_{n-1}$ уже построены. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся достаточно большое $m_n \in \mathbb{N}$ и такие числа $b_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, m_n$, что

$$\left(\sum_{k=1}^{m_n} b_k^2\right)^{1/2} \leq \frac{2}{9} \cdot 2^{-n-7} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m_n} b_k = 1. \tag{16}$$

Положим $a'_k = b_k$, если $k = 1, 2, \dots, m_n$, и $a'_k = -b_{k-m_n}$, если $k = m_n + 1, \dots, 2m_n$. Выберем $s_{n+1} > s_n$ настолько большим, чтобы отрезок натурального ряда $\{s_n + 1, \dots, s_{n+1}\}$ содержал не менее $2m_n$ элементов из множества $\mathscr{E}$, и затем переиндексируем a'_k числами из пересечения $\{s_n + 1, \dots, s_{n+1}\} \cap \mathscr{E}$ с сохранением порядка. Для остальных значений k из отрезка $\{s_n + 1, \dots, s_{n+1}\}$ положим $a'_k = 0$. Тогда если $u'_n := \sum\limits_{k=s_n+1}^{s_{n+1}} a'_k f_k$, то ввиду (2) и первого соотношения в (16)

$$\|u'_n\|_d \leq \sqrt{2} \cdot 2 \left(\sum_{k=1}^{m_n} b_k^2\right)^{1/2} \leq \frac{2}{9} \cdot 2^{-n-5}.$$

Кроме того, так как из определения чисел a'_k и второго равенства в (16) следует

$$\max_{s_n+1 \leq s \leq s_{n+1}} \left|\sum_{k=s_n+1}^{s} a'_k\right| = \sum_{k=1}^{m_n} b_k = 1,$$

из предложений 1 и 2 получаем

$$\frac{2}{3} \leq A(u'_n) \leq 8 \quad \text{и} \quad \frac{2}{9} \leq \|u'_n\|_{BMO} \leq 288.$$

Тем самым, как легко видеть, функция $u_n := \frac{u'_n}{\|u'_n\|_{BMO}}$ удовлетворяет условиям (a), (b) и (d). Условие (c) выполняется ввиду того, что по построению $\sum\limits_{k=s_n+1}^{s_{n+1}} a'_k = 0$.

Докажем, что подпространство $E := [u_n]$, порожденное функциями этого блок-базиса в пространстве BMO, изоморфно c_0.

Пусть $f \in [u_n]$. Если $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n$ $(\beta_n \in \mathbb{R})$, то

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=s_n+1}^{s_{n+1}} \beta_n a_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k,$$

где $\gamma_k = \beta_n a_k$, если $k = s_n + 1, \dots, s_{n+1}$. Предполагая, что $p, q \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенствам $s_{n-1} \leq p < s_n < s_{n+l} < q \leq s_{n+l+1}$ с некоторыми положительными целыми n и l, оценим сумму $\sum\limits_{k=p}^{q} \gamma_k$. Ввиду свойств (d), (c), (a), а также предложений 1 и 2(i)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{q} \gamma_k\right| &= \left|\sum_{k=p}^{s_n} \gamma_k + \sum_{k=s_n+1}^{s_{n+l}} \gamma_k + \sum_{k=s_{n+l}+1}^{q} \gamma_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=p}^{s_n} \beta_{n-1} a_k + \sum_{i=n}^{n+l-1} \sum_{k=s_i+1}^{s_{i+1}} \beta_i a_k + \sum_{k=s_{n+l}+1}^{q} \beta_{n+l} a_k\right|\end{aligned}$$

$$\leq |\beta_{n-1}|\left|\sum_{k=p}^{s_n} a_k\right| + \sum_{i=n}^{n+l-1}|\beta_i|\left|\sum_{k=s_i+1}^{s_{i+1}} a_k\right| + |\beta_{n+l}|\left|\sum_{k=s_{n+l}+1}^{q} a_k\right|$$

$$\leq \sup_n |\beta_n|\left(\left|\sum_{k=p}^{s_n} a_k\right| + \left|\sum_{k=s_{n+l}+1}^{q} a_k\right|\right) \leq \sup_n |\beta_n|\left(\frac{3}{2}A(u_{n-1}) + \frac{3}{2}A(u_{n+l})\right)$$

$$\leq \frac{9}{2}(\|u_{n-1}\|_{BMO} + \|u_{n+l}\|_{BMO})\|\{\beta_n\}\|_{c_0} = 9\|\{\beta_n\}\|_{c_0}.$$

Применяя теорему 1(a), неравенства (2), а также свойства (a), (b), получаем

$$\|f\|_{BMO} \leq C\left(\|f\|_d + \sup_{q\geq 1}\left|\sum_{k=1}^{q}\gamma_k\right|\right) \leq C\left(\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n u_n\right\|_d + 9\|\{\beta_n\}\|_{c_0}\right)$$

$$\leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n} + 9\right)\|\{\beta_n\}\|_{c_0} = 10C\|\{\beta_n\}\|_{c_0}.$$

С другой стороны, ввиду предложения 1 и свойств (a), (b) для всех $n \in \mathbb{N}$

$$A(u_n) \geq \frac{1}{32}\|u_n\|_{BMO} - \|u_n\|_d \geq \frac{1}{32} - 2^{-n-5} \geq \frac{1}{64}.$$

Следовательно, в очередной раз применяя предложения 1 и 2 (см. также неравенства (7) и (15)), получим

$$\|f\|_{BMO} \geq \frac{1}{3}A(f) \geq \frac{1}{9}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{s_n+1\leq p<q\leq s_{n+1}}\left|\sum_{k=p}^{q}\beta_n a_k\right|$$

$$\geq \frac{1}{72}A(u_n)\|\{\beta_n\}\|_{c_0} \geq \frac{1}{72\cdot 64}\|\{\beta_n\}\|_{c_0}.$$

Таким образом, система $\{u_n\}$ эквивалентна в BMO каноническому базису c_0, и, следовательно, подпространство E изоморфно c_0. Так как подпространство $[f_k]$ сепарабельно, по теореме Собчика (см., например, [5, следствие 2.5.9]) E дополняемо в $[f_k]_{k=1}^{\infty}$, и предложение доказано.

Доказательство теоремы 3. Пусть сначала все множества A_k, кроме, может быть, конечного числа, содержат четное число элементов. Тогда по следствию 1 последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ эквивалентна в BMO каноническому базису в l_2. С другой стороны, одним из следствий классического неравенства Джона — Ниренберга (см., например, [6, замечание 3.19]) является вложение $BMO \subset L_p[0,1]$ для каждого $1 \leq p < \infty$. Так как $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $L_2[0,1]$, соответствующий ортогональный проектор P ограничен из $L_2[0,1]$ на подпространство $[f_k]$, причем последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2[0,1]$ также эквивалентна каноническому базису l_2. Следовательно, для каждой функции $f \in BMO$

$$\|Pf\|_{BMO} \asymp \|Pf\|_{L_2} \leq \|P\|\|f\|_{L_2} \leq C\|P\|\|f\|_{BMO},$$

т. е. проектор P ограничен в BMO и его образ совпадает с замкнутой линейной оболочкой $[f_k]$ в этом пространстве. Тем самым подпространство $[f_k]$ дополняемо в BMO.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что подпространство $[f_k]$ дополняемо в BMO и одновременно множество $\mathscr{E}$ всех $k \in \mathbb{N}$, для которых

$|A_k|$ нечетно, бесконечно. Пусть $P_1 : BMO \to [f_k]$ — ограниченный линейный проектор, образ которого совпадает с $[f_k]$. По предложению 3 существует подпространство E, дополняемое в $[f_k]$ и изоморфное c_0. Пусть $P_2 : [f_k] \to E$ — ограниченный линейный проектор с образом E. Тогда $P := P_2 \circ P_1$ — линейный проектор, ограниченный в BMO, образ которого совпадает с E. Следовательно, BMO содержит дополняемое подпространство, изоморфное c_0. Так как BMO — сопряженное пространство (точнее, $BMO = (\operatorname{Re} H_1)^*$, см., например, [3, теорема 5.5]), это противоречит известному результату Бессаги — Пелчинского о том, что сопряженное пространство не может содержать дополняемого подпространства, изоморфного c_0 (см. [7, следствие 4]). Таким образом, если множество $\mathscr{E}$ тех $k \in \mathbb{N}$, для которых $|A_k|$ нечетно, бесконечно, то подпространство $[f_k]$ не дополняемо в BMO, и тем самым теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Müller P. F., Schechtman G.* On complemented subspaces of H^1 and BMO // Lect. Notes Math. 1989. V. 1376. P. 113–125.
2. *Astashkin S. V., Leibov M., Maligranda L.* Rademacher functions in BMO // Studia Math. 2011. V. 205, N 1. P. 83–100.
3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
4. *Garnett J. B.* Bounded analytic functions. New York: Springer-Verl., 2007.
5. *Albiac F, Kalton N. J.* Topics in Banach space theory. New York: Springer-Verl., 2006. (Grad. Texts Math.; V. 233).
6. *Korenovskii A.* Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
7. *Bessaga C., Pełczyński A.* Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0 // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 1958. V. 6. P. 249–250.

Статья поступила 19 января 2012 г.

Асташкин Сергей Владимирович, Суханов Роман Сергеевич
Самарский гос. университет,
ул. Академика Павлова, 1, Самара 443011
astash@samsu.ru, surose@yandex.ru

Lech Maligranda (Малигранда Лех)
Luleå University of Technology
SE-971 87 Luleå, Sweden
lech.maligranda@ltu.se