Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 519.21

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ТРАЕКТОРИЯМИ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

В. И. Лотов

Аннотация. Найдены асимптотические представления для распределения числа пересечений расширяющейся полосы траекториями случайного блуждания в том случае, когда это число пересечений конечно с вероятностью единица. Результаты получены при различных ограничениях на скорость убывания на бесконечности распределения скачков случайного блуждания.

Ключевые слова: случайное блуждание, число пересечений полосы, асимптотический анализ.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

В работе изучается число пересечений полосы $-a \le y \le b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n), n \ge 0\}$, $-a \le 0 \le b$. Известно [1], что число пересечений конечно с вероятностью единица, если сходится один из рядов

$$\sum \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n > 0) < \infty \quad \text{или} \quad \sum \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n < 0) < \infty, \tag{1}$$

для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathbf{E}X_1 \ne 0$. К примеру, если сходится первый из рядов (1), то траектория случайного блуждания уходит вниз и с вероятностью единица максимум частных сумм конечен, а нижняя грань последовательности частных сумм равна $-\infty$.

Определим моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0,\ \tau_i^- = \inf\{n > \tau_{i-1}^+ : S_n \le -a\},\ \tau_i^+ = \inf\{n > \tau_i^- : S_n \ge b\},\ i \ge 1.$$

Всегда полагаем $\inf \varnothing = \infty$.

Пусть выполнено (1). Введем случайную величину $\eta^{(1)}$, равную числу пересечений указанной полосы снизу вверх траекторией $\{(n, S_n), n \ge 0\}$. Очевидно, $\mathbf{P}(\eta^{(1)} \ge k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$. Аналогичным образом определяется случайная величина $\eta^{(2)}$, равная числу пересечений полосы сверху вниз.

Изучению распределения числа пересечений полосы посвящено значительное число публикаций. В ряде статей получены точные формулы для указанного распределения в различных схемах блуждания. Так, в [2] приведены

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00285).

представления вероятностей $\mathbf{P}(\eta^{(i)} \geq k)$ в терминах итераций некоторых операторов, связанных с компонентами факторизации функции $1 - z\varphi(\lambda)$, здесь $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\exp\{\lambda X_1\}$. В [3] найдены аналогичные представления при рассмотрении однородного процесса с независимыми приращениями. Точные формулы для распределения случайных величин $\eta^{(i)}$ изучались в [4] при условии, что X_i целочисленны, $\mathbf{E}X_1 \neq 0$, а вероятности $\mathbf{P}(X_1 = k)$, $\mathbf{P}(X_1 = -k)$ убывают как геометрическая прогрессия. В [5] получены аналогичные результаты в случае геометрического распределения только на одной из полуосей. В [4] замечено также, что вероятности $\mathbf{P}(\eta^{(i)} \geq k)$ всегда могут быть оценены сверху соответствующими вероятностями для геометрического распределения. А именно, если $\mathbf{E}X_1 < 0$, то

$$\mathbf{P}(\eta^{(1)} \geq k) \leq [\mathbf{P}(S \geq a + b)]^k,$$

где $S = \sup\limits_{n \geq 0} S_n$. В [6] распределение числа пересечений получено для винеровского процесса со сносом.

В связи с тем, что нахождение точных выражений для искомого распределения доступно только для блужданий частного вида, многие публикации в этом направлении связаны с построением разного рода аппроксимаций, включая рассмотрение числа пересечений полосы на конечном расширяющемся интервале времени. Так, некоторые предельные результаты для числа пересечений уровня изложены в [7, 8]. Работа [9] содержит утверждение о предельном распределении числа нулей в последовательности S_n в случае, когда $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. В [2] кроме упомянутых операторных представлений для вероятностей $\mathbf{P}(\eta^{(i)} \geq k)$ установлено их асимптотическое поведение при условии, что полоса безгранично расширяется. При этом дополнительно предполагается выполненным условие Крамера на распределение скачков рассматриваемого блуждания. Также в условиях Крамера при $\mathbf{E}X_1 = 0$ для распределения числа пересечений полосы на конечном неограниченно растущем интервале времени в [10] найдены полные асимптотические разложения, если ширина полосы растет согласованно с рассматриваемым интервалом времени. Аналоги этих результатов получены также для блужданий, заданных на цепи Маркова [11].

Настоящая работа содержит новые асимптотические представления для распределения числа пересечений полосы снизу вверх при условии, что ширина полосы неограниченно возрастает. Отдельно рассматриваются случаи медленного и быстрого убывания распределения X_1 на бесконечности. Мы предполагаем также, что $\mathbf{E}X_1 < 0$. Ясно, что случайные величины $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ отличаются друг от друга самое большее на единицу. В дальнейшем для краткости полагаем $\eta = \eta^{(1)}$.

Обозначим через $\mathscr{S}$ класс субэкспоненциальных распределений. Напомним его определение (см., например, [1]). Пусть неотрицательные независимые случайные величины Y_1 и Y_2 имеют одну и ту же функцию распределения F. Тогда будем говорить , что $F \in \mathscr{S}_+$, если при $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(Y_1 + Y_2 \geq t) \sim 2\mathbf{P}(Y_1 \geq t).$$

Классу $\mathscr{S}_+$, в частности, принадлежат распределение Вейбулла $1 - F(t) = \exp\{-t^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, а также распределения с правильным изменением на бесконечности, т. е. $1 - F(t) = t^{-\alpha}L(t)$, где $\alpha > 0$, а функция $L(t)$ медленно меняется на бесконечности.

Функция распределения произвольной случайной величины Y по определению принадлежит $\mathscr{S}$, если функция распределения случайной величины $\max\{0, Y\}$ принадлежит $\mathscr{S}_+$. Обозначим

$$G(x) = \min\left(1, \int\limits_x^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t)\,dt\right).$$

Для случайного блуждания, удовлетворяющего условию $\mathbf{E}X_1 < 0$, положим

$$S = \sup_{n\ge 0} S_n, \quad \nu_t^- = \inf\{n \ge 1 : S_n \le t\}, \quad \chi_t^- = S_{\nu_t^-} - t, \quad t \le 0,$$

и пусть

$$G_0(v) = \frac{1}{|\mathbf{E}\chi_0^-|} \int\limits_{-\infty}^v \mathbf{P}(\chi_0^- < t)\,dt.$$

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{E}X_1 < 0$, распределение X_1 не арифметическое и $1-G \in \mathscr{S}$. Тогда для каждого целого $k \ge 2$ и произвольного $a \ge 0$*

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \mathbf{P}(\eta \ge 1)\left(\frac{1}{|\mathbf{E}X_1|}\int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t)(1 - G_0(a+b-t))\,dt\right)^{k-1}(1+o(1))$$

при $b \to \infty$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для $k \ge 2$

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \int\limits_b^\infty \int\limits_{-\infty}^{+0} \mathbf{P}(S \ge a+b-x)\mathbf{P}(\chi_{-a-y}^- \in dx)\mathbf{P}(S_{\tau_{k-1}^+} \in dy) \tag{2}$$

(подынтегральное выражение означает, что фиксируем в точке y положение в момент τ_{k-1}^+, т. е. в момент $(k-1)$-го пересечения полосы снизу вверх, затем положение x в момент первого после τ_{k-1}^+ достижения нижней границы и заботимся о том, чтобы супремум последующей части траектории обеспечил достижение верхней границы полосы). Далее воспользуемся следующим известным результатом (см., например, [2, гл. 12, § 7]): если $1 - G \in \mathscr{S}$, то

$$\mathbf{P}(S \ge a+b-x) = \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|}\int\limits_{a+b-x}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t)\,dt(1+\psi(a+b-x)), \tag{3}$$

где $\psi(t) = o(1)$ при $t \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|}\int\limits_b^\infty \int\limits_{-\infty}^{+0} \int\limits_{a+b-x}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t)\,dt(1+\psi(a+b-x)) \\ \times \mathbf{P}(\chi_{-a-y}^- \in dx)\mathbf{P}(S_{\tau_{k-1}^+} \in dy).$$

Введем $\psi_1(t) = \sup\limits_{v \ge t} \psi(v)$. Имеем

$$\psi(a+b-x) \le \psi_1(a+b-x) \le \psi_1(a+b)$$

в силу того, что $x \le 0$, а $\psi_1(t)$ — невозрастающая функция. Кроме того, $\psi_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Устремив $b \to \infty$, получаем $\psi_1(a+b) = o(1)$. Таким образом, при $b \to \infty$

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_b^\infty \int\limits_{-\infty}^{+0} \int\limits_{a+b-x}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t)\, dt \mathbf{P}(\chi^-_{-a-y} \in dx) \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)(1+o(1)).$$

Изменим порядок интегрирования:

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t) \int\limits_b^\infty \int\limits_{a+b-t}^{+0} \mathbf{P}(\chi^-_{-a-y} \in dx) \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)\, dt (1+o(1))$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t) \int\limits_b^\infty (1 - \mathbf{P}(\chi^-_{-a-y} < a+b-t)) \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)\, dt (1+o(1)).$$

Предельное распределение величины перескока через удаляющийся барьер также хорошо известно (см., например, [1, гл. 10, § 4]). Если распределение скачков блуждания не является арифметическим, то

$$\mathbf{P}(\chi^-_{-a-y} < v) = G_0(v) + \theta_{y+a}(v), \tag{4}$$

где $\theta_t(v) \to 0$ при каждом v, если $t \to \infty$. Заметим, что здесь сходимость равномерна по v в силу того, что предельная функция непрерывна. Ранее предположили, что $b \to \infty$; этого достаточно, чтобы $y + a \to \infty$, поскольку $y \ge b$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого $b \ge b_0$ будет выполняться

$$\left| \int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t) \int\limits_b^\infty \theta_{y+a}(a+b-t) \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)\, dt \right|$$
$$\le \varepsilon \left| \int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t) \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)\, dt \right|,$$

т. е.

$$\int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t) \int\limits_b^\infty \theta_{y+a}(a+b-t) \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)\, dt$$
$$= o(1) \int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t) \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)\, dt$$

при $b \to \infty$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(\eta \ge k) = \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t) \int\limits_b^\infty (1 - G_0(a+b-t)) \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)\, dt (1+o(1))$$

$$= \frac{\mathbf{P}(\tau^+_{k-1} < \infty)}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^\infty \mathbf{P}(X_1 \ge t)(1 - G_0(a+b-t))\, dt (1+o(1)).$$

Напомним, что $\mathbf{P}(\tau_{k-1}^{+} < \infty) = \mathbf{P}(\eta \geq k-1)$. Из этого рекуррентного соотношения следует утверждение теоремы.

Рассмотрим далее $\mathbf{P}(\eta \geq 1)$. Очевидно,

$$\mathbf{P}(\eta \geq 1) = \int\limits_{-\infty}^{+0} \mathbf{P}(S \geq a+b-x)\, \mathbf{P}(\chi_{-a}^{-} \in dx). \tag{5}$$

Устремив $b \to \infty$ и воспользовавшись вновь соотношением (3), будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\eta \geq 1) &= \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{-\infty}^{+0} \int\limits_{a+b-x}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t)\, dt\, \mathbf{P}(\chi_{-a}^{-} \in dx)(1+o(1)) \\
&= \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t) \int\limits_{a+b-t}^{+0} \mathbf{P}(\chi_{-a}^{-} \in dx)\, dt(1+o(1)) \\
&= \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t)(1-\mathbf{P}(\chi_{-a}^{-} < a+b-t))\, dt(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Если дополнительно предположить, что $a \to \infty$, и воспользоваться асимптотикой (4), то получим

$$\mathbf{P}(\eta \geq 1) = \frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t)((1-G_0(a+b-t)))\, dt(1+o(1)).$$

Таким образом, справедливо

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *имеет место*

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = \left(\frac{1}{|\mathbf{E}X_1|} \int\limits_{a+b}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 \geq t)(1-G_0(a+b-t))\, dt \right)^{k} (1+o(1))$$

для любого целого $k \geq 1$, *если* $a \to \infty$ *и* $b \to \infty$.

Далее рассмотрим ситуацию, когда скачки случайного блуждания удовлетворяют одностороннему условию Крамéра. Введем следующие условия.

(C_1) Существует $\lambda > 0$ такое, что $\mathbf{E}e^{\lambda X_1} < \infty$.

(C_2) Существует $q > 0$ такое, что

$$\varphi(q) = \mathbf{E}e^{qX_1} = 1, \quad \mathbf{E}X_1 e^{qX_1} = \varphi'(q) < \infty.$$

Обозначим $\nu^{+} = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}$. На множестве $\{\nu^{+} < \infty\}$ определим случайную величину $\chi^{+} = S_{\nu^{+}}$. Пусть

$$c = \frac{\mathbf{P}(S=0)}{q\mathbf{E}(\chi^{+}\exp\{q\chi^{+}\}; \nu^{+} < \infty)}, \quad d = \frac{1}{|\mathbf{E}\chi_0^{-}|} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{qx}\mathbf{P}(\chi_0^{-} < x)\, dx.$$

Здесь $c < 1$ (см. [1, гл. 12, § 7]) и, очевидно, $d < 1$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 < 0$, *распределение* X_1 *не арифметическое и выполнены условия* (C_1), (C_2). *Тогда для любого целого* $k \geq 2$ *и произвольного* $a \geq 0$ *при* $b \to \infty$ *имеет место*

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = \mathbf{P}(\eta \geq 1)(cd)^{k-1} e^{-q(k-1)(a+b)}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Вновь воспользуемся соотношением (2), однако в условиях данной теоремы асимптотика распределения супремума будет иной, а именно

$$\mathbf{P}(S \geq x) = ce^{-qx}(1 + r(x)), \tag{6}$$

где $r(x) \to 0$ при $x \to \infty$ [1, гл. 12, § 7]. Различные выражения для константы c приведены там же. Как и в доказательстве теоремы 1, из (2) выводим

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = \int\limits_b^\infty \int\limits_{-\infty}^{+0} ce^{-q(a+b-x)}(1 + r(a+b-x))\mathbf{P}(\chi^-_{-a-y} \in dx)\mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)$$

$$= ce^{-q(a+b)} \int\limits_b^\infty \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{qx}\mathbf{P}(\chi^-_{-a-y} \in dx)\mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)(1 + o(1)) \tag{7}$$

при $b \to \infty$. В силу слабой сходимости (4) при $b \to \infty$ имеет место сходимость

$$\int\limits_{-\infty}^{+0} e^{qx}\mathbf{P}(\chi^-_{-a-y} \in dx) \to d = \frac{1}{|\mathbf{E}\chi^-_0|} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{qx}\mathbf{P}(\chi^-_0 < x)\, dx.$$

Поэтому соотношение (4) превращается в

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = cde^{-q(a+b)} \int\limits_b^\infty \mathbf{P}(S_{\tau^+_{k-1}} \in dy)(1+o(1)) = \mathbf{P}(\eta \geq k-1)cde^{-q(a+b)}(1+o(1)).$$

Теорема доказана.

Возвратимся к соотношению (5). В наших условиях

$$\mathbf{P}(\eta \geq 1) = \int\limits_{-\infty}^{+0} \mathbf{P}(S \geq a+b-x)\, \mathbf{P}(\chi^-_{-a} \in dx)$$

$$= ce^{-q(a+b)} \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{qx}\, \mathbf{P}(\chi^-_{-a} \in dx)(1 + o(1)). \tag{8}$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $a \to \infty$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+0} e^{qx}\, \mathbf{P}(\chi^-_{-a} \in dx) \to d.$$

Таким образом, получаем

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 2 *предположить, что* $a \to \infty$ *наряду с* $b \to \infty$, *то для любого целого* $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = (cd)^k e^{-qk(a+b)}(1 + o(1)). \tag{9}$$

Асимптотическое представление (9) ранее установлено в [2] при более ограничительных требованиях на распределение X_1.

Замечание 1. Вычисления в теоремах 1 и 2 упростятся, если

$$\mathbf{P}(X_1 < t) = \alpha \exp\{\beta t\}, \quad t \leq 0.$$

В этом случае $\mathbf{P}(\chi_0^- < t) = G_0(t) = \exp\{\beta t\}$, $t \leq 0$, и $d = \beta/(\beta + q)$.

Замечание 2. Если число a не растет, то для вычисления правой части (8) можно воспользоваться следующим соотношением [2]. При $|z| < 1$ и $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$

$$\mathbf{E}(z^{\nu_{-a}^-} \exp\{\lambda \chi_{-a}^-\}) = R_-(z, \lambda)[R_-^{-1}(z, \lambda)]^{(-\infty, -a]}. \tag{10}$$

Здесь $R_-(z, \lambda)$ — отрицательная компонента факторизации

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_-(z, \lambda) R_+(z, \lambda),$$

подробные сведения о которой содержатся, например, в [1, гл. 12]. В (10) использовано также обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dH(x) \right]^A = \int_A e^{\lambda x} dH(x), \quad \text{где} \int_{-\infty}^{\infty} |dH(x)| < \infty, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0.$$

Левая часть (10) существует при $z = 1$ и непрерывна в этой точке, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+0} e^{qx} \mathbf{P}(\chi_{-a}^- \in dx) = \lim_{z \to 1} \mathbf{E}(z^{\nu_{-a}^-} \exp\{q \chi_{-a}^-\})$$
$$= \lim_{z \to 1} R_-(z, \lambda) \big[R_-^{-1}(z, \lambda)\big]^{(-\infty, -a]} \big|_{\lambda = q}.$$

Нахождение компоненты факторизации $R_-(z, \lambda)$ в явном виде доступно для широкого класса случайных блужданий, подробные сведения об этом также можно найти в [1, гл. 12].

Автор благодарен С. А. Хапугину, совместная деятельность с которым явилась стимулом для написания этой заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009.
2. *Лотов В. И.* Об одном подходе в двуграничных задачах // Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989. С. 117–121.
3. *Лотов В. И., Ходжибаев В. Р.* О числе пересечений полосы для случайных процессов с независимыми приращениями // Предельные теоремы для случайных процессов и их применения: Тр. Ин-та математики СО РАН. Новосибирск, 1993. Т. 20. С. 162–169.
4. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 135–146.
5. *Борисов И. С.* Замечание о распределении числа пересечений полосы случайным блужданием // Теория вероятностей и ее применения. 2008. Т. 53, № 2. С. 345–349.

6. *Борисов И. С., Никитина Н. Н.* Распределение числа пересечений полосы траекториями простейших случайных блужданий и винеровского процесса со сносом // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 1. С. 152–158.

7. *Гіхман Й. І.* Асимптотичні розподіли числа перетинів випадковою функцією границі даноі області // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Астрономия, математика, механика. 1958. Т. 1, № 1. С. 25–46.

8. *Скороход А. В., Слободенюк Н. Г.* Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наук. думка, 1970.

9. *Chung K. L., Hunt G. A.* On the zeros of $\sum_1^n \pm 1$ // Ann. Math. 1949. V. 50, N 2. P. 385–400.

10. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 822–842.

11. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* Асимптотические разложения распределения числа пересечений полосы случайным блужданием, заданным на цепи Маркова // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1303–1322.

Статья поступила 5 июля 2012 г.

Лотов Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru