Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 512.57

ПРОСТЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ НЕКОММУТАТИВНЫЕ ЙОРДАНОВЫ СУПЕРАЛГЕБРЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

А. П. Пожидаев, И. П. Шестаков

Аннотация. Классифицированы центральные простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0. Как следствие, описаны скобки Пуассона на простых конечномерных йордановых супералгебрах характеристики 0.

Ключевые слова: некоммутативная йорданова супералгебра, скобка Пуассона, простая супералгебра, супералгебра Грассмана.

Посвящается 70-летию Виктора Даниловича Мазурова

Введение

Статья является продолжением предыдущей нашей работы [1], в которой мы классифицировали центральные простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 и степени $n > 2$. В настоящей работе мы рассматриваем оставшиеся случаи, а именно случаи степеней 1 и 2.

Класс некоммутативных йордановых супералгебр чрезвычайно обширен: он включает в себя альтернативные супералгебры, йордановы супералгебры, квазиассоциативные супералгебры, квадратичные эластичные супералгебры и суперантикоммутативные супералгебры.

В случае простых некоммутативных йордановых алгебр характеристики 0 Шейфер доказал, что они являются либо простыми коммутативными йордановыми алгебрами, либо простыми квазиассоциативными алгебрами, либо простыми эластичными алгебрами степени 2 [2]. Оемке перенес классификацию Шейфера на случай эластичных алгебр со строго ассоциативными степенями характеристики $\neq 2, 3$ [3], МакКриммон — на некоммутативные йордановы алгебры степени > 2 и характеристики $\neq 2$ [4, 5], а Смит описал такие алгебры степени 2 [6]. Случай нодальных простых алгебр положительной характеристики в основном рассматривался Кокорисом [7, 8], случай бесконечномерных йордановых алгебр — в работах И. П. Шестакова [9] и В. Г. Скосырского [10].

Случай конечномерных простых йордановых супералгебр над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0 исследован В. Кацем [11] и И. Кантором [12]. Изучение йордановых супералгебр положительной характеристики

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00938–а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (№ 14.740.11.0346), второго — фондов FAPESP 2010/50347–9 и CNPq 305344/2009–9.

было инициировано Капланским [13]. М. Расин и Е. Зельманов [14] классифицировали конечномерные простые йордановы супералгебры характеристики $\neq 2$ с полупростой четной частью; К. Мартинез и Е. Зельманов рассмотрели случай, когда четная часть не является полупростой [15], а Е. Зельманов — оставшийся неунитальный случай [16]. Проблема классификации простых некоммутативных йордановых супералгебр поставлена в [17, проблема 3.100a] (см. также [18]).

В § 2 описаны простые некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 и степени 2, в § 3 — некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 и степени 1. Вопрос в данном случае сводится к описанию дифференцирований супералгебры Грассмана, относительно которых она дифференциально простая.

Поскольку некоммутативные йордановы супералгебры находятся во взаимно однозначном соответствии с йордановыми супералгебрами, допускающими структуру скобки Пуассона, следствием полученных результатов является описание скобок Пуассона на простых конечномерных йордановых супералгебрах характеристики 0. Для супералгебр степени ≤ 2, изучаемых в настоящей работе, явно описываем скобки Пуассона, а для оставшихся супералгебр, исследованных в [1], описание получается из леммы 7.

В дальнейшем U означает некоммутативную йорданову супералгебру (не обязательно конечномерную) над F, где F всегда обозначает основное поле характеристики $\neq 2$. Символ $:=$ обозначает равенство по определению, $(x,y,z) := (xy)z - x(yz)$, $[x,y] := xy - (-1)^{xy}yx$, $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + (-1)^{xy}yx)$, $x \bullet y := xy + (-1)^{xy}yx$, $\langle \Upsilon \rangle$ — линейная оболочка множества Υ над F.

§ 1. Предварительные результаты

1. Определяющие тождества. Пусть $U = U_{\bar{0}} \oplus U_{\bar{1}}$ — супералгебра, $(-1)^{xy} := (-1)^{p(x)p(y)}$, где $p(x)$ — четность x ($p(x) = i$, если $x \in U_{\bar{i}}$); $(-1)^{x,y,z} := (-1)^{xy+xz+yz}$. Всюду далее если в формуле появляется четность элемента, то этот элемент предполагается однородным, идемпотенты также предполагаются однородными. Обозначим через L_x и R_x операторы левого и правого умножения на элемент $x \in U$:

$$L_x(y) := xy, \quad R_x(y) := (-1)^{xy}yx.$$

Супералгебра U называется *некоммутативной йордановой супералгеброй*, если операторные тождества

$$[R_{x\circ y}, L_z] + (-1)^{x(y+z)}[R_{y\circ z}, L_x] + (-1)^{z(x+y)}[R_{z\circ x}, L_y] = 0, \tag{1}$$

$$[R_x, L_y] = [L_x, R_y] \tag{2}$$

справедливы для всех $x, y, z \in U$. Второе операторное тождество определяет класс эластичных супералгебр. Заметим, что (2) следует из (1), если U обладает единицей. Если предположим, что все элементы из U четны, то придем к определению некоммутативной йордановой алгебры.

Тождество эластичности может быть записано в следующих видах:

$$(-1)^{xy}L_{xy} - L_yL_x = R_{yx} - R_yR_x, \tag{3}$$

$$(x,y,z) = -(-1)^{x,y,z}(z,y,x). \tag{4}$$

Лемма 1 [1]. *U является некоммутативной йордановой супералгеброй тогда и только тогда, когда U — эластичная супералгебра такая, что $U^{(+)}$ — йорданова супералгебра.*

2. Разложение Пирса. Напомним обычные факты о разложении Пирса [19, 4, 1]. Используя (1), получаем

$$R_{y(z\circ t)} + (-1)^{t(y+z)}(R_t + L_t)L_y L_z + (-1)^{yz}(R_z + L_z)L_y L_t$$
$$= R_y R_{z\circ t} + (-1)^{t,y,z}(R_t + L_t)L_{zy} + (-1)^{y(z+t)}(R_z + L_z)L_{ty}. \quad (5)$$

Если $e \in U$ такой, что $e^2 = e$ и e однороден, то $e \in U_{\bar{0}}$ и (5) дает

$$R_e + (R_e + L_e)L_e^2 = (R_e + L_e)L_e + R_e^2. \quad (6)$$

Согласно (2) $L_e - L_e^2 = R_e - R_e^2$. Следовательно, (6) эквивалентно

$$(R_e + L_e)\big(L_e - L_e^2\big) = \big(L_e - L_e^2\big).$$

Положим $U_i = \{x : ex + xe = ix\}$ при $i = 0, 1, 2$. Применяя стандартные рассуждения, получаем $U = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2$.

Обозначим через P_i ассоциированную проекцию на U_i. Заметим, что пространства U_0, U_1 и U_2 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$U_i^2 \subseteq U_i, \quad U_i U_1 + U_1 U_i \subseteq U_1, \quad U_0 U_2 = 0, \quad (7)$$

$$x \in U_i \Rightarrow xe = ex = \frac{1}{2}ix,\ i = 0, 2, \quad x, y \in U_1 \Rightarrow x \circ y \in U_0 + U_2. \quad (8)$$

Лемма 2 [1]. *Если $x, y \in U_0$, $u \in U_2$, $u_i \in U_i$ $(i = 0, 2)$, $z, w \in U_1$, то*

$$e(z \bullet y) = ez \bullet y = zy, \quad (y \bullet z)e = y \bullet ze = yz, \quad (9)$$

$$e(u \bullet z) = u \bullet ez = uz, \quad (z \bullet u)e = ze \bullet u = zu, \quad (10)$$

$$P_2(ez \bullet w) = P_2(z \bullet we) = P_2(zw), \quad P_0(w \bullet ez) = P_0(we \bullet z) = P_0(wz), \quad (11)$$

$$P_1(zw) \bullet u_i = P_1(z(w \bullet u_i)) = (-1)^{wu_i} P_1((z \bullet u_i)w). \quad (12)$$

Лемма 3 [1]. *Для любого фиксированного $i \in \{0, 2\}$ и для всех $x, y, z \in U_1$ справедливы следующие соотношения:*

$$P_i(x \circ P_1(yz)) = P_i(P_1(xy) \circ z) = (-1)^{x(y+z)} P_i(y \circ P_1(zx)). \quad (13)$$

3. Мутации. Если $U = (U, \cdot)$ — супералгебра и $\lambda \in F$, то λ-*мутацией* U называется супералгебра $U^{(\lambda)} = (U, \cdot_\lambda)$, где

$$x \cdot_\lambda y = \lambda x \cdot y + (-1)^{xy}(1 - \lambda) y \cdot x.$$

Заметим, что $U^{(1/2)}$ — это в точности симметризованная супералгебра $U^{(+)}$.

Отображение $\tau : \lambda \mapsto (\lambda + 1)/2$ является взаимно однозначным отображением F на себя с обратным $\tau^{-1} : \lambda \mapsto 2\lambda - 1$, поэтому оно естественно отображает поле $F = (F, +, \cdot)$ изоморфно на поле $\widetilde{F} = (F, \oplus, \odot)$, где

$$\lambda \oplus \mu = \tau(\tau^{-1}\lambda + \tau^{-1}\mu) = \tau(2\lambda + 2\mu - 2) = \lambda + \mu - \tfrac{1}{2},$$

$$\lambda \odot \mu = \tau(\tau^{-1}\lambda \cdot \tau^{-1}\mu) = \tau(4\lambda\mu - 2\lambda - 2\mu + 1) = 2\lambda\mu - \lambda - \mu + 1.$$

Поле $\widetilde{F}$ имеет нулевой элемент $\tau(0) = \frac{1}{2}$ и единицу $\tau(1) = 1$.

Если рассмотреть двойную мутацию $(U^{(\lambda)})^{(\mu)}$, то легко вывести равенство $(U^{(\lambda)})^{(\mu)} = U^{(\lambda\odot\mu)}$. Если $\lambda \neq \frac{1}{2}$, то λ имеет обратный элемент μ в $\widetilde{F}$, поэтому можем восстановить U из $U^{(\lambda)}$: $U = U^{(1)} = U^{(\lambda\odot\mu)} = (U^{(\lambda)})^{(\mu)}$. Однако если $\lambda = \frac{1}{2}$, то не всегда можно однозначно восстановить U, поскольку все мутации имеют одинаковую $U^{(+)}$. Так, нельзя, вообще говоря восстановить ассоциативную супералгебру U из специальной йордановой супералгебры $U^{(+)}$.

Заметим, что идеал в U остается идеалом в $U^{(\lambda)}$, поэтому если $\lambda \neq \frac{1}{2}$, то идеалы в U и $U^{(\lambda)}$ совпадают. Так как $L_x^{(\lambda)} = \lambda L_x + (1-\lambda)R_x$, $R_x^{(\lambda)} = \lambda R_x + (1-\lambda)L_x$, очевидно, что мутация некоммутативной йордановой супералгебры снова является некоммутативной йордановой супералгеброй.

Например, *расщепляемая квазиассоциативная супералгебра* — это мутация $\mathscr{D}^{(\lambda)}$ ассоциативной супералгебры $\mathscr{D}$. Супералгебра U называется *квазиассоциативной*, если существует расширение Ω поля F такое, что $U_\Omega := U \otimes_F \Omega$ — расщепляемая квазиассоциативная супералгебра над Ω: $U_\Omega = \mathscr{D}^{(\lambda)}$ для $\lambda \in \Omega$. Супералгебра U является расщепляемой квазиассоциативной супералгеброй тогда и только тогда, когда $\lambda \in F$. Известно, что *индикатор* $\phi = \lambda(1-\lambda)$ супералгебры U всегда лежит в F, поэтому достаточно рассматривать только квадратичные расширения $\Omega = F(\lambda)$. Эти идеи были впервые применены Албертом [19, с. 581–584], хотя он явно не использовал $\widetilde{F}$, что было сделано МакКриммоном в [4].

4. Простые супералгебры. Напомним некоторые факты из [1] о простых некоммутативных йордановых супералгебрах.

Лемма 4 [1]. *Пусть $(A,\cdot)$ — эластичная супералгебра. Если $A^{(+)}$ обладает единицей $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ для некоторых ортогональных четных идемпотентов e_i, то и A обладает тем же свойством.*

Лемма 5 [1]. *Отображение $d = [\cdot, x]$ является супердифференцированием в $U^{(+)}$ для любого $x \in U$.*

Обозначим через $\mathfrak{D}$ следующее множество супердифференцирований в $U^{(+)}$: $\mathfrak{D} := \{[\cdot, x] : x \in U\}$.

Лемма 6 [1]. *Супералгебра U проста тогда и только тогда, когда $U^{(+)}$ является $\mathfrak{D}$-простой супералгеброй.*

Бинарную операцию $\{\,,\}$ будем называть (*обобщенной*) *скобкой Пуассона* на супералгебре $(A,\cdot)$, если для любых однородных $a,b,c \in A$ справедливо равенство

$$\{a \cdot b, c\} = (-1)^{bc}\{a,c\} \cdot b + a \cdot \{b,c\}.$$

Заметим, что некоммутативные йордановы супералгебры находятся во взаимно однозначном соответствии со скобками Пуассона на присоединенных йордановых супералгебрах.

Лемма 7. *Пусть $(J,\bullet)$ — йорданова супералгебра с определенной на ней суперантикоммутативной скобкой Пуассона $[\,,]$. Тогда операция $ab = \frac{1}{2}(a\bullet b + [a,b])$ задает на пространстве J структуру некоммутативной йордановой супералгебры. Обратно, если U — некоммутативная йорданова супералгебра, то суперкоммутатор $[\,,]$ является скобкой Пуассона на йордановой супералгебре $U^{(+)}$, при этом умножение в U может быть восстановлено из йорданова умножения $\bullet$ в $U^{(+)}$ и скобки Пуассона $[\,,]$: $ab = \frac{1}{2}(a \bullet b + [a,b])$.*

Доказательство. По лемме 1 достаточно проверить эластичность:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = (xy)z - x(yz) &= (x \bullet y + [x,y])z - x(y \bullet z + [y,z]) \\
&= (x \bullet y) \bullet z + [x \bullet y, z] + [x,y] \bullet z + [[x,y],z] \\
&- x \bullet (y \bullet z) - [x, y \bullet z] - x \bullet [y,z] - [x,[y,z]] \\
&= (x \bullet y) \bullet z - x \bullet (y \bullet z) + [[x,y],z] - [x,[y,z]],
\end{aligned}
$$

откуда все и следует. Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно применить лемму 5. $\square$

Будем говорить, что некоммутативная йорданова супералгебра U имеет *степень* k, если k — это максимальное возможное число взаимно ортогональных идемпотентов в $U \otimes_F \overline{F}$, где $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание основного поля F; и U имеет *единицу степени* k, если k — это степень U и единица разлагается в сумму k ортогональных идемпотентов.

Теорема 1 [1]. *Конечномерная центральная простая некоммутативная йорданова супералгебра характеристики* 0 *является одной из следующих:*

(a) *степени* ≤ 2;

(b) *квазиассоциативной супералгеброй;*

(c) *йордановой супералгеброй.*

Кроме того, если степень U *больше* 1, *то* $U^{(+)}$ *простая.*

Некоторые конечномерные центральные простые некоммутативные йордановы супералгебры степени ≤ 2 и характеристики 0 описаны в [1]. В частности, там были введены простые некоммутативные йордановы супералгебры $D_t(\alpha)$ и $U(V,f,\star)$, у которых присоединенная йорданова супералгебра $U^{(+)}$ изоморфна соответственно четырехмерной супералгебре из параметрической серии D_t и супералгебре суперсимметрической билинейной суперформы $J(V,f)$ (и супералгебра $U = K_3(\alpha,\beta,\gamma)$ степени 1, у которой $U^{(+)}$ изоморфна трехмерной супералгебре Капланского), а также была доказана

Теорема 2 [1]. *Пусть* U *— конечномерная центральная простая некоммутативная йорданова супералгебра степени* ≤ 2 *над полем* F *характеристики* 0, *которая не является ни квазиассоциативной, ни суперкоммутативной. Тогда либо* U *изоморфна* $D_t(\alpha)$ *или* $U(V,f,\star)$ *(с точностью до расширений поля* F *степени 1 или 2), либо* $U^{(+)} \cong J \otimes \Gamma_m$, *где* $J \cong F, J(\Gamma_n), M_{1,1}^{(+)}, osp(1,2), P(2), Q(2)^{(+)}$.

Нашей целью является установление строения U в указанных оставшихся случаях для $U^{(+)}$.

§ 2. Простые некоммутативные йордановы супералгебры степени 2

1. Случай $M_{1,1}(F)^q$. Определим супералгебру $M_{1,1}(F)^q$. Положим

$$U = M_{1,1}(F)^q := U_{\bar{0}} \oplus U_{\bar{1}}, \quad U_{\bar{0}} = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad U_{\bar{1}} = \langle e_{12}, e_{21} \rangle.$$

Пусть $1 = e_1 + e_2$ — единица в $M_{1,1}(F)^q$, которая является суммой ортогональных идемпотентов e_1 и e_2. Определим в $M_{1,1}(F)^q$ оставшиеся произведения:

$$
\begin{gathered}
e_1 e_{12} = \alpha e_{12} + \beta e_{21}, \quad e_{12} e_1 = \gamma e_{12} - \beta e_{21}, \\
e_1 e_{21} = \delta e_{12} + \gamma e_{21}, \quad e_{21} e_1 = -\delta e_{12} + \alpha e_{21}, \\
e_{12} e_{21} = \alpha e_1 - \gamma e_2, \quad e_{21} e_{12} = -\gamma e_1 + \alpha e_2, \quad e_{12}^2 = -\beta 1, \ e_{21}^2 = \delta 1,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где $\alpha + \gamma = 1$ и $q = (\alpha, \beta, \delta)$.

Легко видеть, что $e_1 x = x e_2$, $e_2 x = x e_1$ для любого $x \in U_1$.

Лемма 8. *Пусть U — некоммутативная йорданова супералгебра такая, что $U^{(+)} \cong M_{1,1}(F)^{(+)}$. Тогда $U \cong M_{1,1}(F)^q$. Супералгебра $M_{1,1}(F)^q$ квазиассоциативна тогда и только тогда, когда $d = \alpha\gamma - \beta\delta \neq \frac{1}{4}$. В случае квазиассоциативности $M_{1,1}(F)^q$ изоморфна $A^{(\lambda)}$, где $\lambda(\lambda-1) = (1-4d)^{-1}$ и $A \cong M_{1,1}(F)$, при этом $M_{1,1}(F)^q$ ассоциативна тогда и только тогда, когда $d = 0$.*

Доказательство. Пусть $U^{(+)} \cong M_{1,1}(F)^{(+)}$. Получаем разложение Пирса для U (относительно $e_1 := e_{11}$):

$$U_0 = \langle e_2 := e_{22}\rangle, \quad U_1 = \langle e_{12}, e_{21}\rangle = U_{\bar{1}}, \quad U_2 = \langle e_1 := e_{11}\rangle.$$

Для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ имеем $e_1e_{12} = \alpha e_{12} + \beta e_{21}$, $e_1e_{21} = \delta e_{12} + \gamma e_{21}$. Тогда по (11)

$$P_0\big(e_{12}^2\big) = P_0(e_{12} \bullet e_1e_{12}) = P_0(e_{12} \bullet (\alpha e_{12} + \beta e_{21})) = \beta P_0(e_1 - e_2) = -\beta e_2,$$

$$P_2\big(e_{12}^2\big) = P_2(e_1e_{12} \bullet e_{12}) = P_2((\alpha e_{12} + \beta e_{21}) \bullet e_{12}) = \beta P_2(e_2 - e_1) = -\beta e_1,$$

откуда $e_{12}^2 = -\beta 1$.

Аналогично $e_{21}^2 = \delta 1$. Далее,

$$P_0(e_{12}e_{21}) = P_0(e_{12} \bullet e_1e_{21}) = P_0(e_{12} \bullet (\delta e_{12} + \gamma e_{21})) = \gamma P_0(e_1 - e_2) = -\gamma e_2,$$

$$P_2(e_{12}e_{21}) = P_2(e_1e_{12} \bullet e_{21}) = P_2((\alpha e_{12} + \beta e_{21}) \bullet e_{21}) = \alpha P_2(e_1 - e_2) = -\alpha e_1,$$

стало быть, $e_{12}e_{21} = \alpha e_1 - \gamma e_2$.

Аналогично

$$P_0(e_{21}e_{12}) = P_0(e_{21} \bullet e_1e_{12}) = P_0(e_{21} \bullet (\alpha e_{12} + \beta e_{21})) = \alpha P_0(e_2 - e_1) = \alpha e_2,$$

$$P_2(e_{21}e_{12}) = P_2(e_1e_{21} \bullet e_{12}) = P_2((\delta e_{12} + \gamma e_{21}) \bullet e_{12}) = \gamma P_2(e_2 - e_1) = -\gamma e_1,$$

следовательно, $e_{21}e_{12} = -\gamma e_1 + \alpha e_2$.

Так как $e_{12}e_{21} - e_{21}e_{12} = e_1 - e_2$, то $\alpha + \gamma = 1$.

В итоге согласно (14) $U \cong M_{1,1}(F)^q$. По построению $U^{(+)} \cong M_{1,1}(F)^{(+)}$. Осталось показать эластичность $M_{1,1}(F)^q$ и найти критерий квазиассоциативности.

Заметим, что $M_{1,1}(F)^q$ суперкоммутативна тогда и только тогда, когда $\beta = \delta = 0$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$.

Пусть U не суперкоммутативна. Можно воспользоваться критерием квазиассоциативности из [20]: U квазиассоциативна тогда и только тогда когда она удовлетворяет тождествам

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0, \quad (x, y, z) = \alpha[y, [x, z]]$$

для некоторого $\alpha \in F$, при этом α является индикатором U. Но в нашем случае можно рассуждать иначе. А именно, если U квазиассоциативна, то $U \cong A^{(\lambda)}$ при $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Следовательно, $U^{(\theta)} \cong A$ для некоторого $\theta \neq \frac{1}{2}$. Легко видеть, что таблица умножения в $U^{(\theta)}$ совпадет с таблицей умножения в U, если заменить α на $\alpha' = \mu\alpha + (1-\theta)$, γ на $\gamma' = \mu\gamma + (1-\theta)$, β на $\beta' = \mu\beta$, δ на $\delta' = \mu\delta$, где $\mu = 2\theta - 1 \neq 0$, при этом $\alpha' + \gamma' = \mu\alpha + (1-\theta) + \mu\gamma + (1-\theta) = \mu + 2 - 2\theta = 1$. Рассматривая всевозможные ассоциаторы в U, убеждаемся в эластичности U и в том, что U ассоциативна тогда и только тогда, когда $\alpha\gamma = \beta\delta$. Поэтому U квазиассоциативна тогда и только тогда, когда $\alpha'\gamma' = \beta'\delta' \iff (\mu\alpha + (1-\theta))(\mu\gamma + (1-\theta)) = \mu^2\beta\delta \iff (2\theta - 1)^2 d + \theta(1-\theta) = 0$. Считая $d \neq 0$, из последнего уравнения можно найти θ тогда и только тогда, когда $d \neq \frac{1}{4}$. Заметим, что A является простой ассоциативной супералгеброй. Из классификации простых ассоциативных супералгебр и соображений размерности следует, что $A \cong M_{1,1}(F)$. Этот изоморфизм можно установить и непосредственно: рассматривая U с условием $d = 0$, можно сделать невырожденную замену базиса в нечетной части $e'_{12} := xe_{12} + ye_{21}$, $e'_{21} := ze_{12} + te_{21}$, где $\gamma x = \delta y$, $\beta x = \alpha y$, $z\alpha + t\delta = 0$, $z\beta + t\gamma = 0$, $xt - yz = 1$. Легко проверить, что в новом базисе таблица умножения совпадает с таблицей умножения в $M_{1,1}(F)$. $\square$

Как следствие можем определить скобку Пуассона на $M_{1,1}(F)^{(+)}$ правилом

$$[e_{11}, e_{12}] = \alpha' e_{12} + \beta' e_{21}, \quad [e_{11}, e_{21}] = \gamma' e_{12} - \alpha' e_{21},$$

$$[e_{12}, e_{21}] = \alpha' 1, \quad [e_{12}, e_{12}] = -\beta', \quad [e_{21}, e_{21}] = \gamma',$$

где $\alpha' := \alpha - \gamma$, $\beta' := 2\beta$, $\gamma' = 2\delta$.

Заметим, что $M_{1,1}(F)^q \cong M_{1,1}(F)^{\bar{q}}$, где $q = (\alpha, \beta, \delta)$, $\bar{q} = (\alpha, -\delta, -\beta)$ (изоморфизм задается посредством $e_1 \leftrightarrow e_2$, $e_{12} \leftrightarrow e_{21}$). Предположим, что U не является ни суперкоммутативной, ни квазиассоциативной. Тогда при $d = \alpha\gamma - \beta\delta = \frac{1}{4}$ легко получаем соотношение $(\bar{\alpha})^2 = \beta\delta$, где $\bar{\alpha} = \alpha - \frac{1}{2}$, и можно считать, что $\beta \neq 0$. Таким образом, $M_{1,1}(F)^q$ полностью определяется двумя параметрами: α и β. В этом случае супералгебра $M_{1,1}(F)^q$ будет обозначаться через $M_{1,1}(F)(\alpha, \beta)$.

2. Случай $osp(1,2)^q$. Напомним, что $osp(1,2) \cong H(M_{1,2}(F), osp)$ — йорданова супералгебра симметрических элементов простой ассоциативной супералгебры $M_{1,2}(F)$ относительно ортосимплектической суперинволюции:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{osp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & -B \\ C & D \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

где $A \in F$, $B \in M_{1,2}(F)$, $C \in M_{2,1}(F)$, $D \in M_2(F)$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом,

$$osp(1,2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & d & 0 \\ -b & 0 & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}.$$

Определим супералгебру $osp(1,2)^q$. Положим

$$U = osp(1,2)^q := U_{\bar{0}} \oplus U_{\bar{1}}, \quad U_{\bar{0}} = \langle e_1, e_2 \rangle, \ U_{\bar{1}} = \langle a, b \rangle.$$

Пусть $1 = e_1 + e_2$ — единица в $osp(1,2)^q$, которая является суммой ортогональных идемпотентов e_1 и e_2, и определим в $osp(1,2)^q$ оставшиеся произведения:

$$\begin{gathered} e_1 a = \alpha a + \beta b, \ a e_1 = \gamma a - \beta b, \ e_1 b = \delta a + \gamma b, \ b e_1 = -\delta a + \alpha b, \\ ab = 2\alpha e_1 - \gamma e_2, \ ba = -2\gamma e_1 + \alpha e_2, \ a^2 = -\beta(2e_1 + e_2), \ b^2 = \delta(2e_1 + e_2), \end{gathered} \tag{15}$$

где $\alpha + \gamma = 1$ и $q = (\alpha, \beta, \delta)$.

Легко видеть, что $e_1 x = x e_2$, $e_2 x = x e_1$ для любого $x \in U_1$.

Лемма 9. *Пусть U — некоммутативная йорданова супералгебра такая, что $U^{(+)} \cong osp(1,2)$. Тогда $U \cong osp(1,2)^q$. Супералгебра $osp(1,2)^q$ не является* *квазиассоциативной;* $osp(1,2)^q$ *суперкоммутативна тогда и только тогда, когда* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)$, *при этом* $osp(1,2)^q\cong osp(1,2)$.

Доказательство. Пусть $U^{(+)}\cong osp(1,2)$. Получаем разложение Пирса для U (относительно $e_1:=e_{11}$):

$$U_0=\langle e_2:=e_{22}+e_{33}\rangle,\ U_1=\langle a:=e_{12}-e_{31},b:=e_{13}+e_{21}\rangle=U_{\bar 1},\ U_2=\langle e_1:=e_{11}\rangle.$$

Для некоторых $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in F$ имеем $e_1a=\alpha a+\beta b,\quad e_1b=\delta a+\gamma b$. Тогда

$$P_0(ab)=P_0(a\bullet e_1b)=P_0(a\bullet(\delta a+\gamma b))=\gamma P_0(2e_1-e_2)=-\gamma e_2,$$
$$P_2(ab)=P_2(e_1a\bullet b)=P_2((\alpha a+\beta b)\bullet b)=\alpha P_2(2e_1-e_2)=2\alpha e_1,$$
$$ab=2\alpha e_1-\gamma e_2,$$
$$P_0(ba)=P_0(b\bullet e_1a)=P_0(b\bullet(\alpha a+\beta b))=\alpha P_0(e_2-2e_1)=\alpha e_2,$$
$$P_2(ba)=P_2(e_1b\bullet a)=P_2((\delta a+\gamma b)\bullet a)=\gamma P_2(e_2-2e_1)=-2\gamma e_1,$$
$$ba=-2\gamma e_1+\alpha e_2,$$
$$ab-ba=2(\alpha+\gamma)e_1-(\alpha+\gamma)e_2=2e_1-e_2,\quad \alpha+\gamma=1.$$

Далее,

$$P_0(a^2)=P_0(a\bullet e_1a)=P_0(a\bullet(\alpha a+\beta b))=\beta P_0(2e_1-e_2)=-\beta e_2,$$
$$P_2(a^2)=P_2(e_1a\bullet a)=P_2((\alpha a+\beta b)\bullet a)=\beta P_2(e_2-2e_1)=-2\beta e_1,$$
$$P_0(b^2)=P_0(b\bullet e_1b)=P_0(b\bullet(\delta a+\gamma b))=\delta P_0(e_2-2e_1)=\delta e_2,$$
$$P_2(b^2)=P_2(e_1b\bullet b)=P_2((\delta a+\gamma b)\bullet b)=\delta P_2(2e_1-e_2)=2\delta e_1.$$

Легко видеть, что $e_1x=xe_2$, $e_2x=xe_1$ для любого $x\in U_1$.

В итоге по (15) видим, что $U\cong osp(1,2)^q$. По построению $U^{(+)}\cong osp(1,2)$. Осталось показать эластичность $osp(1,2)^q$ и найти критерий квазиассоциативности.

Заметим, что $osp(1,2)^q$ суперкоммутативна тогда и только тогда, когда $\beta=\delta=0$, $\alpha=\gamma=\frac{1}{2}$.

Далее, пусть U не суперкоммутативна. Тогда если U квазиассоциативна, то $U\cong A^{(\lambda)}$ при $\lambda\neq\frac{1}{2}$. Следовательно, $U^{(\theta)}\cong A$ для некоторого $\theta\neq\frac{1}{2}$. Легко видеть, что таблица умножения в $U^{(\theta)}$ совпадет с таблицей умножения в U, если заменить α на $\alpha'=\mu\alpha+(1-\theta)$, γ на $\gamma'=\mu\gamma+(1-\theta)$, β на $\beta'=\mu\beta$, δ на $\delta'=\mu\delta$, где $\mu=2\theta-1\neq0$, при этом $\alpha'+\gamma'=\mu\alpha+(1-\theta)+\mu\gamma+(1-\theta)=\mu+2-2\theta=1$. Рассматривая всевозможные ассоциаторы в U, убеждаемся в эластичности U. Выпишем некоторые ассоциаторы:

$$(a,e_1,e_1)=(\gamma^2-\gamma+\beta\delta)a,\quad (a,b,b)=(\alpha\gamma-\beta\delta)a+\beta(\alpha-\gamma)b,$$
$$(a,b,a)=(\alpha^2+\gamma^2)a+\beta(\alpha-\gamma)b,\quad (a,a,a)=-\beta(\alpha-\gamma)a-2\beta^2b,$$
$$(b,b,b)=2\delta^2a-\delta(\alpha-\gamma)b.$$

В итоге получаем следующие условия ассоциативности: $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, которые, как и в лемме 8, дают требуемые условия квазиассоциативности: $\beta=\delta=0$, $\alpha=\gamma=\frac{1}{2}$. В этих условиях U суперкоммутативна, что противоречит условию. $\square$

Как следствие, можем определить скобку Пуассона на $osp(1,2)$:

$$[e_1,a]=\alpha'a+\beta'b,\quad [e_1,b]=\gamma'a-\alpha'b,\quad [a,a]=-\beta'(1+e_1),$$

$$[b, b] = \gamma'(1 + e_1), \quad [a, b] = \alpha'(1 + e_1),$$

где $\alpha' := \alpha - \gamma$, $\beta' := 2\beta$, $\gamma' = 2\delta$.

3. Случай $P(2)$. Напомним, что $P(2) \cong H(M_{2,2}(F), strp)$ — йорданова супералгебра симметрических элементов простой ассоциативной супералгебры $M_{2,2}(F)$ относительно суперинволюции транспонирования

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{strp} = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ C^t & A^t \end{pmatrix},$$

где $A, B, C, D \in M_2(F)$, а t — транспонирование. Также информация о строении йордановой супералгебры $P(2)$ может быть найдена в доказательстве следующей леммы. Заметим, что $P(2) = trp(2|2)$ в обозначениях [21].

Лемма 10. *Если U — некоммутативная йорданова супералгебра и $U^{(+)} \cong P(2)$, то $U \cong P(2)$.*

Доказательство. Пусть $U^{(+)} \cong P(2)$. Получаем разложение Пирса для U (относительно $e_1 := e_{11} + e_{33}$):

$$U_0 = \langle e_2 := e_{22} + e_{44};\ f := e_{42} \rangle,$$

$$U_1 = \langle a := e_{12} + e_{43},\ b := e_{21} + e_{34};\ c = e_{14} - e_{23},\ d := e_{32} + e_{41} \rangle,$$

$$U_2 = \langle e_1 := e_{11} + e_{33};\ e := e_{31} \rangle.$$

Легко видеть, что $e_1 x = x e_2$, $e_2 x = x e_1$ для любого $x \in U_1$.

Для удобства проверки дальнейших вычислений приведем таблицу умножения в $P(2)$ (отсутствуют нулевые произведения).

Таблица 1

$\bullet$	e_1	e_2	e	f	a	b	c	d
e_1	$2e_1$		$2e$		a	b	c	d
e_2		$2e_2$		$2f$	a	b	c	d
e	$2e$				d		b	
f		$2f$				d	$-a$	
a	a	a	d			$e_1 + e_2$		$2f$
b	b	b		d	$e_1 + e_2$			$2e$
c	c	c	$-b$	a				$e_1 - e_2$
d	d	d			$2f$	$2e$	$e_2 - e_1$	

Для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ имеем $e_1 c = \alpha_1 c + \alpha_2 d$, $e_1 d = \beta_1 c + \beta_2 d$. Тогда

$$P_0(cd) = P_0(c \bullet (\beta_1 c + \beta_2 d)) = -\beta_2 e_2, \quad P_0(dc) = P_0(d \bullet (\alpha_1 c + \alpha_2 d)) = \alpha_1 e_2,$$

$$cd - dc = e_1 - e_2 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_2 = 1.$$

Пусть $P_1(cd) = xa + yb$, $P_1(ac) = x_1 c + y_1 d$. Тогда

$$P_i(a \bullet P_1(cd)) = P_i(a \bullet (xa + yb)) = y P_i(e_1 + e_2),$$

$$P_i(P_1(ac)\bullet d) = P_i((x_1c+y_1d)\bullet d) = x_1P_i(e_1-e_2).$$

Отсюда и из (13) следует $x_1 = y = 0$.

Пусть $P_1(bc) = x_2c + y_2d$. Тогда

$$P_i(b\bullet P_1(cd)) = P_i(b\bullet(xa)) = xP_i(e_1+e_2), \quad P_i((x_2c+y_2d)\bullet d) = x_2P_i(e_1-e_2),$$

и с учетом (13) получаем $x = x_2 = 0$ и $P_1(cd) = P_1(dc) = 0$.

Далее, $P_2(cd) = P_2(e_1c\bullet d) = P_2((\alpha_1c+\alpha_2d)\bullet d) = \alpha_1P_2(e_1-e_2) = \alpha_1e_1$, откуда

$$cd = \alpha_1e_1 + (\alpha_1-1)e_2, \quad dc = (\alpha_1-1)e_1 + \alpha_1e_2.$$

Пусть $e_1a = \bar\alpha_1a + \bar\alpha_2b$, $e_1b = \bar\beta_1a + \bar\beta_2b$. Имеем

$$P_0(ab) = P_0(a\bullet(e_1b)) = \bar\beta_2e_2, \quad P_0(ba) = P_0(b\bullet(e_1a)) = \bar\alpha_1e_2,$$

$$P_0(ab+ba) = e_2 \Rightarrow \bar\alpha_1 + \bar\beta_2 = 1.$$

Пусть $P_1(ab) = x_3a + y_3b$. Тогда

$$0 = P_i(a\bullet P_1(ab)) \Rightarrow y_3 = 0, \quad 0 = P_i(P_1(ab)\bullet b) \Rightarrow x_3 = 0,$$

$$P_2(ab) = P_2((e_1a)\bullet b) = \bar\alpha_1e_1,$$

стало быть,

$$ab = \bar\alpha_1e_1 + (1-\bar\alpha_1)e_2, ba = (1-\bar\alpha_1)e_1 + \bar\alpha_1e_2.$$

Из эластичности получаем

$$-a(ae_1) = -(e_1a)a \Rightarrow a\bullet(ae_1) = 0 \Rightarrow \bar\alpha_2 = 0,$$

$$-b(be_1) = -(e_1b)b \Rightarrow b\bullet(be_1) = 0 \Rightarrow \bar\beta_1 = 0.$$

Ввиду (9) $fa = f\bullet ae_1 = (1-\bar\alpha_1)f\bullet a = 0 = af$.

Пусть $f^2 = xe_2 + yf$ для некоторых $x, y \in F$. Из $(f,f,a) = (a,f,f)$ следует, что $(xe_2+yf)a = -a(xe_2+yf)$ и $x = 0$.

Далее,

$$fb = f\bullet(be_1) = \bar\alpha_1f\bullet b = \bar\alpha_1d, \quad fc = f\bullet(ce_1) = (1-\alpha_1)f\bullet c = -(1-\alpha_1)a,$$

$$fd = f\bullet(de_1) = f\bullet(-\beta_1c + (1-\beta_2)d) = \beta_1a = df.$$

Из $(f,f,b) = (b,f,f)$ вытекает, что

$$yfb - \bar\alpha_1fd = (1-\bar\alpha_1)df - ybf, \quad yd = \beta_1a,$$

откуда $f^2 = 0, \beta_1 = 0$. Из леммы 2 получаем

$$ae = ae_1\bullet e = (1-\bar\alpha_1)a\bullet e = (1-\bar\alpha_1)d, \quad be = be_1\bullet e = 0,$$

$$ce = ce_1\bullet e = -(1-\alpha_1)b, \quad de = de_1\bullet e = 0.$$

Пусть $e^2 = xe + ye_1$ для некоторых $x, y \in F$. Тогда $(e,e,a) = (a,e,e)$ влечет

$$(xe+ye_1)a - \bar\alpha_1ed = (1-\bar\alpha_1)de - a(xe+ye_1), \quad xd + ya = 0 \Rightarrow e^2 = 0.$$

Пусть $P_1(c^2) = \xi_1a + \xi_2b$ для некоторых $\xi_k \in F$. Тогда

$$P_i(a\bullet P_1(c^2)) = \xi_2P_i(e_1+e_2), \quad P_i(P_1(ac)\bullet c) = y_1P_i(d\bullet c) = y_1P_i(e_2-e_1).$$

Тем самым $P_1(ac) = 0$, $P_1(c^2) = \xi_1 a$,

$$P_i(b \bullet P_1(c^2)) = \xi_1 P_i(e_1 + e_2), \quad P_i(P_1(bc) \bullet c) = y_2 P_i(d \bullet c) = -y_2 P_i(e_1 - e_2),$$

поэтому $\xi_1 = y_2 = 0$, $P_1(bc) = 0$, $P_1(c^2) = 0$.

Найдем ac и bc:

$$0 = P_0(ae_1 \bullet c) = P_0(ac) = P_0(a \bullet (e_1 c)) = 2\alpha_2 f, \quad P_2(ac) = P_2((e_1 a) \bullet c) = 0,$$

$$P_0(cb) = P_0(c \bullet (e_1 b)) = 0, \quad P_2(cb) = P_2((e_1 c) \bullet b) = 0.$$

Следовательно, $\alpha_2 = 0$, $ac = ca = 0$, $bc = cb = 0$.

Вычислим c^2:

$$P_0(c^2) = P_0(c \bullet (e_1 c)) = 0, \quad P_2(c^2) = P_2((e_1 c) \bullet c) = 0, \quad c^2 = 0.$$

Пусть $P_1(ad) = x_0 c + y_0 d$, $P_1(d^2) = \xi_1 a + \xi_2 b$, $P_1(bd) = x_1 c + y_1 d$ для некоторых $x_k, y_k, \xi_k \in F$. Тогда

$$0 = P_i(P_1(ad) \bullet c) = P_i((x_0 c + y_0 d) \bullet c) = y_0 P_i(e_2 - e_1) \Rightarrow y_0 = 0,$$

$$P_i(P_1(d^2) \bullet a) = \xi_2 P_i(e_1 + e_2), \quad P_i(d \bullet P_1(da)) = x_0 P_i(e_1 - e_2) \Rightarrow x_0 = \xi_2 = 0,$$

$$P_i(P_1(d^2) \bullet b) = \xi_1 P_i(e_1 + e_2), \quad P_i(d \bullet P_1(db)) = x_1 P_i(e_1 - e_2) \Rightarrow x_1 = \xi_1 = 0,$$

$$P_i(P_1(bd) \bullet c) = y_1 P_i(e_2 - e_1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0.$$

Итак, $P_1(ad) = P_1(d^2) = P_1(bd) = 0$. Окончательно получаем

$$P_0(ad) = P_0(a \bullet (e_1 d)) = 2\beta_2 f, \quad P_2(ad) = P_2((e_1 a) \bullet d) = 0,$$

$$P_0(d^2) = P_0(d \bullet (e_1 d)) = 0, \quad P_2(d^2) = P_2((e_1 d) \bullet d) = 0,$$

$$P_0(bd) = P_0(b \bullet (e_1 d)) = 0, \quad P_2(bd) = P_2((e_1 b) \bullet d) = 2\bar{\beta}_2 e.$$

Таким образом, $ad = 2\beta_2 f$, $d^2 = 0$, $bd = 2\bar{\beta}_2 e$.

Пусть $P_1(a^2) = xa + yb$ для некоторых $x, y \in F$. Тогда

$$0 = P_i(d \bullet P_1(a^2)) = x P_i(2f) + y P_i(2e)$$

дает $P_1(a^2) = 0$,

$$P_0(a^2) = P_0(a \bullet e_1 a) = 0, \ P_2(a^2) = P_2(e_1 a \bullet a) = 0$$

влекут $a^2 = 0$. Аналогично получаем $b^2 = 0$.

Из $(e_1, e_1, e) = -(e, e_1, e_1)$ следует, что $e_1 e = e$. Аналогично $e_2 f = f$.

Равенство $(e_1, f, b) = -(b, f, e_1)$ дает

$$-\bar{\alpha}_1 e_1 d = -(1 - \bar{\alpha}_1) d e_1, \quad \bar{\alpha}_1 \beta_2 d = (1 - \bar{\alpha}_1)\alpha_1 d, \quad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1.$$

В заключение находим

$$(e_1, a, e) = \alpha_1 ae - (1 - \alpha_1) e_1 d = \alpha_1 (1 - \alpha_1) d - (1 - \alpha_1)^2 d,$$

$$-(e, a, e_1) = -\alpha_1 d e_1 + (1 - \alpha_1) ea = -\alpha_1^2 d + \alpha_1 (1 - \alpha_1) d,$$

откуда $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

Имея полную таблицу умножения в U, видим изоморфизм $U \cong P(2)$. $\square$

4. Случай $Q(n)$. Напомним, что ассоциативная супералгебра $Q(n)$ является подсупералгеброй в $M_{n,n}(F)$ со следующей градуировкой:

$$Q(n)_{\bar{0}} = \left\langle \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, A \in M_n(F) \right\rangle, \quad Q(n)_{\bar{1}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}, B \in M_n(F) \right\rangle.$$

Заметим, что $Q(2) = M_2[u]^{(+)}$ в обозначениях [21].

Лемма 11. *Пусть U — некоммутативная йорданова супералгебра такая, что $U^{(+)} \cong Q(2)^{(+)}$. Тогда U является расщепляемой квазиассоциативной супералгеброй.*

Доказательство. Пусть $J = Q(2)^{(+)}$. Выберем следующий базис в J:

$$\{e_1 = e_{11} + e_{33},\ e_2 = e_{22} + e_{44},\ a = e_{12} + e_{34},\ b = e_{21} + e_{43},$$

$$c = e_{13} + e_{31},\ d = e_{14} + e_{32},\ e = e_{23} + e_{41},\ f = e_{24} + e_{42}\}.$$

Для удобства проверки дальнейших вычислений и проверки квазиассоциативности приведем таблицу (ассоциативного) умножения в $Q(2)$.

Таблица 2

$\cdot$	e_1	e_2	a	b	c	d	e	f
e_1	e_1		a		c	d		
e_2		e_2		b			e	f
a		a		e_1			c	d
b	b		e_2		e	f		
c	c		d		e_1	a		
d		d		c			e_1	a
e	e		f		b	e_2		
f		f		e			b	e_2

Относительно e_1 имеем $J_0 = \langle e_2, f\rangle$, $J_2 = \langle e_1, c\rangle$, $J_1 = \langle a, b, d, e\rangle$.

Легко заметить, что $e_1 x = x e_2$ для любого $x \in J_1$.

Поскольку $e_1 d, e_1 e \in \langle d, e\rangle$, можно положить $e_1 d = \alpha_1 d + \alpha_2 e$, $e_1 e = \beta_1 d + \beta_2 e$. Из (11) следует

$$P_0(de) = P_0(d \bullet (\beta_1 d + \beta_2 e)) = \beta_2 P_0(e_1 - e_2) = -\beta_2 e_2,$$

$$P_0(ed) = P_0(e \bullet (\alpha_1 d + \alpha_2 e)) = \alpha_1 P_0(e_2 - e_1) = \alpha_1 e_2,$$

$$P_2(de) = P_2((\alpha_1 d + \alpha_2 e) \bullet e) = \alpha_1 P_2(e_1 - e_2) = \alpha_1 e_1.$$

Так как $P_0(ed - de) = e_2$, то $\alpha_1 + \beta_2 = 1$. Положим $P_1(de) = xa + yb$, $P_1(ad) = z_1 d + z_2 e$ для некоторых $x, y, z_k \in F$. Тогда $P_i(a \bullet (xa + yb)) = P_i((z_1 d + z_2 e) \bullet e)$ при $i = 0, 2$, $yP_i(e_1 + e_2) = z_1 P_i(e_1 - e_2)$ и $y = z_1 = 0$.

Аналогично если $P_1(bd) = \xi_1 d + \xi_2 e$, то $P_i(b \bullet (xa + yb)) = P_i((\xi_1 d + \xi_2 e) \bullet e)$ при $i = 0, 2$ и $x = \xi_1 = 0$. Следовательно, $P_1(de) = 0$, $P_1(ad), P_1(bd) \in \langle e\rangle$. Положим $\alpha := \alpha_1$. Тогда $de = \alpha e_1 + (\alpha - 1)e_2$, $ed = (\alpha - 1)e_1 + \alpha e_2$.

Определим действие e_1 на $\{a, b\}$. Так как $e_1 a, e_1 b \in \langle a, b\rangle$, то $e_1 a = \bar\alpha_1 a + \bar\alpha_2 b$, $e_1 b = \bar\beta_1 a + \bar\beta_2 b$ для некоторых $\bar\alpha_k, \bar\beta_k \in F$. Из (11) получаем $P_0(ab) = \bar\beta_2 e_2$, $P_0(ba) = \bar\alpha_1 e_2$ и $\bar\alpha_1 + \bar\beta_2 = 1$, $P_2(ab) = \bar\alpha_1 e_1$. Поскольку $P_1(ab) \in \langle a, b\rangle$, то $P_i(d \bullet P_1(ab)) = P_i(P_1(da) \bullet b)$ дает $P_1(ab) \in \langle a\rangle$. Равенство $P_i(e \bullet P_1(ab)) = 0$ влечет $P_1(ab) = 0$. Тогда $ab = \bar\alpha_1 e_1 + (1 - \bar\alpha_1)e_2$, $ba = (1 - \bar\alpha_1)e_1 + \bar\alpha_1 e_2$. Равенство $(z, z, e_i) = -(e_i, z, z)$ при $z \in \{a, b\}$ дает $z \bullet (e_i z) = 0$, откуда $\bar\alpha_2 = 0, \bar\beta_1 = 0$.

Следовательно, e_1 и e_2 действуют диагонально в базисе $\{a,b\}$: $e_1a=\bar{\alpha}_1 a$, $e_1b=(1-\bar{\alpha}_1)b$.

Ввиду (9)

$$af=\bar{\alpha}_1 d,\quad bf=(1-\bar{\alpha}_1)e,\quad df=\alpha a-\alpha_2 b,\quad ef=\beta_1 a+(\alpha-1)b,$$

$$ac=(1-\bar{\alpha}_1)d,\quad bc=\bar{\alpha}_1 e,\quad dc=(\alpha-1)a-\alpha_2 b,\quad ec=\beta_1 a+\alpha b.$$

Так как $c^2\in\langle e_1\rangle$, из $(c,c,a)=(a,c,c)$ следует $\alpha_2=0$ и $c^2=(\bar{\alpha}_1-\beta_2)e_1$. Аналогично из $(f,f,a)=(a,f,f)$ получаем $f^2=(\bar{\alpha}_1-\beta_2)e_2$.

Предположим, что $P_1(d^2)=x_1a+y_1b$ для некоторых $x_1,y_1\in F$. Тогда $P_i(a\bullet(x_1a+y_1b))=P_i(z_2e\bullet d)$ при $i=0,2$, $y_1P_i(e_1+e_2)=-z_2P_i(e_1-e_2)$, и $y_1=z_2=0$.

Аналогично $P_i(b\bullet(x_1a+y_1b))=P_i(\xi_2e\bullet d)$ при $i=0,2$ и $x_1=\xi_2=0$. Таким образом, $P_1(d^2)=0$, $P_1(bd)=0$, $P_1(ad)=P_1(da)=0$.

Из (11) находим $P_0(d^2)=P_2(d^2)=0$ и $d^2=0$.

Аналогично $P_1(e^2)=0=P_1(ae)$, $P_1(be)\in\langle e\rangle$:

$$P_1(ea)=\tau_1d+\tau_2e\Rightarrow P_i(d\bullet(\tau_1d+\tau_2e))=0\Rightarrow\tau_2=0,$$

$$P_1(e^2)=\tau_3a+\tau_4b\Rightarrow P_i(a\bullet(\tau_3a+\tau_4b))=P_i(e\bullet\tau_1d)\Rightarrow\tau_4=\tau_1=0,$$

$$P_1(eb)=\tau_5d+\tau_6e\Rightarrow P_i((\tau_3a+\tau_4b)\bullet b)=P_i(e\bullet\tau_5d)\Rightarrow\tau_3=\tau_5=0.$$

Из (11) выводим $P_0(e^2)=P_0(e\bullet(e_1e))=\beta_1e_2$, $P_2(e^2)=P_2((e_1e)\bullet e)=\beta_1e_1$, а $\beta_1=0$ — из $(c,c,e)=(e,c,c)$. Таким образом, e_1 и e_2 действуют диагонально в базисе $\{e,d\}$: $e_1d=\alpha d$, $e_1e=(1-\alpha)e$.

Определим оставшиеся произведения в U. По (11) $P_0(ea)=P_0(e\bullet e_1a)=\bar{\alpha}_1P_0(c+f)=\bar{\alpha}_1f$. Поскольку $P_2(ea)=(1-\alpha)c$, получаем

$$ea=\bar{\alpha}_1f+(1-\alpha)c,\quad ae=\alpha c+(1-\bar{\alpha}_1)f.$$

Снова применяя (11), выводим $P_0(ad)=P_2(ad)=0$ и $ad=da=0$. Как известно, $P_1(bd)=0$. Ввиду (11) $P_0(bd)=\alpha f$, $P_2(bd)=(1-\bar{\alpha}_1)c$ и

$$bd=(1-\bar{\alpha}_1)c+\alpha f,\quad db=\bar{\alpha}_1c+(1-\alpha)f.$$

Далее, имеем $P_0(eb)=0, P_2(eb)=0$. Так как $P_1(eb)\in\langle e\rangle$ и $P_i(P_1(eb)\bullet a)=P_i(e\bullet P_1(ba))=0$, то $P_1(eb)=0$ и $eb=be=0$.

Из $(e,e,a)=(a,e,e)$ выводим $\bar{\alpha}_1=\alpha$. С учетом (7), (8) и леммы 2 теперь у нас есть таблица умножения в U и легко видеть, что $U\cong Q(2)^{(\alpha)}$. $\square$

5. Случай $J(\Gamma_n)$. Напомним определение *йордановой супералгебры* $J(\Gamma_n)$ *скобок Пуассона — Грассмана.* Пусть Γ — супералгебра Грассмана от порождающих $1,x_i,i\in\mathscr{I}$, где допускается равенство $\mathscr{I}=\varnothing$, а Γ_n — супералгебра Грассмана от порождающих $1,x_1,\dots,x_n$.

Определим на Γ новую операцию (скобок Пуассона — Грассмана) $\{\,,\}$, полагая для f, $g\in\Gamma_{\bar{0}}\cup\Gamma_{\bar{1}}$

$$\{f,g\}=(-1)^f\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n})=\begin{cases}(-1)^{k-1}x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{k-1}}x_{i_{k+1}}\dots x_{i_n}, & \text{если } j=i_k,\\ 0, & \text{если } j\notin\{i_1,i_2,\dots,i_n\}.\end{cases}$$

Пусть $\overline{\Gamma}$ — изоморфная копия Γ с отображением изоморфизма $x \mapsto \bar{x}$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств $J(\Gamma) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ и определим на ней структуру йордановой супералгебры, полагая $J(\Gamma)_{\bar{0}} = \Gamma_{\bar{0}} + \overline{\Gamma}_{\bar{1}}$, $J(\Gamma)_{\bar{1}} = \Gamma_{\bar{1}} + \overline{\Gamma}_{\bar{0}}$ с умножением $\cdot$, заданным правилом

$$a \cdot b = ab, \quad \bar{a} \cdot b = (-1)^b \overline{ab}, \quad a \cdot \bar{b} = \overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = (-1)^b \{a, b\},$$

где $a, b \in \Gamma_{\bar{0}} \cup \Gamma_{\bar{1}}$ и ab — их произведение в Γ. Обозначим через $J(\Gamma_n)$ подсупералгебру $\Gamma_n + \overline{\Gamma}_n$ в $J(\Gamma)$. Если $n > 1$, то $J(\Gamma_n)$ — простая йорданова супералгебра.

Заметим, что четная часть $J(\Gamma_n)_{\bar{0}}$ содержит подалгебру $alg\langle 1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$, изоморфную йордановой супералгебре билинейной суперформы.

По лемме 5 суперкоммутатор $[\,,]$ является *скобкой Пуассона* на некоммутативной йордановой супералгебре U, для которой U^+ изоморфна $J(\Gamma_n)$.

Пусть $A \in (\Gamma_n)_{\bar{0}}$. Определим суперантикоммутативную бинарную билинейную операцию $\{\,,\}$ на $J(\Gamma_n)$ правилом

$$\{\bar{a}, \bar{b}\} = (-1)^b abA, \tag{16}$$

где слова a и b могут быть единичными, здесь и далее при определении суперантикоммутативной операции отсутствующие произведения либо равны нулю, либо получаются по суперантикоммутативности.

Теорема 3. *Операция $\{\,,\}$, заданная равенством* (16), *является скобкой Пуассона на $J(\Gamma_n)$.*

Доказательство. Докажем, что для любых $a, b, c \in J(\Gamma_n)$ справедливо равенство $\{a \cdot b, c\} = (-1)^{bc}\{a, c\} \cdot b + a \cdot \{b, c\}$. Заметим, что достаточно рассмотреть только случаи, когда $c \in \overline{\Gamma}$. В итоге имеем два случая.

1. Случай $a, b, c \in \overline{\Gamma}_n$. Пусть $a = \bar{x}$, $b = \bar{y}$, $c = \bar{z}$. Тогда

$$0 = \{\bar{x} \cdot \bar{y}, \bar{z}\} = (-1)^{\bar{y}\bar{z}}\{\bar{x}, \bar{z}\} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \{\bar{y}, \bar{z}\} = (-1)^{\bar{y}\bar{z}+z} xzA \cdot \bar{y} + (-1)^z \bar{x} \cdot yzA = 0.$$

2. Случай $a, c \in \overline{\Gamma}_n$, $b \in \Gamma_n$. Пусть $a = \bar{x}, b = y, c = \bar{z}$. Тогда

$$(-1)^{y+z} xyzA = (-1)^y \{\bar{xy}, \bar{z}\} = \{\bar{x} \cdot \bar{y}, \bar{z}\} = (-1)^{y\bar{z}}\{\bar{x}, \bar{z}\} \cdot y + \bar{x} \cdot \{y, \bar{z}\} = (-1)^{y\bar{z}+z} xzyA.$$

Таким образом, все случаи подтверждают требуемое равенство, и тем самым теорема доказана. $\square$

Введем следующие обозначения: для $a = (a) + (\bar{a}) \in J(\Gamma_n)$, $(a) \in \Gamma_n$, $(\bar{a}) \in \overline{\Gamma}_n$ будем писать $x_i \ll (a)$ (соответственно $(\bar{a})$), если x_i входит в каждое несократимое слагаемое b из (a) (из $(\bar{a})$), т. е. $x_i \cdot b = 0$, символ $x_i \not\ll (a)$ (соответственно $(\bar{a})$) будет означать, что x_i не входит ни в какое несократимое слагаемое b из (a) (из $(\bar{a})$), т. е. $x_i \cdot b \neq 0$.

Теорема 4. *Суперантикоммутивные скобки Пуассона на $J(\Gamma_n)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами из $(\Gamma_n)_{\bar{0}}$. Элемент $A \in (\Gamma_n)_{\bar{0}}$ находится в соответствии со скобкой $\{\,,\}$ такой, что $\{\bar{1}, \bar{1}\} = A$.*

Доказательство. Пусть $d_{ij} := \{\bar{x}_i, \bar{x}_j\}$ и $e_i := \{\bar{1}, \bar{x}_i\}$. Тогда

$$0 = \{\bar{x}_i \cdot \bar{1}, \bar{x}_i\} = \bar{x}_i \cdot e_i. \tag{17}$$

Ввиду (17) $x_i \ll (e_i)$ и $x_i \not\ll (\overline{e_i})$. Далее, $0 = \{\bar{x}_i \cdot \bar{1}, \bar{x}_j\} = d_{ij} \cdot \bar{1} + \bar{x}_i \cdot e_j$, откуда $(\overline{e_j}) \in \langle \bar{1} \rangle$.

Пусть $b_{ij} := \{\bar{x}_i, x_j\}$. Из $0 = \{\bar{x}_i \cdot \bar{x}_i, x_j\} = 2\bar{x}_i \cdot b_{ij}$ получаем $x_i \ll (b_{ij})$ и $x_i \not\ll (\overline{b_{ij}})$. Из равенств

$$b_{ij} = \{\bar{x}_i, x_j\} = -\{\bar{x}_i, \bar{x}_i \cdot \overline{x_i x_j}\} = \bar{x}_i \cdot \{\bar{x}_i, \bar{x}_i \cdot x_j\} = \bar{x}_i \cdot (\bar{x}_i \cdot b_{ij})$$

выводим $x_i \not\ll (b_{ij})$ и $x_i \ll (\overline{b_{ij}})$. Следовательно, $b_{ij} = 0$. Тогда

$$d_{ij} = \{x_i \cdot \bar{1}, \bar{x}_j\} = -b_{ji} \cdot \bar{1} + x_i \cdot e_j = x_i \cdot e_j,$$

откуда $(\overline{d_{ij}}) = 0$ и $(\overline{e_j}) = 0$, так как $d_{ij} = -d_{ji}$.

Также имеем

$$b_{ii} = \{\bar{x}_i, x_i\} = -\{\bar{x}_i, \bar{x}_j \cdot \overline{x_j x}_i\} = -d_{ij} \cdot \overline{x_j x}_i - \bar{x}_j \cdot \{\bar{x}_i, x_j \cdot \bar{x}_i\} = -\bar{x}_j \cdot (b_{ij} \cdot \bar{x}_i) = 0.$$

Пусть $a_{ij} := \{x_i, x_j\}$. Тогда $a_{ij} = \{\overline{x_i x}_j \cdot \bar{x}_j, x_j\} = \{\overline{x_i x}_j, x_j\} \cdot \bar{x}_j = (a_{ij} \cdot \bar{x}_j) \cdot \bar{x}_j$. Следовательно, $x_j \not\ll (a_{ij})$ и $x_j \ll (\overline{a_{ij}})$. Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то $x_i, x_j \not\ll (a_{ij})$ и $x_i, x_j \ll (\overline{a_{ij}})$. С другой стороны,

$$a_{ij} = -\{x_i, \overline{x_k x}_j \cdot \bar{x}_k\} = \{x_i, \bar{x}_k \cdot x_j\} \cdot \bar{x}_k = (\bar{x}_k \cdot a_{ij}) \cdot \bar{x}_k,$$

поэтому $x_k \not\ll (a_{ij})$ и $x_k \ll (\overline{a_{ij}})$. Заметим также, что $0 = \{x_i \cdot \bar{x}_i, x_j\} = a_{ij} \cdot \bar{x}_i$, стало быть, (a_{ij}) не содержит ненулевого скалярного слагаемого, а $(\overline{a_{ij}})$ не содержит слагаемого вида $\overline{x_1 \dots x}_n$. Следовательно, $a_{ij} = 0$. Как и ранее, все верно и при $n = 2$. Окончательно

$$a_{ii} = \{x_i, \overline{x_i x}_j \cdot \bar{x}_j\} = -\{x_i, \bar{x}_i \cdot x_j\} \cdot \bar{x}_j = -(\bar{x}_i \cdot a_{ij}) \cdot \bar{x}_j = 0.$$

Пусть $f_j := \{x_j, \bar{1}\}$. Тогда

$$f_j = \{\bar{x}_i \cdot \overline{x_j x}_i, \bar{1}\} = -\{\bar{x}_i, \bar{1}\} \cdot \overline{x_j x}_i + \bar{x}_i \cdot \{\overline{x_j x}_i, \bar{1}\}$$
$$= e_i \cdot \overline{x_j x}_i + \bar{x}_i \cdot (f_j \cdot \bar{x}_i + x_j \cdot \{\bar{x}_i, \bar{1}\}) = \bar{x}_i \cdot (f_j \cdot \bar{x}_i),$$

откуда $x_i \not\ll (f_j)$ и $x_i \ll (\overline{f_j})$, т. е. $(f_j) \in \langle 1 \rangle$, и теперь $0 = \{x_j, \bar{x}_i \cdot \bar{1}\} = \bar{x}_i \cdot \{x_j, \bar{1}\} = \bar{x}_i \cdot f_j$ влечет $f_j = 0$.

Пусть $A = \{\bar{1}, \bar{1}\}$. Тогда из равенств

$$e_i = \{\bar{1}, \bar{x}_i\} = -\{\bar{1}, \bar{1} \cdot x_i\} = -A \cdot x_i, \quad 0 = \{\bar{x}_i \cdot \bar{1}, \bar{1}\} = e_i \cdot \bar{1} + \bar{x}_i \cdot A$$

следует соответственно, что $x_i \ll \overline{A}$ и $x_i \not\ll \overline{A}$, т. е. $\overline{A} = 0$.

По теореме 3, задав произвольный $A \in (\Gamma_n)_{\bar{0}}$ и определив суперантикоммутативную скобку $\{\,,\}$ на $J(\Gamma_n)$ правилом

$$\{\bar{1}, \bar{1}\} = A, \quad \{\bar{1}, \bar{x}_i\} = -Ax_i, \quad \{\bar{x}_i, \bar{x}_j\} = (Ax_j)x_i,$$

а на остальных порождающих — нулевым образом, получаем единственное продолжение этой скобки до скобки Пуассона на $J(\Gamma_n)$. Как легко видеть, при этом $\{\bar{a}, \bar{b}\} = (-1)^b abA$. Таким образом, любая скобка Пуассона на $J(\Gamma_n)$ получается описанным выше способом. $\square$

На векторном пространстве супералгебры $J(\Gamma_n)$ определим бинарную операцию:

$$ab = a \cdot b + [a, b],$$

где $\cdot$ — умножение в $J(\Gamma_n)$, а $\{\,,\}$ — скобка Пуассона на $J(\Gamma_n)$, соответствующая A. Полученную супералгебру обозначим через $J(\Gamma_n, A)$.

Как следствие из теоремы 4 получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть U — некоммутативная йорданова супералгебра такая, что $U^{(+)} \cong J(\Gamma_n)$. Тогда $U \cong J(\Gamma_n, A)$.*

§ 3. Простые некоммутативные йордановы супералгебры степени 1

Осталось рассмотреть случай, когда U — простая некоммутативная йорданова супералгебра такая, что $U^{(+)} \cong \Gamma_n$. По лемме 7 достаточно описать скобки Пуассона на Γ_n, а для этого достаточно задать $[x_i, x_j] := a_{ij} \in (\Gamma_n)_{\bar{0}}$. Набор $a_{1j}, \dots, a_{nj}$ определяет некоторое дифференцирование D_j супералгебры Γ_n. Согласно лемме 6 Γ_n должна быть дифференциально проста относительно $D_1, \dots, D_n$. Таким образом, достаточно определить симметрические матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n((\Gamma_n)_{\bar{0}})$ с вышеуказанным свойством дифференциальной простоты.

Если имеем набор дифференцирований $D_1, \dots, D_n$, относительно которого Γ_n дифференциально проста, то из результатов работы [22] следует, что можно построить дифференцирование D супералгебры Γ_n такое, что Γ_n D-проста. Любое дифференцирование в Γ_n имеет вид $D = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \partial_i$, где $d_i \in \Gamma_n$. Пусть $f_0 := x_1 \dots x_n \in \Gamma_n$. Заметим, что если $f_0 d_i = 0$ для любого i, то $D(f_0) \in \langle f_0 \rangle$, и потому $\langle f_0 \rangle$ является D-идеалом в Γ_n. Следовательно, необходимым условием D-простоты Γ_n является обратимость одного из d_i. Отметим, что остальные d_j, $j \neq i$, могут быть как обратимыми, так и необратимыми элементами из Γ_n: соответствующие примеры дают дифференцирования $D_1 = \partial_1 + x_1\partial_2 + (x_1 + x_3)\partial_3$ и $D_2 = \partial_1 + (1 + x_3)\partial_2 + (1 + x_1)\partial_3$ в Γ_3 (легко видеть, что Γ_3 является как D_1-простой, так и D_2-простой).

Если задано дифференцирование D супералгебры Γ_n, то следующий алгоритм позволяет эффективно ответить на вопрос о D-простоте Γ_n.

Пусть $g = \sum \alpha_i g_i \in \Gamma_n$ — разложение g по стандартному базису Γ_n. Рассмотрим deg-lex *порядок* на стандартном базисе Γ_n: полагаем $x_{i_1} \dots x_{i_k} > x_{j_1} \dots x_{j_s}$, если либо $k > s$, либо $k = s$ и $i_1 > j_1$, либо $k = s$ и существует $t = 1, \dots, n-1$ такое, что $i_r = j_r$ при $r = 1, \dots, t$, но $i_{t+1} > j_{t+1}$. Назовем *старшим словом* элемента g такое слагаемое $\bar{g} := \alpha_m g_m$, что $g_m > g_i$ для любого $i \neq m$.

Возьмем f_0, как выше. Предположим, что построены $f_0, \dots, f_{k-1} \in \Gamma_n$ такие, что $\bar{f}_i \notin \langle \bar{f}_j \rangle$ при $i \neq j$. Выберем $\alpha_i^j \in F$ такие, что $\bar{f}_k \notin \langle \bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{k-1} \rangle$, где $f_k := D(f_{k-1}) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i^k f_i$ (если $f_k = 0$ или f_k обратим, то процесс построения заканчиваем, в силу конечности числа старших слов обязательно получим один из этих случаев).

Легко видеть, что если f_k обратим, то Γ_n D-проста, а если $f_k = 0$, то $I = \mathrm{ideal}\langle f_0, \dots, f_{k-1} \rangle$ — собственный D-идеал в Γ_n. Действительно, если $a \in I$, то $a = \sum\limits_{i=0}^{k-1} f_i a_i$, но тогда

$$D(a) \overset{I}{\equiv} \sum_{i=0}^{k-1} D(f_i) a_i \overset{I}{\equiv} \sum_{i=0}^{k-2} f_{i+1} a_i \overset{I}{\equiv} 0.$$

Супералгебра $\Gamma_n(\mathscr{D})$. Определим простую некоммутативную йорданову супералгебру $\Gamma_n(\mathscr{D})$. Пусть $\mathscr{D} = \{d_i : i = 1, \dots, n\}$ — множество супердифференцирований Γ_n таких, что Γ_n дифференциально проста относительно $\mathscr{D}$. Определим скобку Пуассона на Γ_n правилом $[x_i, x_j] = d_j(x_i)$.

На пространстве Γ_n определим новую операцию правилом $ab = a \cdot b + [a, b]$. Полученную супералгебру обозначим через $\Gamma_n(\mathscr{D})$.

Теорема 6. *Пусть U — некоммутативная йорданова супералгебра такая, что $U^{(+)} \cong \Gamma_n$. Тогда $U \cong \Gamma_n(\mathscr{D})$.*

Пример. Матрицы

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяют простые некоммутативные йордановы супералгебры. Получаемые при этом супералгебры J_1 и J_2 не изоморфны: если $\phi : J_1 \mapsto J_2$ — изоморфизм, то $\phi : \Gamma_3 \mapsto \Gamma_3$ — автоморфизм супералгебры Грассмана, и тогда $\phi(x_i) = \alpha_i x_i + \beta_i(x_1x_2x_3)$, $\phi([x_3, x_3]) = [\phi(x_3), \phi(x_3)] = [\alpha_3 x_3 + \beta_3(x_1x_2x_3), \alpha_3 x_3 + \beta_3(x_1x_2x_3)] = \alpha_3^2 1$, а с другой стороны $\phi([x_3, x_3]) = \phi(x_1x_2) = (\alpha_1 x_1 + \dots)(\alpha_2 x_2 + \dots) = \alpha_1\alpha_2 x_1 x_2$.

Отметим, что скобка $[\,,]$ на супералгебре J_1 не лиева:

$$[[x_1, x_3], x_3] + [[x_3, x_1], x_3] + [[x_3, x_3], x_1] = [[x_3, x_3], x_1] = [x_1x_2, x_1] = -x_2 \neq 0.$$

Как легко видеть, необходимые и достаточные условия (супер)лиевости скобки суть

$$[[x_i, x_j], x_k] + [[x_k, x_i], x_j] + [[x_j, x_k], x_i] = 0,$$

что эквивалентно $[a_{ij}, x_k] + [a_{ki}, x_j] + [a_{jk}, x_i] = 0$. Следовательно, если все a_{ij} принадлежат F, то скобка лиева. Однако обратное неверно: условия $a_{11} = a$, где $\partial_1(a) = 0$, $a_{ij} = 0$ при всех $(i, j) \neq (1, 1)$, также дают лиеву скобку.

Заметим, что при условии $\mathscr{D}$-простоты Γ_n и суперлиевости скобок скобки на Γ_n с точностью до изоморфизма описываются однозначно единичной матрицей, что следует из описания простых конечномерных йордановых супералгебр характеристики 0 [11, 12].

§ 4. Основная теорема

Как следствие теоремы 2 и вышедоказанных теорем и лемм получаем основной результат данной статьи.

Теорема 7. *Пусть U — конечномерная центральная простая некоммутативная йорданова супералгебра над полем F характеристики 0, не квазиассоциативная и не суперкоммутативная. Тогда либо выполняется одно из следующих условий:*

(i) $U \cong K_3(\alpha, \beta, \gamma)$,

(ii) $U \cong M_{1,1}(F)(\alpha, \beta), osp(1, 2)^q, J(\Gamma_n, A), \Gamma_n(\mathscr{D})$,

либо существует расширение P поля F степени 1 или 2 такое, что $U \otimes_F P$ изоморфна как супералгебра над P одной из следующих:

(iii) $D_t(\alpha)$,

(iv) $U(V, f, \star)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пожидаев А. П., Шестаков И. П.* Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n > 2$ // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 1. С. 26–59.
2. *Schafer R. D.* Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0 // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. V. 6. P. 472–475.
3. *Oehmke R. H.* On flexible algebras // Ann. of Math., Second Ser. 1958. V. 68, N 2. P. 221–230.
4. *McCrimmon K.* Structure and representations of noncommutative Jordan algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 121. P. 187–199.

5. *McCrimmon K.* Noncommutative Jordan rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 158, N 1. P. 1–33.

6. *Smith K. C.* Noncommutative Jordan algebras of capacity two // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 158, N 1. P. 151–159.

7. *Kokoris L. A.* Nodal non-commutative Jordan algebras // Canad. J. Math. 1960. V. 12. P. 488–492.

8. *Kokoris L. A.* Simple nodal noncommutative Jordan algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9, N 4. P. 652–654.

9. *Шестаков И. П.* О некоторых классах некоммутативных йордановых колец // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 4. С. 407–448.

10. *Скосырский В. Г.* Строго первичные некоммутативные йордановы алгебры // Исследования по теории колец и алгебр / Тр. Ин-та математики. 1989. Т. 16. С. 131–163.

11. *Kac V.* Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1977. V. 13, N 5. P. 1375–1400.

12. *Кантор И. Л.* Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона // Алгебра и анализ. Томск: Изд-во ТГУ, 1989. С. 55–80.

13. *Kaplansky I.* Superalgebras // Pacific J. Math. 1980. V. 80. P. 93–98.

14. *Racine M., Zelmanov E.* Simple Jordan superalgebras with semisimple even part // J. Algebra. 2003. V. 270, N 2. P. 374–444.

15. *Martinez C., Zelmanov E.* Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. 2001. V. 236, N 2. P. 575–629.

16. *Zelmanov E.* Semisimple finite dimensional Jordan superalgebras // Lie algebras, rings and related topics. Papers of the 2nd Tainan–Moscow international algebra workshop'97, Tainan, Taiwan, January 11–17, 1997. Hong Kong: Springer-Verl., 2000. P. 227–243.

17. *Филиппов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П.* Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Днестровская тетрадь. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1993.

18. *Sabinin L. V., Sbitneva L., Shestakov I.* Non-associative algebra and its applications // Proc. 5th Intern. Conf., Oaxtep, Mexico, July 27–August 2, 2003. P. 516. (Lect. Notes Pure Appl. Math.; V. 246).

19. *Albert A. A.* Power-associative rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 64. P. 552–593.

20. *Дедков А. И.* Некоторые свойства квазиассоциативных и квазиальтернативных алгебр // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 3. С. 169–174.

21. *Шестаков И. П.* Альтернативные и йордановы супералгебры // Алгебра, геометрия, анализ и математическая физика: 10-я Сибирская школа. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997. С. 157–169.

22. *Cheng S-J.* Differentiably simple Lie superalgebras and representations of semisimple Lie superalgebras // J. Algebra. 1995. V. 173, N 1. P. 1–43.

Статья поступила 14 февраля 2012 г.

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru

Шестаков Иван Павлович
Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 66281, São Paulo, Basil, 05311-970;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
shestak@ime.usp.br