Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 517.983+517.968.25

КОМПАКТНЫЕ ПО МЕРЕ, ПОЧТИ КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В L_p

В. Б. Коротков

Аннотация. Изучаются компактные по мере и почти компактные операторы в L_p. Строится пример оператора, компактного по мере, но не почти компактного. Вводятся два класса линейных замкнутых операторов в L_p и доказывается, что резольвенты операторов из этих классов являются почти компактными или компактными по мере. Приводятся методы сведения линейных функциональных уравнений 2-го рода в L_p с почти компактными или компактными по мере операторами к эквивалентным линейным интегральным уравнениям в L_p с квазивырожденными карлемановскими ядрами.

Ключевые слова: почти компактный оператор, компактный но мере оператор, интегральный оператор, карлемановский интегральный оператор, линейное функциональное уравнение 2-го рода в L_p, линейное интегральное уравнение в L_p.

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной мерой μ, $L_0 = L_0(X, \mu)$ — пространство всех определенных на X μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций (с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве меры 0), $L_p = L_p(X, \mu)$ — пространство всех функций f из L_0, имеющих конечную норму

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(t)|^p \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение 1. Линейный оператор $T : L_p \to L_0$ назовем *почти компактным* (по Л. Вайсу [1]), если существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся множества с конечными мерами такое, что $P_{X_n}T : L_p \to L_p$ — компактный оператор для любого $n = 1, 2, \dots$; здесь $P_{X_n} f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p$, χ_{X_n} — характеристическая функция множества X_n. Линейный оператор $T : L_p \to L_0$ называется *компактным по мере* [2], если $P_{X_n}T$ для любого $n = 1, 2, \dots$ отображает единичный шар L_p в множество, компактное в смысле сходимости по мере (компактное по мере).

Не каждый компактный по мере оператор почти компактен, как показывает следующий

Пример. Пусть $2 < p < \infty$, $X = (0, 1)$, μ — мера Лебега, $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера, $\{\chi_n\}$ — ортонормированная система Хаара. Определим оператор $T_0 : L_p \to L_2$ равенством

$$T_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \|\chi_n\|_p^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 f r_n \, dt \right) \chi_n.$$

Тогда T_0 — компактный по мере оператор, но для любого множества $e \subset (0,1)$ положительной меры найдется последовательность $n_j \to \infty$ такая, что

$$\lim_{n_j \to \infty} \|P_e T_0 r_{n_j}\|_p = \infty,$$

поэтому $P_e T_0$ не компактен как оператор из L_p в L_p.

Доказательство. Так как $\|\chi_n\|_p^{-\frac{1}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$, то T_0 компактен как оператор, действующий из L_2 в L_2, и, следовательно, компактен по мере как оператор из L_p в L_0.

Покажем справедливость второго утверждения. Пусть $e \subset (0,1)$ — произвольное замкнутое множество положительной меры. Рассмотрим его дополнение $Ce = (0,1) \setminus e$. Множество Ce открыто и поэтому является объединением конечного или счетного семейства $\{\sigma_j\}$ попарно не пересекающихся интервалов. Обозначим через Δ_n^+ (Δ_n^-) максимальный интервал, на котором функция Хаара χ_n положительна (отрицательна). Положим $\Delta_n = \Delta_n^+ \cup \Delta_n^- \cup \{t_n\}$, где t_n — правый конец интервала Δ_n^+. Тогда Δ_n — интервал, называемый двоичным [3, с. 69]. Если Ce есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся интервалов, то в e содержится некоторый интервал Δ, поэтому существует возрастающая к ∞ последовательность индексов $\{n,1\}$ такая, что двоичные интервалы $\Delta_{n,1}$ содержатся в Δ. Имеем при $n,1 \to \infty$

$$\|P_e T_0 r_{n,1}\|_p = \|\chi_{n,1}\|_p^{-\frac{1}{2}} \|P_e \chi_{n,1}\|_p \geq \|\chi_{n,1}\|_p^{-\frac{1}{2}} \|P_{\Delta_{n,1}} \chi_{n,1}\|_p = \|\chi_{n,1}\|_p^{\frac{1}{2}} \to \infty.$$

Пусть Ce — объединение счетного множества попарно не пересекающихся интервалов σ_j, $j = 1, 2, \ldots$. Выберем номер M так, чтобы

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} \mu\sigma_j < \frac{1}{2}\mu e,$$

и рассмотрим последовательность $\{\Delta_{n,2}\}$ всех двоичных интервалов, не содержащихся в $\bigcup_{j=1}^{M} \sigma_j$. Покажем, что из $\{\Delta_{n,2}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\Delta_{n_m}\}$ так, чтобы $n_m \to \infty$ при $m \to \infty$ и для всех $m = 1, 2, \ldots$

$$\mu(Ce \cap \Delta_{n_m}) = \mu\left(\left(\bigcup_{j=M+1}^{\infty} \sigma_j\right) \cap \Delta_{n_m}\right) \leq \mu(e \cap \Delta_{n_m}). \tag{1}$$

Предположим противное. Тогда для всех двоичных интервалов $\Delta_{n,2}$, за исключением конечного числа двоичных интервалов, выполняется противоположное неравенство

$$\mu(Ce \cap \Delta_{n,2}) = \mu\left(\left(\bigcup_{j=M+1}^{\infty} \sigma_j\right) \cap \Delta_{n,2}\right) > \mu(e \cap \Delta_{n,2}). \tag{2}$$

Пусть $k = 0, 1, 2, \ldots$. Двоичные интервалы $\Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $i = 1, \ldots, 2^k$, называются *интервалами k-й пачки* [3, с. 70]. Интервалы каждой k-й пачки попарно не пересекаются, и их объединение вместе с внутренними концевыми точками совпадает с $(0,1)$. Пусть $\Delta_{k_1}^{i_1}, \ldots, \Delta_{k_m}^{i_m}$ — все интервалы, для которых не выполняется неравенство (2), и пусть $l = \max(k_1, \ldots, k_m)$. Тогда для всех интервалов

Δ_r^i, $r = l+1, l+2, \dots$, не принадлежащих $\tilde{\sigma} = \bigcup\limits_{j=1}^{M} \sigma_j$, выполняется неравенство (2). Выберем достаточно большой номер $s > l$ так, чтобы

$$\sum_i{}' \mu\big(e \cap \Delta_s^i\big) > \frac{2}{3}\mu e,$$

где сумма $\sum\limits_i{}'$ берется по всем индексам i, для которых интервал Δ_s^i не принадлежит $\tilde{\sigma}$. Пусть $\sigma = \bigcup\limits_{j=M+1}^{\infty} \sigma_j$. Тогда в силу выбора M и неравенства (2)

$$\frac{1}{2}\mu e > \mu\sigma \geq \sum_i{}' \mu\big(\sigma \cap \Delta_s^i\big) > \sum_i{}' \mu\big(e \cap \Delta_s^i\big) > \frac{2}{3}\mu e.$$

Полученное противоречие показывает, что существует последовательность двоичных интервалов $\{\Delta_{n_m}\}$ такая, что для всех $m = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство (1), при этом $n_m \to \infty$ при $m \to \infty$.

Положим $h_m = \|\chi_{n_m}\|_p^{-\frac{1}{2}}\chi_{n_m}$. Так как функция $|h_m|$ эквивалентна постоянной на Δ_{n_m}, в силу (1) для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}} = \int\limits_{\Delta_{n_m}} |h_m|^p\,dt = \int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}} |h_m|^p\,dt + \int\limits_{Ce\cap\Delta_{n_m}} |h_m|^p\,dt \leq 2\int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}} |h_m|^p\,dt.$$

Следовательно, для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}} |h_m|^p\,dt \geq \frac{1}{2}\|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}},$$

поэтому при $m \to \infty$

$$\|P_eT_0r_{n_m}\|_p^p = \big\|P_e\chi_{n_m}\|\chi_{n_m}\|_p^{-\frac{1}{2}}\big\|_p^p = \int\limits_{e\cap\Delta_{n_m}} |h_m|^p\,dt \geq \frac{1}{2}\|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}} \to \infty,$$

и справедливость доказываемого утверждения вытекает из того, что любое множество положительной меры из $(0,1)$ содержит замкнутое множество положительной меры.

При $p > 1$ в некоторых случаях компактные по мере операторы оказываются почти компактными: важным примером может служить любой интегральный оператор, действующий из L_p в L_0 [4; 5; 6, теорема 1.6.2]. Напомним, что оператор $T : L_p \to L_0$ называется *интегральным* [7], если существует функция $K(s,t) \in L_0(X \times X, \mu \times \mu)$ такая, что для всех $f \in L_p$

$$Tf(s) = \int\limits_X K(s,t)f(t)\,d\mu(t)$$

при почти всех $s \in X$ (интеграл здесь и далее понимается в лебеговом смысле). Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* T.

Определение 2. Обозначим через $B(L_p)$ совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из L_p в L_p, через W_p — множество всех почти компактных операторов из $B(L_p)$, через $C_{p,0}$ — множество всех компактных по мере операторов из $B(L_p)$.

Имеем $W_p \subset C_{p,0}$ для любого $1 \le p \le \infty$. Нам неизвестно: будет ли $W_p = C_{p,0}$ при $1 < p < \infty$? Есть некоторые основания для предположения, что $W_2 = C_{2,0}$, если мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов.

Операторы из W_p или $C_{p,0}$ могут оказаться полезными при изучении линейных неограниченных (в частности, дифференциальных) операторов в L_p. Например, резольвенты многих замкнутых линейных операторов в L_p почти компактны или компактны по мере, как показывают приводимые ниже лемма 1 и ее следствие.

Лемма 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $S : D_S \to L_p$ — замкнутый линейный оператор с линейной областью определения $D_S \subset L_p$, содержащейся в линейном многообразии $\mathscr{L} \subset L_0(X,\mu)$, удовлетворяющем условию: существует возрастающая к X последовательность измеримых множеств Y_n с конечными мерами такая, что $P_n\mathscr{L}$ — банахово пространство для любого $n = 1, 2, \dots$, в котором*

1) *из сходимости по норме следует сходимость по мере;*

2) *единичный шар относительно компактен в $L_p(Y_n,\mu)$ (соответственно компактен по мере), здесь $P_n f = \chi_{Y_n} f$, $f \in L_0$.*

Тогда для любой точки λ из резольвентного множества оператора S резольвента R_λ принадлежит W_p (соответственно $R_\lambda \in C_{p,0}$).

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из $P_n R_\lambda \in B(L_p)$, $n = 1, 2, \dots$, так как по теореме о замкнутом графике $P_n R_\lambda : L_p \to P_n\mathscr{L}$ — линейный ограниченный оператор для всех n.

Следствие. *Пусть в условиях леммы 1 $X = \Omega$ — область в евклидовом пространстве, μ — мера Лебега, $\mathscr{L}$ — пространство Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ [8] всех функций, локально суммируемых в Ω со степенью p, все обобщенные производные первого порядка которых локально суммируемы в Ω со степенью p. Тогда $R_\lambda \in W_p$.*

Перейдем к линейным функциональным уравнениям в L_p.

Лемма 2 [9]. *Пусть (Y,ν) — пространство с конечной положительной мерой ν, B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$, векторная функция $x : Y \to B$ сильно измерима. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и ν-почти всех $\sigma \in Y$*

$$\left\| x(\sigma) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{F_n}(\sigma) \right\|_B < \varepsilon,$$

где $\{x_n\}$ — последовательность, плотная в множестве значений функции x,

$$E_n = \{\sigma : \|x(\sigma) - x_n\|_B < \varepsilon,\ \sigma \in S_0\},$$

$$S_0 = \{\sigma : \|x(\sigma)\|_B > 0\}, \quad F_n = E_n \setminus \bigcup_{k<n} E_k.$$

Лемма 2 является фрагментом доказательства теоремы 3.5.3 из [9].

Определение 3. Интегральный оператор $T : L_p \to L_0$ называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$удовлетворяет условию

$$\int_X |K(s,t)|^q \, d\mu(t) < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

для почти всех $s \in X$. При $q = 2$ это условие совпадает с известным условием Карлемана. Ядро $K(s,t)$ назовем *квазивырожденным карлемановским ядром* [10], если существуют последовательность попарно не пересекающихся измеримых множеств $g_i \subset X$ с конечными положительными мерами и последовательность $\{u_i\} \subset L_q$ такие, что

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_{g_i}(s)}{(\mu g_i)^{1/p}} \overline{u_i(t)}. \tag{3}$$

Ядра

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\chi_{g_i}(s)}{(\mu g_i)^{1/p}} \overline{u_i(t)}, \quad N = 1, 2, \dots \tag{4}$$

будем называть *специальными вырожденными ядрами*, порожденными ядром (3).

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $T \in B(L_p)$ — почти компактный оператор. Тогда линейное функциональное уравнение 2-го рода*

$$y - \lambda T y = f \in L_p \tag{5}$$

эквивалентно линейному интегральному уравнению 2-го рода в L_p с квазивырожденным карлемановским ядром.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda_0 \neq 0$. Так как T — почти компактный оператор, существует разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества G_m с конечными положительными мерами такое, что $Q_m T : L_p \to L_p$ — компактные операторы для любого $m = 1, 2, \dots$; здесь $Q_m f = \chi_{G_m} f$, $f \in L_p$. Тогда для каждого m в силу [11, п. 10.2.3] найдется конечномерный линейный ограниченный оператор $T_m : L_p \to L_p(G_m, \mu)$ такой, что

$$\|Q_m T - Q_m T_m\| < (2|\lambda_0| 2^m)^{-1}. \tag{6}$$

Оператор $Q_m T_m$ может быть представлен в виде

$$Q_m T_m f = \sum_{n=1}^{M_m} (f, v_{m,n}) w_{m,n}, \quad f \in L_p,$$

где $v_{m,n} \in L_q$, $w_{m,n} \in L_p$ и носители $w_{m,n}$ содержатся в G_m, $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots, M_m$. Следовательно, $Q_m T_m$ — карлемановский интегральный оператор с ядром

$$K_m(s,t) = \sum_{n=1}^{M_m} w_{m,n}(s) \overline{v_{m,n}(t)}.$$

Рассмотрим карлемановское ядро

$$C(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{G_m}(s) K_m(s,t), \tag{7}$$

векторную функцию $\varphi(s) = \overline{C(s,\cdot)}$ и интегральный оператор $C : L_p \to L_0$ с ядром $C(s,t)$. Покажем, что $C \in B(L_p)$. В силу (6) для всех h из единичной сферы L_p имеем

$$\|(T-C)h\|_p = \left\|\sum_{m=1}^{\infty}(Q_mT - Q_mC)h\right\|_p$$
$$= \left\|\sum_{m=1}^{\infty}(Q_mT - Q_mT_m)h\right\|_p \le \sum_{m=1}^{\infty}\|Q_mT - Q_mT_m\| < \frac{1}{2|\lambda_0|}.$$

Стало быть, $C \in B(L_p)$ и $\|T-C\| < \frac{1}{2|\lambda_0|}$.

Зафиксируем m и рассмотрим определенную на G_m векторную функцию $\varphi_m(s) = \overline{K_m(s,\cdot)}$ со значениями в L_q. Эта функция принимает значения в конечномерном подпространстве пространства L_q и поэтому сильно измерима. Следовательно, и функция $\varphi(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\chi_{G_m}(s)\varphi_m(s)$ сильно измерима. По лемме 2 найдутся разбиение $\{g_{n,m}\}_{n=1}^{\infty}$ множества G_m на попарно не пересекающиеся измеримые множества с положительными мерами и последовательность $\{\psi_{n,m}\}_{n=1}^{\infty} \subset L_q$ такие, что для всех $n = 1, 2, \dots$ и почти всех $s \in G_m$

$$\|\varphi_m(s) - \psi_{n,m}\|_q < [2|\lambda_0|(\mu G_m)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{m}{p}}]^{-1}. \tag{8}$$

Рассмотрим карлемановское ядро

$$D(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{g_{n,m}}(s)\overline{\psi_{n,m}(t)}, \tag{9}$$

векторную функцию $\psi(s) = \overline{D(s,\cdot)}$ и интегральный оператор $D : L_p \to L_0$ с ядром $D(s,t)$. В силу (8) для всех h из единичной сферы L_p имеем

$$\|(C-D)h\|_p = \left(\int\limits_X |(h, \varphi(s) - \psi(s))|^p \, d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \left(\int\limits_X \|\varphi(s) - \psi(s)\|_q^p \, d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{G_m} \|\varphi(s) - \psi(s)\|_q^p \, d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2|\lambda_0|}.$$

Следовательно, $D \in B(L_p)$ и $\|C-D\| < \frac{1}{2|\lambda_0|}$. Таким образом, $\|T-D\| < \frac{1}{|\lambda_0|}$ и $\|\lambda(T-D)\| < 1$ для всех $|\lambda| < |\lambda_0|$, поэтому оператор $F_\lambda = 1 - \lambda(T-D)$ имеет обратный $F_\lambda^{-1} \in B(L_p)$. Запишем уравнение (5) в виде $(F_\lambda - \lambda D)y = f$. Положив $z = F_\lambda y$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода $z - \lambda DF_\lambda^{-1}z = f$, где DF_λ^{-1} — карлемановский интегральный оператор с ядром

$$K_\lambda(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{g_{n,m}}(s)\overline{\varphi_{n,m,\lambda}(t)}, \tag{10}$$

здесь $\varphi_{n,m,\lambda} = \left(F_\lambda^{-1}\right)^*\psi_{n,m}$, $\left(F_\lambda^{-1}\right)^*$ — сопряженный к F_λ^{-1} оператор.

Так как множества $g_{n,m}$ попарно не пересекаются, двойные ряды (9), (10) можно записать в виде (3). Таким образом, ядра $D(s,t)$, $K_\lambda(s,t)$ являются квазивырожденными карлемановскими ядрами.

В случае $\mu X < \infty$ доказательство упрощается: так как функция $\varphi(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\chi_{G_m}(s)\varphi_m(s)$ сильно измерима и $\mu X < \infty$, по лемме 2 найдутся последовательность попарно не пересекающихся измеримых множеств $g_i \subset X$ с положительными мерами и последовательность $\{v_i\} \subset L_q$ такие, что для почти всех

$s \in X$

$$\left\| \varphi(s) - \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{g_i}(s) v_i \right\|_q < [2|\lambda_0|(\mu X)^{\frac{1}{p}}]^{-1}.$$

Положим $u_i = (\mu g_i)^{1/p} v_i$ и рассмотрим квазивырожденное карлемановское ядро

$$D_0(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_{g_i}(s)}{(\mu g_i)^{1/p}} \overline{u_i(t)}, \tag{11}$$

векторную функцию $\eta(s) = \overline{D_0(s,\cdot)}$ и интегральный оператор $D_0 : L_p \to L_0$ с ядром $D_0(s,t)$. Тогда для всех h из единичной сферы L_p

$$\|(C - D_0)h\|_p = \left(\int_X |(h, \varphi(s) - \eta(s))|^p \, d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_X \|\varphi(s) - \eta(s)\|_q^p \, d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2|\lambda_0|}.$$

Таким образом, $D_0 \in B(L_p)$, $\|T - D_0\| < \frac{1}{|\lambda_0|}$, и доказательство завершается повторением предыдущего доказательства с заменой D на D_0.

В важном случае $p = 2$ уравнение вида (5) с более общим, чем в теореме 1, оператором T может быть сведено к эквивалентному интегральному уравнению $x - \lambda V x = g$ с карлемановским интегральным оператором $V \in B(L_2)$, не зависящим от λ.

Лемма 3. 1. *Если L_2 несепарабельно и образ оператора T из $B(L_2)$ сепарабелен, то существует унитарный оператор $U \in B(L_2)$ такой, что $A = UTU^{-1}$ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром.*

2. *Если L_2 сепарабельно, $T \in B(L_2)$ и существует ортонормированная система $\{\xi_n\} \subset L_2$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \|T^*\xi_n\|_2 = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный оператор $W \in B(L_2)$ такой, что $B = WTW^{-1}$ — карлемановский интегральный оператор, при этом $B = N + K$, где N — ядерный оператор с ядерной нормой меньше ε и $K \in B(L_2)$ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром.*

Доказательство. 1. Будем считать без ограничения общности, что $\dim TL_2 = \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированный базис замыкания F образа оператора T, $\{e_n\}$ — какая-нибудь последовательность попарно не пересекающихся измеримых множеств из X с конечными положительными мерами, $\tilde{e}_n = \chi_{e_{2n}}/\sqrt{\mu e_{2n}}$ и $U \in B(L_2)$ — унитарный оператор такой, что $Uf_n = \tilde{e}_n$, $n = 1, 2, \dots$. Так как для любого $f \in L_2$

$$Af = UTU^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (UTU^{-1}f, \tilde{e}_n)\tilde{e}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, UT^* f_n)\tilde{e}_n,$$

то A — интегральный оператор с карлемановским квазивырожденным ядром

$$A(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{UT^* f_n(t)}. \tag{12}$$

2. Выберем $\{q_n\} \subset \{\xi_{2n}\}$ так, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T^* q_n\|_2 < \varepsilon$, и рассмотрим ядерный (и, значит, карлемановский интегральный) оператор $\Gamma f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (f, T^* q_n) q_n$. Его ядерная норма меньше ε. Пусть $Q = T - \Gamma$. Тогда $Q^* q_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, образ оператора Q содержится в ортогональном дополнении F к замкнутой линейной оболочке $[q_n]$ последовательности $\{q_n\}$. Имеем $\dim F = \dim[q_n] = \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированный базис F и $W \in B(L_2)$ — унитарный оператор такой, что $W f_n = \tilde{e}_n = \chi_{e_{2n}} / \sqrt{\mu e_{2n}}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда подобно предыдущему $K = WQW^{-1}$ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{WQ^* f_n(t)}, \tag{13}$$

при этом $N = W\Gamma W^{-1}$ — ядерный оператор с ядерной нормой меньше ε.

Лемма 3 является частным случаем теоремы 2.4.1 из [12, с. 172] и теоремы IV. 3.6 из [6], в которых рассматривались плотно определенные в L_2 замыкаемые линейные операторы. Ограниченность T в лемме 3 позволяет существенно упростить доказательства этих теорем.

Теорема 2. 1. *Пусть L_2 — несепарабельное пространство, оператор $T \in B(L_2)$ почти компактен. Тогда существует унитарный оператор $U \in B(L_2)$, приводящий заменой $x = Uy$, $g = Uf$ уравнение $y - \lambda Ty = f$ к эквивалентному интегральному уравнению $x - \lambda Ax = g$, где $A = UTU^{-1}$ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром.*

2. *Пусть L_2 — сепарабельное пространство, $T \in B(L_2)$ и существует множество $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$, такое, что*

(i) *в $L_2(e, \mu)$ имеется равномерно ограниченная ортонормированная система $\{\tilde{\xi}_n\}$;*

(ii) *множество $P_e T B_2$ компактно по мере* (здесь B_2 — единичный шар L_2).

Тогда можно построить унитарный оператор $W \in B(L_2)$, приводящий заменой $x = Wy$, $g = Wf$ уравнение $y - \lambda Ty = f$ к эквивалентному интегральному уравнению $x - \lambda Bx = g$, где $B = WTW^{-1}$ — карлемановский интегральный оператор.

Доказательство. 1. Так как образ T сепарабелен, утверждение теоремы следует из леммы 3.

2. Из условия (ii) и теоремы I.3.7 в [2] вытекает, что $P_e T : L_2 \to L_1(e, \mu)$ — компактный оператор. Тогда $T^* P_e : L_\infty(e, \mu) \to L_2$ — компактный оператор. Положив $\xi_n = \chi_e \tilde{\xi}_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{\tilde{\xi}_n\}$ — последовательность из условия (i), получим $\|T^* \xi_n\|_2 = \|T^* P_e \tilde{\xi}_n\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$, и искомый оператор W существует в силу леммы 3.

Замечание 1. Условие (i) выполняется, если в e нет атомов меры μ. В этом случае в качестве $\{\xi_n\}$ можно выбрать ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$ с носителями в e (определение этих функций см., например, в [6, с. 11, 12]). Если множество $P_e T B_2$ компактно в L_2, то в качестве $\{\xi_n\}$ можно выбрать любую ортонормированную систему функций с носителями в e. Отметим, что условие (ii) выполняется, если $P_e T$ — интегральный оператор.

Замечание 2. Пользуясь леммой 3, для карлемановского интегрального оператора B из теоремы 2 при любом $\lambda_0 \neq 0$ можно построить интегральный оператор $L \in B(L_2)$ с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{w_n(t)} \tag{14}$$

такой, что $\|B-L\| < \frac{1}{|\lambda_0|}$, поэтому для любого $|\lambda| < |\lambda_0|$ интегральное уравнение $x - \lambda Bx = g$ заменой $w = H_\lambda x$, где $H_\lambda = 1 - \lambda(B - L)$, приводится к эквивалентному интегральному уравнению $w - \lambda L H_\lambda^{-1} w = g$ с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L_\lambda(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_{2n}}(s)}{\sqrt{\mu e_{2n}}} \overline{\left(H_\lambda^{-1}\right)^* w_n(t)}. \tag{15}$$

Замечание 3. Так как лемма 2 и доказательство леммы 3 носят конструктивный характер, квазивырожденные карлемановские ядра (9)–(15) могут быть найдены в явном виде. Наиболее просто построения выглядят в случае $p = 2$: в ядрах (12)–(15) e_{2n}, $n = 1, 2, \dots,$ — произвольные попарно не пересекающиеся множества из X с положительными мерами, а множители при функциях $\tilde{e}_n = \chi_{e_{2n}}/\sqrt{\mu e_{2n}}$ имеют конкретный вид (например, в ядре (12) это $\overline{UT^* f_n}$, $n = 1, 2, \dots$).

Замечание 4. К линейному интегральному уравнению 2-го рода в L_p с квазивырожденным карлемановским ядром применимы два приближенных метода решения, предложенные в [10, с. 133–139]. Оба метода основаны на приближении ядра специальными вырожденными ядрами (см. определение 3). Первый метод сводит интегральное уравнение с квазивырожденным карлемановским ядром к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных при помощи построений, аналогичных построениям, применяемым к линейным интегральным уравнениям 2-го рода с вырожденными ядрами. Переходя к усеченным конечным системам линейных алгебраических уравнений, получим последовательность приближенных решений, сходящихся слабо в L_p и всюду в X к решению исходного уравнения. Второй метод при некотором достаточно широком дополнительном условии обеспечивает сходимость по норме L_p и всюду в X решений интегральных уравнении 2-го рода со специальными вырожденными ядрами (приближенных решений) к решению исходного интегрального уравнения. При этом в [10, с. 138] имеются оценка по норме L_p разности между решением исходного уравнения и приближенными решениями и поточечная оценка модуля этой разности.

В заключение отметим, что в случае вещественного L_p справедливы полные аналоги всех результатов этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weis L.* Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 83–96.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
3. *Кашин Б. С, Саакян А. А.* Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999.
4. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.

5. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
6. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
7. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fundam. Math. 1922. V. 3. P. 133–181.
8. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
9. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.
11. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
12. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы с ядрами карлемановского типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, 1971.

Статья поступила 19 июня 2012 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090