*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2013. Том 54, № 4*

*УДК 512.8*

# ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП КОС

**Ю. А. Михальчишина**

**Аннотация.** Изучаются локальные линейные представления группы кос $B_3$, а также локальные однородные представления $B_n$ при $n \geq 2$. Исследуется связь этих представлений с представлением Бурау. По представлению Вады группы $B_n$ в группу автоморфизмов свободной группы строятся линейные представления группы $B_n$.

**Ключевые слова:** группа кос, линейные представления группы кос, представление Бурау, представление Магнуса, производные Фокса, представления Вады.

## Введение

Группа кос на $n$ нитях $B_n$ является классическим объектом исследования как в комбинаторной теории групп, так и в маломерной топологии. Результаты более чем столетних исследований по теории кос можно найти в классической монографии [1] или в более современном изложении в [2]. Напомним некоторые известные факты о представлениях групп $B_n$. Артин построил представление группы кос $B_n$ в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы $F_n$. По этому представлению строится представление Бурау

$$\rho_B : B_n \to GL_n(\mathbf{Z}[t^{\pm 1}]).$$

Долгое время существовала гипотеза о том, что представление Бурау точное. В настоящее время доказано, что представление $\rho_B$ не является точным при $n \geq 5$. Тем не менее его используют для построения полинома Александера, который является инвариантом узла. Представление Бурау локально, т. е. каждый порождающий переходит в матрицу, которая отличается от единичной матрицы диагональной клеткой порядка 2. Кроме того, представление Бурау также и однородное, т. е. клетки порядка 2 совпадают для всех порождающих.

В работе Вады [3] построены четыре представления группы $B_n$ в $\mathrm{Aut}(F_n)$, которые отличны от представления Артина, и, как показал Шпильрайн [4], эти представления точные. Так же, как по представлению Артина строится представление Бурау, в настоящей работе с использованием подхода Магнуса строятся линейные представления $B_n$ в группу $GL_n(\mathbb{C})$ и изучается связь этих представлений с представлением Бурау.

Структура работы такова. В § 1 напоминаются известные факты о группах кос $B_n$, приводятся определение и основные свойства производных Фокса. В § 2 описаны все локальные представления группы $B_3$ в группу $GL_3(\mathbb{C})$, а также все локальные однородные представления группы $B_n$. В § 3 с использованием подхода Магнуса построены представления, аналогичные представлению Бурау для представлений Вады.

## § 1. Вспомогательные утверждения

Напомним, что группа кос $B_n$, $n \geq 2$, на $n$ нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2.$$

Группа $B_n$ вкладывается в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. При этом порождающий $\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, определяет автоморфизм $\sigma_i : B_n \to \mathrm{Aut}(F_n)$:

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i \to x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \to x_i, \\ x_j \to x_j & \text{при} j \neq i, i+1. \end{cases}$$

Это представление называется *представлением Артина.*

Напомним определения и основные свойства производных Фокса [1, гл. 3]. Если $G$ — группа, а $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, то $\mathbf{Z}G$ — групповое кольцо группы $G$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ определим отображение $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbf{Z}F_n \to \mathbf{Z}F_n$ следующими правилами:

$$1) \ \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$2) \ \frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_j} = \begin{cases} -x_i^{-1} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$3) \ \frac{\partial (wv)}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial x_j} (v)^{\tau} + w \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad w, v \in \mathbf{Z}F_n,$$

$$4) \ \frac{\partial}{\partial x_j} \Bigl( \sum a_g g \Bigr) = \sum a_g \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad a_g \in \mathbf{Z}, \ g \in F_n,$$

где $\tau : \mathbf{Z}F_n \to \mathbf{Z}$ — операция тривиализации, посылающая все порождающие группы $F_n$ в единицу.

Пусть $\varphi$ — гомоморфизм группы $F_n$ в некоторую группу $G$. Символом $F_n^{\varphi}$ обозначим образ группы $F_n$ при гомоморфизме $\varphi$. Пусть $A_{\varphi}$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}(F_n)$, для которой справедливы равенства $x^{\varphi} = (x^{\alpha})^{\varphi}$ при всех $x \in F_n$ и $\alpha \in A_{\varphi}$. Сопоставим автоморфизму $\alpha \in A_{\varphi}$ матрицу

$$\|\alpha\| = \left[ \left( \frac{\partial x_i^{\alpha}}{\partial x_j} \right)^{\varphi} \right]_{i,j=1}^{n}$$

порядка $n$ с элементами из $\mathbf{Z}F_n^{\varphi}$. Построенное таким образом отображение определяет представление Магнуса $\rho : A_{\varphi} \to GL_n\bigl(\mathbf{Z}F_n^{\varphi}\bigr)$.

В частности, если в качестве $\varphi$ взять гомоморфизм группы $F_n$ на бесконечную циклическую группу с порождающим $t$ и положить $x_i^{\varphi} = t$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то получим представление Бурау

$$\rho_B : B_n \to GL_n(\mathbf{Z}[t^{\pm 1}]),$$

$$\rho_B(\sigma_i) = \left( \begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В работе Вады [3] построены четыре новых локальных представления группы $B_n$ в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$. Приведем список этих представлений.

1. Представление $w_1^{(k)}$, $k \in \mathbf{Z}$, определяется формулой

$$w_1^{(k)}(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \to x_i^k x_{i+1} x_i^{-k}, \\ x_{i+1} \to x_i, \\ x_j \to x_j \quad \text{при } j \neq i, i+1. \end{cases}$$

Отметим, что при $k = 1$ это представление Артина.

2. Представление $w_2$ определяется формулой

$$w_2(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \to x_i x_{i+1}^{-1} x_i, \\ x_{i+1} \to x_i, \\ x_j \to x_j \quad \text{при } j \neq i, i+1. \end{cases}$$

3. Представление $w_3$ определяется формулой

$$w_3(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \to x_i x_{i+1} x_i, \\ x_{i+1} \to x_i^{-1}, \\ x_j \to x_j \quad \text{при } j \neq i, i+1. \end{cases}$$

4. Представление $w_4$ определяется формулой

$$w_4(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \to x_i^2 x_{i+1}, \\ x_{i+1} \to x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}, \\ x_j \to x_j \quad \text{при } j \neq i, i+1. \end{cases}$$

## § 2. Локальные однородные представления $B_n$

Напомним,что представление $\varphi : B_n \to GL_n(\mathbb{C})$ называется *локальным*, если

$$\varphi(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $I_m$ — единичная матрица порядка $m$, $R_i$ — матрица порядка 2.

Локальное представление называется *однородным,* если $R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1}$.

Если хотим построить некоторое представление группы $B_n$, то, выбирая локальное представление, автоматически получаем справедливость соотношений $\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_j) = \varphi(\sigma_j)\varphi(\sigma_i)$ при $|i-j| \geq 2$.

Следующая теорема описывает все локальные представления группы $B_3$.

**Теорема 1.** *Если $\varphi : B_3 \to GL_3(\mathbb{C})$ — локальное представление, то $\varphi$ имеет один из следующих двух типов:*

1) $\varphi(\sigma_1) = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha(1-d) & \frac{(1-d)(1-\alpha+d\alpha)}{c} & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $\varphi(\sigma_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \frac{(1-\alpha)(1-d+d\alpha)}{\gamma} \\ 0 & \gamma & d(1-\alpha) \end{array}\right)$,

где $d, \alpha \neq 1$, $c, \gamma \neq 0$;

2) $\varphi(\sigma_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $\quad \varphi(\sigma_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{bc}{\gamma} \\ 0 & \gamma & 0 \end{array}\right)$, $\quad$ где $bc, \gamma \neq 0$.

Доказательство. Если $\varphi$ — локальное представление $B_3$, то оно определяется образами порождающих $\varphi(\sigma_1)$ и $\varphi(\sigma_2)$. Положим

$$s_1 = \varphi(\sigma_1) = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \varphi(\sigma_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{array}\right).$$

Чтобы $\varphi$ было представлением $B_3$, необходимо, чтобы выполнялось $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$. Непосредственными вычислениями находим

$$s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} a^2 + \alpha bc & ab + \alpha bd & \beta b \\ ac + \alpha cd & bc + \alpha d^2 & \beta d \\ \gamma c & \gamma d & \delta \end{pmatrix}, \quad s_2 s_1 s_2 = \begin{pmatrix} a & \alpha b & \beta b \\ \alpha c & \alpha^2 d + \beta\gamma & \alpha\beta d + \beta\delta \\ \gamma c & \alpha\gamma d + \gamma\delta & \beta\gamma d + \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Следующая система должна быть разрешима:

$$\begin{cases} a(1-a) = \alpha bc, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha c(1-d) = ac, & \beta d(1-\alpha) = \beta\delta, \\ \alpha b(1-d) = ab, & \gamma d(1-\alpha) = \gamma\delta. \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma - bc, & \end{cases}$$

Из соотношения $\det(s_1 s_2 s_1) = \det(s_2 s_1 s_2)$ следует условие $\det(s_1) = \det(s_2)$, т. е. $ad - bc = \alpha\delta - \beta\gamma$.

Решая получившуюся систему уравнений, перебираем все возможные случаи.

Случай 1. Предположим, что $bc \neq 0$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & \beta d(1-\alpha) = \beta\delta, \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma - bc, & \gamma d(1-\alpha) = \gamma\delta. \end{cases}$$

1.1. Допустим, что $\beta\gamma \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & d(1-\alpha) = \delta. \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma - bc, & \end{cases}$$

1.1.1. Предположим, что $\alpha \neq 0$.

1.1.1.1. Предположим также, что $d \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & d(1-\alpha) = \delta. \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma - bc, & \end{cases}$$

Отсюда следует, что $bc = (1-d)(1-\alpha+\alpha d)$, $\beta\gamma = (1-\alpha)(1-d+\alpha d)$, и получаем представление 1:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha(1-d) & \frac{(1-d)(1-\alpha+d\alpha)}{c} & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \frac{(1-\alpha)(1-d+d\alpha)}{\gamma} \\ 0 & \gamma & d(1-\alpha) \end{array}\right).$$

1.1.1.2. Допустим, что $d = 0$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, & \beta\gamma = bc, \\ \alpha = a, & \delta = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $bc = \beta\gamma = 1 - \alpha$, и получаем порождающие

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \frac{(1-\alpha)}{c} & 0 \\ c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \frac{(1-\alpha)}{\gamma} \\ 0 & \gamma & 0 \end{array}\right).$$

Это представление 1 при условии, что $d = 0$.

1.1.2. Пусть $\alpha = 0$. Из системы уравнений следует, что $a = 0$, $bc = \beta\gamma$.

1.1.2.1. Также предположим, что $d \neq 0$. Тогда $\beta\gamma = bc = 1 - d$ и получаем следующие порождающие:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{(1-d)}{c} & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{(1-d)}{\gamma} \\ 0 & \gamma & d \end{array}\right).$$

Это представление 1 при условии, что $\alpha = 0$.

1.1.2.2. Предположим обратное, т. е. $d = 0$, тогда приходим к таким порождающим представления 2:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{bc}{\gamma} \\ 0 & \gamma & 0 \end{array}\right).$$

Мы разобрали случай 1.1, в котором $\beta\gamma \neq 0$. Разберем случай, когда $\beta\gamma = 0$.

1.2. Из условия $\beta\gamma = 0$ следует, что $\alpha\delta \neq 0$, $\delta = 1$. Имеем систему

$$\begin{cases} a(1-a) = bc\alpha, \\ \alpha(1-d) = a, \\ \alpha d(d-\alpha) = -bc. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$a = \frac{-\alpha^2}{1-\alpha}, \quad bc = \frac{\alpha(\alpha - \alpha^2 - 1)}{(1-\alpha)^2}, \quad d = \frac{1}{1-\alpha},$$

и получаем такие порождающие:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{-\alpha^2}{\alpha-1} & \frac{\alpha(\alpha-\alpha^2-1)}{c(1-\alpha)^2} & 0 \\ c & \frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 1 \end{array}\right).$$

Это представление 1 при условии, что $d = \frac{1}{1-\alpha}$.

Случай 2. Предположим, что $bc = 0$, тогда $ad \neq 0, a = 1$.

2.1. Допустим, что либо $b \neq 0$, либо $c \neq 0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} a(1-a) = 0, & \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \alpha(1-d) = a, & \beta d(1-\alpha) = \beta\delta, \\ \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma, & \gamma d(1-\alpha) = \gamma\delta. \end{cases}$$

Находим $\alpha = \frac{1}{1-d}$.

2.1.1. Предположим, что $\beta\gamma \neq 0$. Тогда

$$\beta\gamma = \frac{d(d-d^2-1)}{(1-d)^2}, \quad \delta = \frac{-d^2}{1-d}$$

и получаем следующие порождающие:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{1-d} & \frac{d(d-d^2-1)}{\gamma(1-d)^2} \\ 0 & \gamma & \frac{-d^2}{1-d} \end{array}\right), \quad bc = 0.$$

Это представление 1 при условии, что $\alpha = \frac{1}{1-d}$.

2.1.2. Предположим обратное, т. е. $\beta\gamma = 0$, тогда $\alpha\delta \neq 0, \delta = 1$, и имеем следующие порождающие:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ c & d^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d^* & \beta \\ 0 & \gamma & 1 \end{array}\right),$$

где $bc = \beta\gamma = 0$, $d^*$ — корень уравнения $d^2 - d + 1 = 0$.

Это представление 1 при условии, что $\alpha = d$, $bc = \beta\gamma = 0$, $d^2 - d + 1 = 0$.

2.2. Предположим, что $b = c = 0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma, \quad \delta(1-\delta) = \beta\gamma d, \\ \gamma d(1-\alpha) = \gamma\delta, \quad \beta d(1-\alpha) = \beta\delta. \end{cases}$$

2.2.1. Если $\beta\gamma \neq 0$, то

$$\begin{cases} \alpha d(d-\alpha) = \beta\gamma, \\ d(1-\alpha) = \delta, \\ \delta(1-\delta) = \beta\gamma d. \end{cases}$$

Находим, что

$$\beta\gamma = \frac{d(d-d^2-1)}{(1-d)^2}, \quad \delta = \frac{-d^2}{1-d},$$

и получаем порождающие:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{1-d} & \frac{d(d-d^2-1)}{\gamma(1-d)^2} \\ 0 & \gamma & \frac{-d^2}{1-d} \end{array}\right).$$

Это представление 1 при условии, что $\alpha = \frac{1}{1-d}$, $b = c = 0$.

2.2.2. Предположим обратное, т. е. $\beta\gamma = 0$, тогда

$$\alpha\delta \neq 0, \quad \delta = 1, \quad \alpha = d = \frac{1}{1-d}.$$

Получаем следующие порождающие:

$$s_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ c & d^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad s_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d^* & \beta \\ 0 & \gamma & 1 \end{array}\right),$$

где $bc = \beta\gamma = 0$, $d^*$ — корень уравнения $d^2 - d + 1 = 0$.

Это представление 1 при условии, что $\alpha = d$, $bc = \beta\gamma = 0$, $d^2 - d + 1 = 0$. Для наглядности занесем результаты в таблицу:

<table>
<tr><td colspan="4"></td><td>Представление</td><td>Условия</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$bc \neq 0$</td><td rowspan="4">$\beta\gamma \neq 0$</td><td rowspan="2">$\alpha \neq 0$</td><td>$d \neq 0$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>$d = 0$</td><td>1</td><td>$d = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\alpha = 0$</td><td>$d \neq 0$</td><td>1</td><td>$\alpha = 0$</td></tr>
<tr><td>$d = 0$</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\beta\gamma = 0$</td><td>1</td><td>$d = \frac{1}{1-\alpha}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$bc = 0$</td><td rowspan="2">$c \neq 0$</td><td colspan="2">$\beta\gamma \neq 0$</td><td>1</td><td>$\alpha = \frac{1}{1-d}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\beta\gamma = 0$</td><td>1</td><td>$\alpha = d$, $d^2 - d + 1 = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\beta = c = 0$</td><td colspan="2">$\beta\gamma \neq 0$</td><td>1</td><td>$\alpha = \frac{1}{1-d}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\beta\gamma = 0$</td><td>1</td><td>$a = d$, $d^2 - d + 1 = 0$</td></tr>
</table>

Теорема доказана.

**Следствие.** *Если $\varphi : B_n \to GL_n(\mathbb{C})$ — локальное однородное представление, то $\varphi$ совпадает с одним из представлений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, которые определяются следующим образом:*

$$\varphi_j : B_n \to GL_n(\mathbb{C}),$$

$$1)\ \varphi_1(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & \frac{1-\alpha}{\gamma} & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad \gamma \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$2)\ \varphi_2(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1-d}{c} & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad c \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$3)\ \varphi_3(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad bc \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Заметим, что если в представлении $\varphi_1$ взять $\gamma = 1$, $\alpha = 1 - t$, то получим представление Бурау.

Доказательство. Чтобы локальное представление было однородным, необходимо, чтобы $R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1}$.

Из локального представления 1 получаются два локальных однородных представления группы $B_n$. Первое при условиях $d = 0$, $c = \gamma$, второе при условиях $\alpha = 0$, $c = \gamma$. Из локального представления 2 получается локальное однородное представление при условии $c = \gamma$. Следствие доказано.

Напомним, что линейные представления

$$\psi_1 : G \to GL_n(\mathbb{C}), \quad \psi_2 : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

группы $G$ называются *эквивалентными*, если существует матрица $T \in GL_n(\mathbb{C})$ такая, что

$$\psi_1(g)T = T\psi_2(g) \quad \text{для всякой матрицы } g \in G,$$

т. е. матрица $\psi_1(g)$ подобна матрице $\psi_2(g)$. Известно, что у подобных матриц характеристические многочлены равны. Выясним, какие из представлений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, построенных в следствии, подобны.

**Предложение.** *Справедливы следующие утверждения:*
(а) *при $\alpha \neq 1-t$ представление $\varphi_1$ не подобно представлению Бурау;*
(б) *при $d \neq \alpha$ представление $\varphi_2$ не подобно представлению $\varphi_1$;*
(в) *при $\alpha \neq 0$ представление $\varphi_3$ не подобно представлению $\varphi_1$;*
(г) *при $d \neq 0$ представление $\varphi_3$ не подобно представлению $\varphi_2$.*

Доказательство. (а) Рассмотрим представление $\varphi_1$ и представление Бурау при $n = 2$. Матрица $\varphi_1(\sigma_1)$ имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1-\alpha}{\gamma} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее характеристический многочлен

$$|A_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \frac{1-\alpha}{\gamma} \\ \gamma & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha\lambda - (1-\alpha) = f_1(\lambda).$$

Для представления Бурау группы $B_2$ образ матрицы $\rho_B(\sigma_1)$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен таков:

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-t-\lambda & t \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(1-t) - t = g(\lambda).$$

Если $\varphi_1$ подобно представлению Бурау, то $f_1(\lambda) = g(\lambda)$, т. е. $\alpha = 1-t$. Следовательно, при $\alpha \neq 1-t$ представление $\varphi_1$ и представление Бурау не подобны.

(б) Рассматриваем представления $\varphi_1$ и $\varphi_2$ при $n = 2$. Характеристический многочлен матрицы $\varphi_1(\sigma_1)$ равен

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda - (1-\alpha).$$

Матрица $\varphi_2(\sigma_1)$ имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-d}{c} \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристический многочлен:

$$|A_2 - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1-d}{c} \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - d\lambda - (1-d) = f_2(\lambda).$$

Если $\varphi_1$ подобно $\varphi_2$, то $f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$, т. е. $d = \alpha$. Следовательно, при $d \neq \alpha$ представления $\varphi_1$ и $\varphi_2$ не подобны.

(в) Рассмотрим представления $\varphi_1$ и $\varphi_3$ при $n = 2$. Матрица $\varphi_3(\sigma_1)$ равна

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим ее характеристический многочлен:

$$|A_3 - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & b \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - bc = f_3(\lambda).$$

Если $\varphi_1$ подобно $\varphi_3$, то $f_1(\lambda) = f_3(\lambda)$:

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - (1-\alpha) = \lambda^2 - bc,$$

т. е. $\alpha\lambda + (1-\alpha) - bc = 0$. Так как это равенство должно выполняться для произвольных $\lambda$, отсюда следует, что $\alpha = 0$ и $bc = 1$. Значит, при $\alpha \neq 0$ представления $\varphi_1$ и $\varphi_3$ не подобны.

(г) Рассмотрим представления $\varphi_2$ и $\varphi_3$ при $n = 2$. Если $\varphi_2$ подобно $\varphi_3$, то $f_2(\lambda) = f_3(\lambda)$:

$$\lambda^2 - d\lambda - (1-d) = \lambda^2 - bc,$$

т. е. $d\lambda + (1-d) - bc = 0$. Поскольку это равенство должно выполняться для произвольных $\lambda$, отсюда следует, что $d = 0$ и $bc = 1$. Таким образом, при $d \neq 0$ представления $\varphi_2$ и $\varphi_3$ не подобны. Предложение доказано.

## § 3. Линейные представления, соответствующие представлениям Вады

В этом параграфе построим линейные представления

$$\rho_1^{(k)}, \rho_2, \rho_3, \rho_4 : B_n \to GL_n\bigl(\mathbf{Z}\bigl[t_1^{\pm1}, t_2^{\pm1}, \dots, t_n^{\pm1}\bigr]\bigr),$$

соответствующие представлениям Вады

$$w_1^{(k)}, w_2, w_3, w_4 : B_n \to \mathrm{Aut}(F_n),$$

определенным в § 1. При этом используем подход Магнуса, описанный в § 1. Основным результатом настоящего параграфа является

**Теорема 2.** *Справедливы следующие утверждения:*

(а) *представление Магнуса $\rho_1^{(k)}$ сводится к представлению Бурау заменой параметров;*

(б) *представление $\rho_2$ совпадает с представлением Бурау;*

(в) *представление $\rho_3$ не эквивалентно представлению Бурау;*

(г) *представление $\rho_4$ получается из $\rho_3$ при некоторых значениях параметров.*

Доказательство. Чтобы построить представления $\rho_1^{(k)}, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, вычислим производные Фокса.

1. Представление $\rho_1^{(k)}$. Для простоты символом $x_j^{\sigma_i}$ будем обозначать образ $w_1^{(k)}(\sigma_i)(x_j)$ порождающего $x_j$ при автоморфизме $w_1^{(k)}(\sigma_i)$.

Рассматриваем случай $k > 0$. Вычисляем производную $x_i^{\sigma_i}$ по переменной $x_i$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} &= \frac{\partial\bigl(x_i^k x_{i+1} x_i^{-k}\bigr)}{\partial x_i} = \frac{\partial\bigl(x_i^k\bigr)}{\partial x_i} + x_i^k \frac{\partial\bigl(x_{i+1}x_i^{-k}\bigr)}{\partial x_i} = \frac{\partial\bigl(x_i^k\bigr)}{\partial x_i} + x_i^k x_{i+1}\frac{\partial\bigl(x_i^{-k}\bigr)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial\bigl(x_i^k\bigr)}{\partial x_i} - x_i^k x_{i+1} x_i^{-k}\frac{\partial\bigl(x_i^k\bigr)}{\partial x_i} = \bigl(1 - x_i^k x_{i+1} x_i^{-k}\bigr)\frac{x_i^k - 1}{x_i - 1} \\ &= \bigl(1 - x_i^k x_{i+1} x_i^{-k}\bigr)\bigl(1 + x_i + \dots + x_i^{k-1}\bigr).\end{aligned}$$

Вычисляем производную $x_i^{\sigma_i}$ по переменной $x_{i+1}$:

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial\bigl(x_i^k x_{i+1} x_i^{-k}\bigr)}{\partial x_{i+1}} = x_i^k \frac{\partial\bigl(x_{i+1}x_i^{-k}\bigr)}{\partial x_{i+1}} = x_i^k\left(1 + x_{i+1}\frac{\partial\bigl(x_i^{-k}\bigr)}{\partial x_{i+1}}\right) = x_i^k.$$

Аналогично находим остальные производные:

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1, \quad \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Заметим, что для всех локальных представлений производные $x_j^{\sigma_i}$ по переменным $x_i$ и $x_{i+1}$ равны нулю при $j \neq i, i+1$, т. е.

$$\frac{\partial x_j^{\sigma_i}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial x_j^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = 0, \quad j \neq i, i+1.$$

Для наглядности запишем полученные результаты следующим образом:

$$\frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} \bigl(1 - x_i^k x_{i+1} x_i^{-k}\bigr)\bigl(1 + x_i + \dots + x_i^{k-1}\bigr), & l = i, \\ 1, & l = i+1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} x_i^k, & l = i, \\ 0, & l = i+1. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $k < 0$. Обозначим $k = -m$, где $m > 0$. Получаем следующие значения производных Фокса:

$$\frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} \bigl(x_i^{-m} x_{i+1} x_i^{m} - 1\bigr)\bigl(x_i^{-1} + \dots + x_i^{-m}\bigr), & l = i, \\ 1, & l = i+1; \end{cases}$$
$$\frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} x_i^{-m}, & l = i, \\ 0, & l = i+1. \end{cases}$$

Рассмотрим гомоморфизм $\mathbf{Z}F_n \to \mathbf{Z}\bigl[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}\bigr]$, посылающий $x_i$ в $t_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Под действием этого гомоморфизма для всех $k$ получаем матрицу

$$\rho_1^{(k)}(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1 - t_{i+1})\bigl(1 + t_i + \dots + t_i^{k-1}\bigr) & t_i^k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \ i = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. Рассматриваем представление $\rho_2$. Вместо $w_2(\sigma_i)(x_j)$ пишем $x_j^{\sigma_i}$.

Вычисляем производную $x_i^{\sigma_i}$ по переменной $x_i$:

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial\bigl(x_i x_{i+1}^{-1} x_i\bigr)}{\partial x_i} = 1 + x_i \frac{\partial\bigl(x_{i+1}^{-1} x_i\bigr)}{\partial x_i} = 1 + x_i x_{i+1}^{-1}.$$

Вычисляем производную $x_i^{\sigma_i}$ по переменной $x_{i+1}$:

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial\bigl(x_i x_{i+1}^{-1} x_i\bigr)}{\partial x_{i+1}} = x_i \frac{\partial\bigl(x_{i+1}^{-1} x_i\bigr)}{\partial x_{i+1}} = x_i\bigl(-x_{i+1}^{-1}\bigr) = -x_i x_{i+1}^{-1}.$$

Остальные производные такие же, как и в предыдущем случае:

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1, \quad \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Группируем результаты:

$$\frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 + x_i x_{i+1}^{-1}, & l = i, \\ 1, & l = i+1; \end{cases} \quad \frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} -x_i x_{i+1}^{-1}, & l = i, \\ 0, & l = i+1. \end{cases}$$

Под действием гомоморфизма

$$\mathbf{Z}F_n \to \mathbf{Z}\big[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}\big]$$

получаем матрицу

$$\rho_2(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 + t_i t_{i+1}^{-1} & -t_i t_{i+1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

3. Рассматриваем представление $\rho_3$. Опять полагаем $w_3(\sigma_i)(x_j) = x_j^{\sigma_i}$.

Производные $x_i^{\sigma_i}$ по переменным $x_i$ и $x_{i+1}$ таковы:

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial(x_i x_{i+1} x_i)}{\partial x_i} = 1 + x_i \frac{\partial(x_{i+1} x_i)}{\partial x_i} = 1 + x_i x_{i+1},$$

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial(x_i x_{i+1} x_i)}{\partial x_{i+1}} = x_i \frac{\partial(x_{i+1} x_i)}{\partial x_{i+1}} = x_i,$$

производные $x_{i+1}^{\sigma_i}$ по переменным $x_i$ и $x_{i+1}$ —

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial\big(x_i^{-1}\big)}{\partial x_i} = -x_i^{-1}, \quad \frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial\big(x_i^{-1}\big)}{\partial x_{i+1}} = 0.$$

Группируем результаты:

$$\frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 + x_i x_{i+1}, & l = i, \\ -x_i^{-1}, & l = i+1; \end{cases} \qquad \frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} x_i, & l = i, \\ 0, & l = i+1. \end{cases}$$

Под действием гомоморфизма $\mathbf{Z}F_n \to \mathbf{Z}\big[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}\big]$ получаем матрицу

$$\rho_3(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 + t_i t_{i+1} & t_i & 0 \\ 0 & -t_i^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

4. Рассматриваем представление $\rho_4$. Опять полагаем $w_4(\sigma_i)(x_j) = x_j^{\sigma_i}$. Производные $x_i^{\sigma_i}$ по переменным $x_i$ и $x_{i+1}$ равны

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial\big(x_i^2 x_{i+1}\big)}{\partial x_i} = 1 + x_i \frac{\partial(x_i x_{i+1})}{\partial x_i} = 1 + x_i,$$

$$\frac{\partial x_i^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial\big(x_i^2 x_{i+1}\big)}{\partial x_{i+1}} = x_i^2.$$

Найдем производные $x_{i+1}^{\sigma_i}$ по переменным $x_i$ и $x_{i+1}$:

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial\big(x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}\big)}{\partial x_i} = x_{i+1}^{-1}\big(-x_i^{-1}\big) = -x_{i+1}^{-1} x_i^{-1}.$$

$$\frac{\partial x_{i+1}^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \frac{\partial\big(x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}\big)}{\partial x_{i+1}} = -x_{i+1}^{-1} + x_{i+1}^{-1} \frac{\partial\big(x_i^{-1} x_{i+1}\big)}{\partial x_{i+1}} = -x_{i+1}^{-1} + x_{i+1}^{-1} x_i^{-1}.$$

Группируем результаты:

$$\frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 + x_i, & l = i, \\ -x_{i+1}^{-1} x_i^{-1}, & l = i+1; \end{cases} \qquad \frac{\partial x_l^{\sigma_i}}{\partial x_{i+1}} = \begin{cases} x_i^2, & l = i, \\ -x_{i+1}^{-1} + x_{i+1}^{-1} x_i^{-1}, & l = i+1. \end{cases}$$

Под действием гомоморфизма $\mathbf{Z}F_n \to \mathbf{Z}\big[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}\big]$ получаем матрицу

$$\rho_4(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1+t_i & t_i^2 & 0 \\ 0 & -t_{i+1}^{-1}t_i^{-1} & -t_{i+1}^{-1} + t_{i+1}^{-1}t_i^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Для того чтобы отображение $\rho_j$ действительно являлось представлением группы $B_n$, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\rho_j(\sigma_i)\rho_j(\sigma_{i+1})\rho_j(\sigma_i) = \rho_j(\sigma_{i+1})\rho_j(\sigma_i)\rho_j(\sigma_{i+1}). \tag{1}$$

(а) Рассмотрим вначале представление $\rho_1^{(k)}$. Для него соотношение (1) примет вид

$$\rho_1^{(k)}(\sigma_i)\rho_1^{(k)}(\sigma_{i+1})\rho_1^{(k)}(\sigma_i) = \rho_1^{(k)}(\sigma_{i+1})\rho_1^{(k)}(\sigma_i)\rho_1^{(k)}(\sigma_{i+1}).$$

Вычисляем левую часть этого соотношения:

$$\rho_1^{(k)}(\sigma_i)\rho_1^{(k)}(\sigma_{i+1})\rho_1^{(k)}(\sigma_i)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{(1-t_i^k)^2(1-t_{i+1})^2}{(1-t_i)^2} + t_i^k \frac{(1-t_{i+1}^k)(1-t_{i+2})}{1-t_{i+1}} & t_i^k \frac{(1-t_i^k)(1-t_{i+1})}{1-t_i} & t_i^k t_{i+1}^k & 0 \\ 0 & \frac{(1-t_i^k)(1-t_{i+1})}{1-t_i} & t_i^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right).$$

Вычисляем правую часть:

$$\rho_1^{(k)}(\sigma_{i+1})\rho_1^{(k)}(\sigma_i)\rho_1^{(k)}(\sigma_{i+1})$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{(1-t_i^k)(1-t_{i+1})}{1-t_i} & t_i^k \frac{(1-t_{i+1}^k)(1-t_{i+2})}{1-t_{i+1}} & t_i^k t_{i+1}^k & 0 \\ 0 & \frac{(1-t_{i+1}^k)(1-t_{i+2})}{1-t_{i+1}} & t_{i+1}^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right).$$

Приравнивая эти матрицы, получим $t_i = t_{i+1} = t_{i+2}$. Обозначая $t_i = t$, приходим к матрице

$$\rho_1^{(k)}(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t^k & t^k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что если положить $q = t^k$, то имеем представление Бурау.

(б) Рассматриваем представление $\rho_2$. Для него соотношение (1) примет вид

$$\rho_2(\sigma_i)\rho_2(\sigma_{i+1})\rho_2(\sigma_i) = \rho_2(\sigma_{i+1})\rho_2(\sigma_i)\rho_2(\sigma_{i+1}).$$

Вычисляем левую часть этого соотношения:

$$\rho_2(\sigma_i)\rho_2(\sigma_{i+1})\rho_2(\sigma_i) =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1+t_it_{i+1}^{-1})^2 - t_it_{i+1}^{-1}(1+t_{i+1}t_{i+2}^{-1}) & -t_it_{i+1}^{-1}(1+t_it_{i+1}^{-1}) & t_it_{i+2}^{-1} & 0 \\ 0 & 1+t_it_{i+1}^{-1} & -t_it_{i+1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right).$$

Вычисляем правую часть:

$$\rho_2(\sigma_{i+1})\rho_2(\sigma_i)\rho_2(\sigma_{i+1}) = \left(\begin{array}{c|cccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1+t_it_{i+1}^{-1} & -t_it_{i+1}^{-1}(1+t_{i+1}t_{i+2}^{-1}) & t_it_{i+2}^{-1} & 0 \\ 0 & 1+t_{i+1}t_{i+2}^{-1} & -t_{i+1}t_{i+2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right).$$

Приравнивая эти матрицы, получим, что $t_it_{i+1}^{-1} = t_{i+1}t_{i+2}^{-1}$. Полагая $-t_it_{i+1}^{-1} = t$, приходим к матрице

$$\rho_2(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Заметим, что $\rho_2$ совпадает с представлением Бурау.

(в) Рассматриваем представление $\rho_3$. Проверяем для него соотношение (1):

$$\rho_3(\sigma_i)\rho_3(\sigma_{i+1})\rho_3(\sigma_i) = \rho_3(\sigma_{i+1})\rho_3(\sigma_i)\rho_3(\sigma_{i+1}).$$

Вычисляем левую часть этого соотношения:

$$\rho_3(\sigma_i)\rho_3(\sigma_{i+1})\rho_3(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1+t_it_{i+1})^2-(1+t_{i+1}t_{i+2}) & t_i(1+t_it_{i+1}) & t_it_{i+1} & 0 \\ 0 & -t_i^{-1}(1+t_it_{i+1}) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t_i^{-1}t_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right).$$

Вычисляем правую часть:

$$\rho_3(\sigma_{i+1})\rho_3(\sigma_i)\rho_3(\sigma_{i+1}) = \left(\begin{array}{c|cccc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1+t_it_{i+1} & t_i(1+t_{i+1}t_{i+2}) & t_it_{i+1} & 0 \\ 0 & -t_i^{-1}(1+t_{i+1}t_{i+2}) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t_i^{-1}t_{i+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right).$$

Приравнивая эти матрицы, получаем $t_it_{i+1} = t_{i+1}t_{i+2} = 1$. Таким образом, приходим к матрице

$$\rho_3(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & t_i & 0 \\ 0 & -t_i^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Представление $\rho_3$ локальное неоднородное, следовательно, не эквивалентно представлению Бурау.

(г) Рассматриваем представление $\rho_4$. Из соотношения

$$\rho_4(\sigma_i)\rho_4(\sigma_{i+1})\rho_4(\sigma_i) = \rho_4(\sigma_{i+1})\rho_4(\sigma_i)\rho_4(\sigma_{i+1})$$

так же, как и выше, получим $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = 1$. Таким образом,

$$\rho_4(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Оно является частным случаем представления $\rho_3$ при $t_i = 1$.

Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Birman J. S.* Braid, links and mapping class group. Princeton: Princeton Univ. Press, 1975.
**2.** *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. New York: Springer Science + Business Media, 2008. (Grad. Texts Math.; V. 247).
**3.** *Wada M.* Group invariants of links // Topology. 1992. V. 31. P. 399–406.
**4.** *Shpilrain V.* Representing braids by automorphisms // Int. J. Algebra Comput. 2001. V. 11, N 6. P. 773–777.


*Статья поступила 30 мая 2012 г.*

Михальчишина Юлия Андреевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kustova83@ngs.ru