Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 519.17+512.54

РЕБЕРНО СИММЕТРИЧНЫЕ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ НАКРЫТИЯ КЛИК: АФФИННЫЙ СЛУЧАЙ

А. А. Махнев, Д. В. Падучих, Л. Ю. Циовкина

Аннотация. Пусть Γ — реберно симметричное дистанционно регулярное накрытие клики. Тогда группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует дважды транзитивно на множестве Σ антиподальных классов. Предложена программа классификации таких графов, основанная на описании дважды транзитивных групп подстановок. Эта программа реализована в случае $a_1 = c_2$. В данной работе классифицированы графы в случае, когда действие G на Σ аффинное.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, реберно симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются через p^l_{ij} и называются *числами пересечения графа* Γ.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин и для вершины u графа Γ ее стабилизатор G_u действует транзитивно на $\Gamma_i(u)$ для любого $i = 1, \dots, d$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00012), РФФИ — ГФЕН Китая (грант 12–01–91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12–Т–1–1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12–С–1–1018) и с НАН Беларуси (проект 12–С–1–1009).

Если H — подгруппа из группы автоморфизмов графа Γ, то на множестве H-орбит можно определить частное графа Γ, считая две орбиты смежными, если в одной из них найдется вершина, смежная в Γ с вершиной другой орбиты.

Через $G^{(\infty)}$ обозначим последний член ряда коммутантов группы G.

В [1] получено описание антиподальных дистанционно транзитивных графов диаметра 3. Более общей является задача описания реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3.

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер). В этом случае группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин и для вершины u графа Γ ее стабилизатор G_u действует транзитивно на $[u]$.

Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве вершин — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются *антиподальными классами.*

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [2]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$.

Если $\mu \neq \lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m: $k = nm$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$, $\lambda = \mu + n - m$. Целочисленность кратностей собственных значений дает условие делимости: $n+m$ делит $(r-1)m(m^2-1)$.

В данной работе продолжается программа исследования реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 (см. [3]), основанная на классификации дважды транзитивных групп подстановок (см. [4]). А именно, изучен аффинный случай. В [3] рассмотрены случаи $r = 2$, $r = k$ и реализована часть этой программы в случае графов с $\lambda = \mu$. Пусть Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и Σ — множество антиподальных классов графа Γ. По [3, предложение 1] группа G действует дважды транзитивно на Σ.

Через G^X обозначается группа подстановок G на множестве X. Если $Y \subseteq X$, то G_Y ($G_{\{Y\}}$) — поточечный (глобальный) стабилизатор Y в G.

Предложение 1 [1, теорема 2.9]. *Пусть G^X — дважды транзитивная группа подстановок степени n, $a \in X$, $H = G_a$ и T — цоколь группы G. Тогда либо*

(1) *почти простой случай: G — почти простая группа и для (T, n) выполняется одна из следующих возможностей:*

(i) *знакопеременные* (A_n, n), $n \geq 5$;

(ii) *линейные* $(L_m(q), (q^m-1)/(q-1))$, $m \geq 2$, *и* $(m, q) \notin \{(2,2), (2,3)\}$;

(iii) *симплектические* $(Sp_{2m}(2), 2^{2m-1} \pm 2^{m-1})$, $m \geq 3$;

(iv) *унитарные* $(U_3(q), q^3+1)$, $q \geq 3$;

(v) *Ри* $({}^2G_2(q), q^3+1)$, $q = 3^{2a+1} \geq 27$;

(vi) *Судзуки* $(Sz(q), q^2+1)$, $q = 2^{2a+1} \geq 8$;

(vii) *Матье* (M_n, n), $n \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$;

(viii) *спорадические* $(L_2(11), 11)$, $(M_{11}, 12)$, $(A_7, 15)$, $(L_2(8), 28)$, $(HiS, 176)$, $(Co_3, 276)$

либо

(2) *аффинный случай: $G = TH$, T — элементарная абелева группа порядка $n = p^e$ и выполняется одна из следующих возможностей:*

(i) *линейные* $e = cd$, $d \geq 2$ *и* $SL_d(p^c) \lhd H$;

(ii) *симплектические* $e = ct$, t *четно*, $t \geq 2$ *и* $Sp_t(p^c) \lhd H$;

(iii) G_2*-типа* $e = 6c$, $p = 2$ *и* $G_2(2^c)' \lhd H$;

(iv) *одномерные* $H \leq \Gamma L_1(p^e)$;

(v) *исключительные* $p^e \in \{9^2, 11^2, 19^2, 29^2, 59^2\}$ *и* $SL_2(5) \lhd H$ *или* $p^e = 2^4$ *и* $H \in \{A_6, S_6, A_7\}$, *или* $p^e = 3^6$ *и* $SL_2(13) \lhd H$;

(vi) *экстраспециальные* $p^e \in \{5^2, 7^2, 11^2, 23^2\}$ *и* $SL_2(3) \lhd H$ *или* $p^e = 3^4$, $R = D_8 \circ Q_8 \lhd H$, $H/R \leq S_5$ *и* 5 *делит* $|H|$.

Для групп A, B, имеющих единственную центральную инволюцию, через $A \circ B$ обозначается центральное произведение групп A, B, в котором $|A \cap B| = 2$.

Теорема. *Пусть* Γ — *реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ $(2 < r < k)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, Σ — *множество антиподальных классов графа* Γ, K — *ядро действия* G *на* Σ, $F \in \Sigma$, $a \in F$, $H = G_{\{F\}}$ *и цоколь* $\overline{T}$ *группы* $\overline{G} = G/K$ — *элементарная абелева группа порядка* p^e. *Тогда* $K = 1$ *и* Γ — *граф с массивом пересечений* $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ *или* $|K| = r$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 2$, $r\mu = 2^e$, $e = 2dc$, $d \geq 1$, r *делит* 2^c, Γ *имеет массив пересечений* $\{2^{2dc} - 1, (r-1)2^{2dc}/r, 1; 1, 2^{2dc}/r, 2^{2dc} - 1\}$, T — *элементарная абелева группа порядка* $2^{2dc}r$, *не содержащая нормальных в* G *подгрупп порядка* 2^{2dc}, $Sp_{2d}(2^c) \lhd H_a$ *или* $d = 3$ *и* $G_2(2^c) \lhd H_a$;

(2) *реализуется экстраспециальный случай* (2vi) *из предложения* 1 *и либо*

(i) $p^e = 3^4$, $R = D_8 \circ Q_8 \lhd H_a$, $H_a/R \leq S_5$, $r = 3$, T — *экстраспециальная группа порядка* 3^5, Γ *имеет массив пересечений* $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$,

либо

(ii) $p^e = 5^2$, $SL_2(3) \leq H_a \leq GL_2(3)$, $r = \mu = 5$, $n = 4, m = 6$, T — *экстраспециальная группа порядка* 5^3, Γ *имеет массив пересечений* $\{24, 20, 1; 1, 5, 24\}$,

либо

(iii) $p^e = 7^2$, $H_a = GL_2(3)$, $n = 6, m = 8$, $r = \mu = 7$, T — *экстраспециальная группа порядка* 7^3, Γ *имеет массив пересечений* $\{48, 42, 1; 1, 7, 48\}$;

(3) *реализуется исключительный случай* (2v) *из предложения* 1 *и либо*

(i) $p^e = 3^6$, $SL_2(13) \leq H_a$, $r = 3$, Γ *имеет массив пересечений* $\{728, 486, 1; 1, 243, 728\}$, T — *экстраспециальная группа порядка* 3^7,

либо

(ii) $p^e = 9^2$, $|H_a : SL_2(5)| = 2$, $r = 3$, T — *экстраспециальная группа порядка* 3^5 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$,

либо

(iii) $p^e = 11^2$, $|H_a : SL_2(5)| \leq 2$, $r = \mu = 11$, T — *экстраспециальная группа порядка* 11^3 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$;

(4) *реализуется одномерный случай* (2iv) *из предложения* 1 , $e = 2$, H_a — *циклическая группа порядка* $p^2 - 1$, T — *экстраспециальная группа порядка* p^3, Γ *имеет массив пересечений* $\{p^2 - 1, (p-1)p, 1; 1, p, p^2 - 1\}$;

(5) *реализуется симплектический случай* (2ii) *из предложения* 1 , $e = 2dc$, $d \geq 1$, r *делит* p^c, $Sp_{2d}(p^c) \lhd H$, T — *специальная группа порядка* rp^{2dc}, Γ *имеет массив пересечений* $\{p^{2dc} - 1, (r-1)p^{2dc}/r, 1; 1, p^{2dc}/r, p^{2dc} - 1\}$.

Следствие. *Пусть* Γ — *вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и для вершины* $a \in \Gamma$ *группа* G_a *действует транзитивно на* $[a]$ *и на* $\Gamma_3(a)$. *Если действие* G *на множестве антиподальных классов графа* Γ *аффинное с ядром* K, H —

стабилизатор антиподального класса F, $a \in F$, то либо Γ — дистанционно транзитивный граф из [1], *либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Γ *имеет массив пересечений* $\{8,6,1;1,3,8\}$, $|K| = r = 3$, T — *экстраспециальная группа порядка* 3^3, H *содержит подгруппу индекса* 2, *изоморфную* $Z_3 \times SL_2(3)$, *и* $|H : C_H(K)| = 2$;

(2) Γ *имеет массив пересечений* $\{15,10,1;1,2,15\}$, $|K| = 1$, $r = 6$, *и* $H \in \{A_6, S_6\}$ *или* $H = GL_2(4).Z_2$;

(3) Γ *имеет массив пересечений* $\{80,54,1;1,27,80\}$, $|K| = r = 3$, $|H : C_H(K)| = 2$, T — *экстраспециальная группа порядка* 3^5, $R = D_8 \circ Q_8 \lhd H_a$, $H_a/R = S_5$;

(4) Γ *имеет массив пересечений* $\{728,486,1;1,243,728\}$, $|K| = r = 3$, $SL_2(13) \lhd H_a$, T — *экстраспециальная группа порядка* 3^7 *и* $|H : C_H(K)| = 2$.

§ 1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в монографии Камерона [5, гл. 3]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |X|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u,w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$, где p_{ij}^l — числа пересечения графа.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0) = k, \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений графа* и связаны равенствами $PQ = QP = |X|I$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q. Пусть $\theta_0 > \dots > \theta_{d+1}$ — собственные значения дистанционно регулярного графа Γ диаметра d (собственные значения матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности A графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i $\psi(G)$-инвариантно. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [5, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число вершин x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — рациональное число, то $\chi_i(g)$ целое.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k,\mu(r-1),1;1,\mu,k\}$, $v=r(k+1)$ *и спектром* $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^h$, *где* $f=m(r-1)(k+1)/(m+n)$, $h=n(r-1)(k+1)/(m+n)$ *и* $\mu\neq\lambda$. *Если* $g\in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* f, *отвечающее собственному значению* n, χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* k, *отвечающее собственному значению* -1, *то* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$,

$$\chi_1(g)=((m(r-1)+1)\alpha_0(g)+(1-m)\alpha_3(g))/(r(m+n))+(\alpha_1(g)-(k+1))/(m+n),$$

$$\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/r-1=k-(\alpha_1(g)+\alpha_2(g))/r.$$

Если $|g|=p$ *— простое число, то* $\chi_1(g)-f$ *и* $\chi_2(g)-k$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\ k&k-\mu(r-1)-1&\mu&0\\ 0&\mu(r-1)&k-\mu-1&k\\ 0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1)=n$. Тогда

$$P_1-nI=\begin{pmatrix}-n&1&0&0\\ k&k-\mu(r-1)-1-n&\mu&0\\ 0&\mu(r-1)&k-\mu-1-n&k\\ 0&0&1&-n\end{pmatrix}.$$

Если $(1,x_2,x_3,x_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы P_1-nI, то $x_2=n/k$, $x_3=-1/(m(r-1))$ и $x_4=-1/(r-1)$. Отсюда

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ f&f/m&-(k+1)/(m+n)&-f/(r-1)\\ k&-1&-1&k\\ h&-h/n&(k+1)/(m+n)&-h/(r-1)\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g)=(m(r-1)\alpha_0(g)+(r-1)\alpha_1(g)-\alpha_2(g)-m\alpha_3(g))/r(m+n)$. Так как $\alpha_2(g)=r(k+1)-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_3(g)$, то $\chi_1(g)=((m(r-1)+1)\alpha_0(g)+(1-m)\alpha_3(g))/(r(m+n))+(\alpha_1(g)-(k+1))/(m+n)$.

Аналогично $\chi_2(g)=(k\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_2(g)+k\alpha_3(g))/r(k+1)$. Подставляя $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=r(k+1)-\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/r-1=k-(\alpha_1(g)+\alpha_2(g))/r$.

Остальные утверждения леммы следуют из [6, лемма 1].

Лемма 2 [1, теорема 2.5]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный недвудольный граф с массивом пересечений* $\{k,\mu(r-1),1;1,\mu,k\}$, K *— абелева подгруппа из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, *транзитивная на каждом антиподальном классе и* p *— простой делитель числа* r. *Тогда* p *делит* $k+1$.

Пусть Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$, $r>2$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g\in G$ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что Γ содержит $k+1$ антиподальных классов, в каждом из которых r вершин. Пусть Σ — множество антиподальных классов графа Γ, K — ядро действия G на Σ, $F\in\Sigma$, $a\in F$ и C — ядро действия $G_{\{F\}}$ на F.

Если $\mu=1$, то по предложению 4 из [6] имеем $k=2^e$, $L_2(k)\lhd G$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{2^e,2^e-2,1;1,1,2^e\}$. В дальнейшем предполагается, что $\mu>1$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф и $|g| = p$ — простое число, то либо*

(i) *p не делит r, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = v$ и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$;*

либо

(ii) *p делит r, $\alpha_3(g) = tr$ и $\chi_1(g) = ((1-m)t + \alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$; если $\alpha_3(g) = v$, то $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n)$;*

(2) *если Ω содержит $t > 0$ антиподальных классов, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = r(k+1-t)$, $\chi_2(g) = \alpha_0(g)/r - 1$ и $\chi_1(g) = (m(r-1)+1)\alpha_0(g)/r(m+n) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$;*

(3) *если $\alpha_2(g) = v$, то $\chi_1(g) = -(k+1)/(m+n)$.*

Доказательство. По лемме 1 имеем

$$\chi_1(g) = ((m(r-1)+1)\alpha_0(g) + (1-m)\alpha_3(g))/r(m+n) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n),$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/r - 1 = k - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/r.$$

Пусть Ω — пустой граф. Если $|g|$ не делит r, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = v$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$.

Пусть $|g|$ делит r. Тогда $\alpha_3(g) = tr$, $\chi_2(g) = t - 1$ и $\chi_1(g) = ((1-m)t + \alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$.

Если $\alpha_3(g) = v$, то $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω содержит $t > 0$ антиподальных классов. Тогда $\alpha_3(g) = 0$, $|g|$ делит $k+1-t$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = r(k+1-t)$, $\chi_2(g) = \alpha_0(g)/r - 1$ и $\chi_1(g) = (m(r-1)+1)\alpha_0(g)/r(m+n) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$. Утверждение (2) доказано.

Если $\alpha_2(g) = v$, то ввиду равенства $\chi_1(g) = ((m(r-1)+1)\alpha_0(g) + (1-m)\alpha_3(g))/r(m+n) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$ имеем $\chi_1(g) = -(k+1)/(m+n)$. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство предложения 2 и случай $p = 2$

Всюду в работе предполагается, что $G^\Sigma = \overline{TH}$, где $\overline{T}$ — нормальная элементарная абелева группа порядка p^e, действующая регулярно на Σ, и H — стабилизатор антиподального класса F. Как обычно, T — полный прообраз в G группы $\overline{T}$.

Лемма 4. *Если $m + n = p^s$, $s < e$, то $p = 2$, $\{m, n\} = \{2^{e/2} - 1, 2^{e/2} + 1\}$, $r\mu = 2^e - 4$ или $r\mu = 2^e$ и $\lambda - \mu = \pm 2$.*

Доказательство. Пусть $m + n = p^s$, $s < e$. Имеем $k = nm = p^e - 1$, $r\mu = (m-1)(n+1)$ и $n - m + 2 = p^e - r\mu$, $e < 2s$.

Вычислим разность $(m+n)^2 - r\mu(r\mu + 4)$:

$$\begin{aligned} r\mu(r\mu+4) &= (nm + m - n - 1)(nm + m - n + 3) \\ &= (k+1+m-n-2)(k+1+m-n+2) = (k+1)^2 + 2(k+1)(m-n) + m^2 + n^2 - 2mn - 4, \end{aligned}$$

поэтому

$$(m+n)^2 - r\mu(r\mu+4) = -(k+1)^2 + 2(k+1)(n-m+2) = p^{2e} - 2p^e r\mu,$$

следовательно, $p^{2s} - p^{2e} = r\mu(r\mu + 4 - 2p^e)$ и $r\mu + 4 < 2p^e$.

Далее, $(r\mu + 4 - 2p^e, r\mu)$ делит $2(2 - p^e)$. Если p нечетно, то p-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}. Если p-часть числа $r\mu$ равна p^{2s}, то

$$r\mu + 4 - 2p^e = p^{2s}h + 4 - 2p^e = p^e(p^{2s-e}h - 2) + 4 > 0,$$

где $(h, p) = 1, h > 0$; противоречие. Если p-часть числа $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}, то $(r\mu, p) = 1$, $r\mu + 4 - 2p^e = p^{2s}h$, $(h, p) = 1$, $h < 0$ и $r\mu + 4 = p^e(2 + p^{2s-e}h)$, тем самым p-часть числа $r\mu + 4$ равна p^e. Но $r\mu + 4 = p^e f < 2p^e$, $(f, p) = 1$, $f > 0$, поэтому $f = 1$ и $1 = 2 + p^{2s-e}h$, откуда $h = -1, 2s = e$; противоречие.

Пусть $p = 2$. Если $r\mu = p^e$, то $m - n = 2$, $p^{2s} + p^{2e} = r\mu(r\mu + 4) = 4p^e + p^{2e}$ и $p^{2s} = 4p^e$, значит, $p^{2s-e} = 4$ и $2(s - 1) = e$. Поэтому $m = p^{e/2} + 1$, $n = p^{e/2} - 1$.

Пусть $r\mu \neq p^e$. Число $(r\mu + 4 - 2p^e, r\mu)$ делит $2(2 - p^e) = 4(1 - 2^{e-1})$ и p-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2p^e$ не меньше, чем p^{2s-2}. Если $r\mu = p^{2s-2}x$, то $r\mu + 4 - 2p^e = 2^{2s-2}x + 4 - 2^{e+1} = 2^{e+1}(2^{2s-2-e-1}x - 1) + 4 < 0$ возможно лишь при $s = e/2 + 1$ и $(m, n) = (2^{e/2} - 1, 2^{e/2} + 1)$, $r\mu = 2^e - 4$, $e \geq 4$.

Если $r\mu + 4 - 2p^e = p^{2s-2}y$, то $r\mu + 4 = 2^{e+1} + 2^{2s-2}y = 2^{e+1}(1 + 2^{2s-e-3}y)$, $y \leq -1$, стало быть, $2s - e - 3 < 0$ и $2s < e + 3$. Случай $2s = e + 1$ невозможен, поэтому снова $2s = e + 2$, $(m, n) = (2^{e/2} - 1, 2^{e/2} + 1)$ и $r\mu = 2^e - 4$.

Так как $\lambda - \mu = n - m$, то $\lambda - \mu = \pm 2$.

Лемма 5. *Если $m + n = p^s x$, $x > 1$, $(x, p) = 1$, $s > 0$, $r > 2$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *p нечетно и либо $(m, n) = (p^{e/2} + 1, p^{e/2} - 1)$ и $r\mu = p^e$, либо p не делит $r\mu$ и p-часть числа $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}, $e \geq 2s$, в частности, если $e = 2s$, то $r\mu = p^e - 4$, $(m, n) = (p^{e/2} - 1, p^{e/2} + 1)$;*

(2) *$p = 2$ и либо $(r\mu, 8) = 4$ и 2-часть числа $r\mu + 4 - 2^{e+1}$ равна 2^{2s-2}, либо $(m, n) = (2^{e/2} + 1, 2^{e/2} - 1)$ и $r\mu = 2^e$.*

Доказательство. Пусть $m + n = p^s x$, $x > 1$, $(x, p) = 1$, $s > 0$ и $r > 2$. Имеем $k = nm = p^e - 1$, $r\mu = (m - 1)(n + 1)$, $n - m + 2 = p^e - r\mu$. Из условия $r > 2$ следует, что $m + n = p^s x < p^e$.

Как и выше, получим

$$(m + n)^2 - r\mu(r\mu + 4) = p^{2e} - 2p^e r\mu,$$

следовательно, $p^{2s}x^2 - p^{2e} = r\mu(r\mu + 4 - 2p^e)$ и $r\mu + 4 < 2p^e$.

Далее, $(r\mu + 4 - 2p^e, r\mu)$ делит $2(2 - p^e)$. Если p нечетно, то p-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}. Во втором случае $-p^{2s}z = r\mu + 4 - 2p^e$, $(z, p) = 1$, $z > 0$ и $e \geq 2s$, причем равенство $e = 2s$ возможно лишь при $z = 1$, $r\mu = p^e - 4$ (в частности, если $e = 2$), $(m, n) = (p^{e/2} - 1, p^{e/2} + 1)$. Пусть $r\mu = p^{2s}y$, $(y, p) = 1$. Из условия $r\mu < 2p^e - 4$ получим, что $2s \leq e$, причем равенство $2s = e$ возможно лишь при $y = 1$.

Положим $a = n + 1, b = m - 1$. Тогда $ab = p^{2s}y$, $a - b = p^e - p^{2s}y = p^{2s}(p^{e-2s} - y)$, откуда $ab = b^2 + bp^{2s}(p^{e-2s} - y) = p^{2s}y$, p^s делит b и a, поэтому $a = b$, $e = 2s$, $y = 1$ и $(m, n) = (p^{e/2} + 1, p^{e/2} - 1)$.

Пусть $p = 2$. Так как μ четно, 2 делит $n+1$ и $m-1$. Далее, $(r\mu+4-2^{e+1}, r\mu)$ делит $4(1 - 2^{e-1})$, тем самым 2-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2^{e+1}$ равна 2^{2s-2}, $s \geq 2$.

Если $r\mu = 2^{2s-2}y$, то из условия $r\mu < 2^{e+1} - 4$ получим, что $2s - 2 < e + 1$. Положим $a = n + 1, b = m - 1$. Тогда $ab = 2^{2s-2}y, a - b = 2^{2s-2}(2^{e-2s+2} - y)$, откуда $ab = b^2 + b2^{2s-2}(2^{e-2s+2} - y) = 2^{2s-2}y$ и 2^{s-1} делит b и a, поэтому $a = b$, $e = 2s - 2$, $y = 1$, $(m, n) = (2^{e/2} + 1, 2^{e/2} - 1)$ и $r\mu = 2^e$. Лемма доказана.

Предложение 2. *Выполняется одно из утверждений:*

(1) *T не содержит нормальных в G подгрупп порядка p^e (в частности, действие G на Σ неточное);*

(2) *Γ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, $G_{\{F\}}$ действует дважды транзитивно на F, $K = 1$, $H \in \{A_6, S_6\}$ и окрестность вершины — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$ или $H = GL_2(4).Z_2$ и окрестность вершины — объединение трех изолированных клик.*

Доказательство. Пусть T содержит нормальную в G подгруппу N порядка $k+1$. Тогда любая N-орбита содержит единственный элемент из каждого антиподального класса. Для вершины $a \in \Gamma$ группа G_a действует транзитивно на $[a]$, поэтому каждая N-орбита состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2, и имеется t $(t < r)$ орбит, в каждой из которых a смежна точно с α вершинами, в частности, $k = t\alpha$. Для неединичного элемента $g \in N$ получим $\alpha_2(g) = v$ и по лемме 3 имеем $\chi_1(g) = -(k + 1)/(m + n)$. Теперь ввиду леммы 4 получим $p = 2$, $\{m, n\} = \{2^{e/2} - 1, 2^{e/2} + 1\}$ и $r\mu = 2^e - 4$ или $r\mu = 2^e$.

Далее, G_a действует транзитивно на множестве неединичных элементов из N, и группа NG_a является дважды транзитивной группой подстановок степени 2^e.

Вершина из $[a]$ смежна с $\alpha-1$ вершинами из $a^N - \{a\}$, между $[a]$ и $a^N - \{a\}$ имеется точно $k(\alpha-1)$ ребер, поэтому вершина из $a^N - \{a\}$ смежна «в среднем» с $\alpha-1$ вершинами из $[a]$. Отсюда $\alpha-1 = \mu$ и $k = t(\mu+1)$. Так как $b_1 = (r-1)\mu$, то $\lambda = k-b_1-1 = t+\mu-(r-t)\mu-1$, $t(\mu+1) = r\mu-\mu+1+\lambda$ и $t = r-(r-1+\mu-\lambda)/(\mu+1)$.

Если $t = r - 1$, то G_a действует транзитивно на $\Gamma_3(a)$ и $H = G_{\{F\}}$ действует дважды транзитивно на F. Пусть $\widetilde{H} = H/C$ и $\widetilde{S}$ — цоколь группы $\widetilde{H} = H/C$. Группа K изоморфна регулярной нормальной подгруппе из $\widetilde{H}$. Поэтому $K = 1$, если $\widetilde{H}$ — почти простая группа, и K — элементарная абелева 2-группа порядка r, если $\widetilde{H}$ — аффинная группа.

Имеем $k = (r - 1)(\mu + 1)$, $\lambda = r - 2$ и $\lambda - \mu = (r - 1) - (\mu + 1)$, поэтому $n = r - 1$, $m = \mu + 1$ и $m + n = r + \mu$ делит 2^e. Ввиду неравенства $m \le n^2$ получим $\mu \le r^2 - 2r$. Теперь $m = \mu + 1 = 2^{e/2} - 1$, $n = r - 1 = 2^{e/2} + 1$ и $r\mu = 2^e - 4$ или $m = \mu + 1 = 2^{e/2} + 1$, $n = r - 1 = 2^{e/2} - 1$ и $r\mu = 2^e$.

В случае почти простого действия H на F возможны только знакопеременный, линейный, симплектический и G_2-типа случаи. Если $\widetilde{S} = A_r$, то $r \in \{6, 7\}$ и $p^e = 2^4$. С учетом равенства $2^e - 1 = (r - 1)(\mu + 1)$ имеем $r = 6$, $\mu = 2$. Далее, $|K| = 1$ и $H_a = A_5$. Компьютерные вычисления в GAP [7] показывают, что в этом случае существует дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ и окрестность вершины — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$.

Если $\widetilde{S} = L_d(q)$, то $r = (q^d - 1)/(q - 1)$ четно, поэтому $d = 2$, $q = 5$ и $r = 6$. Компьютерные вычисления в GAP [7] показывают, что в этом случае существует дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, $H = GL_2(4).Z_2$ и окрестность вершины — объединение трех изолированных 5-клик.

Если $\widetilde{H} = Sp_{2m}(2)$, то $r = 2^{2m-1} \pm 2^{m-1}$, $m \ge 3$; противоречие с тем, что $p^e = 2^{2m}$ и $r - 1$ не делит $2^{2m} - 1$.

Можно считать, что для действия H на F выполняется аффинный случай, поэтому $\widetilde{S}$ — регулярная элементарная абелева группа порядка $r = 2^f$, $\widetilde{H} = \widetilde{S}\widetilde{H}_a$ и реализуется одна из следующих возможностей:

(i) линейные $f = cd$, $d \ge 2$ и $SL_d(2^c) \triangleleft \widetilde{H}_a \le \Gamma L_d(2^c)$;

(ii) симплектические $f = cd$, d четно, $d \geq 4$ и $Sp_d(2^c) \lhd \widetilde{H}_a \leq Z_{2^c-1} \circ \Gamma Sp_d(2^c)$;

(iii) G_2-типа $f = 6c$ и $G_2(2^c)' \lhd \widetilde{H}_a$;

(iv) одномерные $\widetilde{H}_a \leq \Gamma L_1(2^f)$;

(v) исключительные $\widetilde{H}_a \in \{A_6, S_6, A_7\}$.

Так как K — регулярная элементарная абелева группа порядка 2^f и $N \leq C_G(K)$, группа $C_G(K) = K \times N$ транзитивна на Σ и $C = 1$. Далее, $G = (K \times N)H_a$, G/N действует 2-транзитивно на F и G/K действует 2-транзитивно на Σ, причем $|K| = 2^{e/2}$ и $|N| = 2^e$; противоречие.

Если $t < r-1$, то Γ содержит $2(k+1)$-коклику и ввиду границы Хофмана для коклик имеем $2(k+1) \leq m(k+1)r/(k+m)$, поэтому $n+1 \leq r/2$ и $m-1 \geq 2\mu$. Так как G_a действует транзитивно на множестве Δ, состоящем из N-орбит, пересекающих $[a]$, каждая вершина из $[a]$ смежна с вершинами s орбит из Δ для некоторого $s < t-1$ (в случае $s = t-1$ множество вершин, лежащих в a^N, вместе с вершинами орбит из Δ индуцирует связный подграф из Γ).

Число ребер между объединением N-орбит, в которых нет a и смежных с a вершин, и $[a]$ равно $(r-t-1)k\mu$. Поэтому вершина из $[a]$ смежна точно с $(r-t-1)\mu$ вершинами в этом объединении, $r-t-1$ делится на $\mu+1$ и $(r-t-1)\mu/(\mu+1) = t-s-1$. Отсюда $(r-2t+s)\mu = t-s-1$, $t-s-1 = z\mu$ и $r-t-1 = z(\mu+1)$, следовательно, $t = s+1+z\mu$ и $r = s+2+z(2\mu+1)$. Так как $s(\mu+1) = \lambda+(t-1)\mu$, то $s = z\mu^2+\lambda$ и $t \geq z\mu^2+z\mu+1$. Имеем $t(\mu+1) = k = mn$, $m \geq 2\mu+1$, поэтому $n \leq t(\mu+1)/(2\mu+1)$.

Граф $\Omega = \widetilde{\Gamma}$ на множестве N-орбит реберно регулярен с параметрами (r, t, λ_Ω), где $\lambda_\Omega = s$. Вершина из $\Omega - \tilde{a}^\perp$ смежна «в среднем» с $t\mu/(\mu+1)$ вершинами из $\Omega(\tilde{a})$. Если Ω — сильно регулярный граф, то $t = (\mu+1)y$, $s = y\mu + (\lambda-\mu)/(\mu+1)$; противоречие с тем, что по лемме 4 $\lambda - \mu = \pm 2$. Значит, Ω — не сильно регулярный граф, и G_a имеет не менее двух орбит на вершинах из $F - \{a\}$, не смежных с вершинами из a^N.

Допустим, что вершина b из $\Omega - \tilde{a}^\perp$ смежна с $z\mu+z-1$ вершинами из $\Omega - \tilde{a}^\perp$. Тогда b смежна с $s-z+2$ вершинами из $\Omega(\tilde{a})$. Поэтому $s-z+2 < t\mu/(\mu+1)$ и $z\mu^2 \leq s < z\mu^2+z\mu+z-\mu-2$, в частности, $z > 1$ и $\lambda < z\mu+z-\mu-2$.

Заметим, что для вершины a действие G_a на $a^N - \{a\}$ импримитивное с блоками вида $[b] \cap a^N$ для t вершин $b \in F$, смежных с вершинами из a^N. Далее, выполняется одна из следующих возможностей:

(i) линейные $e = cd$, $d \geq 3$ и $SL_d(2^c) \lhd G_a \leq \Gamma L_d(2^c)$;

(ii) симплектические $e = cd$, d четно, $d \geq 1$, $q = 2^c$ и $Sp_d(q) \lhd G_a \leq Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$;

(iii) G_2-типа $e = 6c$, $q = 2^c$ и $G_2(q)' \lhd G_a \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$;

(iv) одномерные $G_a \leq \Gamma L_1(2^e)$;

(v) исключительные $p^e = 2^4$ и $G_a \in \{A_6, S_6, A_7\}$.

Если $p^e = 2^4$, то ввиду леммы 4 либо $(m,n) = (3,5)$, $r\mu = 12$, $t(\mu+1) = r\mu+3 = 15$, поэтому $\mu = 2, 4$, $r = 6, 3$, но $r > \mu+4$; противоречие, либо $(m,n) = (5,3)$, $r\mu = 16$, $t(\mu+1) = r\mu-1 = 15$, $t = r-(r+1)/(\mu+1)$, $r > \mu$, значит, $\mu = 2$, $r = 8$, но $(r-\mu)$ делится на $(\mu+1)^2$; противоречие. Тем самым $e \geq 6$ и случай (v) невозможен.

В одномерном случае получим противоречие с действием Зингер-цикла на ненулевых векторах. В линейном случае с $d \geq 3$ для $E \in \Sigma - \{F\}$ подгруппа $G_a \cap G_{\{E\}}$ действует транзитивно на E; противоречие с тем, что $[a]$ содержит единственную вершину из E.

По [8] минимальная подстановочная степень представления группы $Sp_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случаев $d=2$, $q\in\{5,7,9,11\}$ и $d=4$, $q=3$. В симплектическом случае с $d>2$ группа $G_a^{(\infty)}=Sp_d(q)$ имеет подстановочное представление нечетной степени, делящей t. Ввиду [9] стабилизатор точки в этом представлении содержится в параболической максимальной подгруппе из $Sp_d(q)$, поэтому стабилизатор точки фиксирует сингулярную прямую в соответствующем симплектическом пространстве, $\mu+1$ делит $q-1$ и t делится на $(q^d-1)/(q-1)$. Отсюда $G_a^{(\infty)}$ действует тривиально на множестве вершин из $F-\{a\}$, не смежных с вершинами из a^N. Противоречие с тем, что тогда $\Omega(\tilde{b})=\Omega(\tilde{a})$ для любой вершины $b\in\Omega-\tilde{a}^{\perp}$. Значит, $d=2$, $2^e=q^2$ и $z\mu+z\geq q+1$. Теперь $L_2(2^c)\triangleleft H/K\leq GL_2(2^c).Z_c$, $t(\mu+1)=2^{2c}-1$ и по лемме 4 число $r\mu$ равно 2^{2c} или $2^{2c}-4$. Заметим, что действие $H_a^{(\infty)}=Sp_2(2^c)$ на изотропных одномерных подпространствах примитивно, поэтому $\mu+1$ делит 2^c-1 и t делится на 2^c+1. Так как следующая за минимальной степень подстановочного представления группы $L_2(2^c)$ равна $2^{c-1}(2^c-1)$ или $2^{c/2}(2^c+1)$ (c четно), либо $z\mu+z$ делится на 2^c+1, либо $z\mu+z\geq 2^{c-1}(2^c-1)+(2^c+1)=2^{c-1}(2^c+1)+1$.

Пусть $r\mu=2^{2c}$. Тогда $\mu=2^l$, $r=z(\mu+1)^2+\mu=2^{2c-l}$. Так как 2^c+1 не делит $2^l(2^{2c-2l}-1)$, то $r\leq z\mu+z$; противоречие.

Пусть $r\mu+4=2^{2c}$. Тогда $r=z\mu^2+2z\mu+\mu+z+4$ и $t=z\mu^2+z\mu+\mu+3$. Если $z\mu+z$ делится на 2^c+1, то t взаимно просто с $\mu+1$, $(t,2^c-1)=(\mu+3,2^c+1)$ и 2^c+1 делит $\mu+3$. Таким образом, $\mu=2^c-2$ и $r=2^c+2$; противоречие. Значит, $r=mu(z\mu+z)+(z\mu+z)+\mu+4\geq(\mu+1)(2^{c-1}(2^c+1)+1)+\mu+4>2^{2c}$; противоречие.

По [10] минимальная подстановочная степень представления группы $G_2(2^c)$ равна 50 в случае $c=1$, равна 416 в случае $c=2$ и равна $(q^6-1)/(q-1)$ в случае $c>2$. Поэтому в случае G_2-типа группа $H_a^{(\infty)}=G_2(2^c)'$ поточечно фиксирует $r-t-1=z\mu+z$ вершин из $F-\{a\}$. В случае $c>2$ приходим к противоречию, как и выше. В случае $c=1$ имеем $2^e=2^6$ и $z\mu+z\geq 50$; противоречие. В случае $c=2$ получим $2^e=2^{12}=4096$ и $z\mu+z\geq 416$. Отсюда $\mu=2$ и $t=1365$; противоречие с тем, что $\mu+1$ не делит t. Предложение 2 доказано.

Всюду в работе будем предполагать, что Γ не является графом с массивом пересечений $\{15,10,1;1,2,15\}$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$m+n$ делит mp^e;*

(2) *если T содержит нормальную в G подгруппу N порядка, кратного p^e, то $|N|$ делится на r;*

(3) *$|K|=r$, K/K' является p-группой, $(m,n)=(p^{e/2}+1,p^{e/2}-1)$ и $r\mu=p^e$.*

Доказательство. Для неединичного элемента $g\in K$ имеем $\alpha_3(g)=v$ и по лемме 4 получим $\chi_1(g)=-m(k+1)/(m+n)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть T содержит нормальную в G подгруппу N порядка, кратного p^e. Если $|N|$ не делится на r, то частное $\widetilde{\Gamma}$ на множестве $K\cap N$-орбит является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом и группа $\widetilde{T}$ содержит нормальную в $\widetilde{G}$ подгруппу порядка p^e. Противоречие с тем, что для графа с массивом пересечений $\{15,10,1;1,2,15\}$ максимальное значение r равно 6. Утверждение (2) доказано.

Из утверждения (2) следует, что $|K|=r$. Теперь из леммы 2 вытекает, что K/K' является p-группой. Если r не делится на p, то T содержит подгруппу T_0 порядка p^e. Из действия T_0 на силовской s-подгруппе S из K следует, что

T_0 централизует $S/\Phi(S)$, поэтому $[S,T_0]=1$ и T_0 централизует K. Теперь T_0 — характеристическая подгруппа из T; противоречие с утверждением (2). Значит, r делится на p, и ввиду леммы 5 получим, что $(m,n)=(p^{e/2}+1,p^{e/2}-1)$ и $r\mu=p^e$.

Ввиду леммы 6 группа H является полупрямым произведением групп K и G_a.

Лемма 7. *Если $p=2$, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *$r\mu=2^e$, e четно, $m=2^{e/2}+1$, $n=2^{e/2}-1$, $\mu=2^l$, Γ имеет массив пересечений $\{2^e-1,(2^{e-l}-1)2^l,1;1,2^l,2^e-1\}$, и если H содержит элемент порядка 2^e-1, то $l=e/2-1$ и $\alpha_1(g)=(2^e-1)2^{e/2}$;*

(2) *исключительный, одномерный и линейный случаи невозможны;*

(3) *в G_2-типа и в симплектическом случаях имеем $e=2dc$, $d\geq 1$, r делит 2^c и $Sp_{2d}(2^c)\lhd H_a$ или $d=3$ и $G_2(2^c)'\lhd H_a$.*

Доказательство. Пусть $p=2$. Применим лемму 5. Если $r\mu$ не делится на 8, то 2-часть числа $r\mu=(m-1)(n+1)$ равна 4. В этом случае K содержит подгруппу K_0 индекса 2, инвертируемую инволюцией из $K-K_0$, K_0 централизует $\overline{T}$ и T содержит нормальную в G подгруппу порядка 2^e; противоречие с леммой 6. Значит, $r\mu=2^e$. Тогда e четно, $m=2^{e/2}+1$, $n=2^{e/2}-1$, $\mu=2^l$ и Γ имеет массив пересечений $\{2^e-1,(2^{e-l}-1)2^l,1;1,2^l,2^e-1\}$ и спектр $(2^e-1)^1,(2^{e/2}-1)^{2^{e/2-1}(2^{e/2}+1)(2^{e-l}-1)},-1^{2^e-1},-(2^{e/2}+1)^{2^{e/2-1}(2^{e/2}-1)(2^{e-l}-1)}$.

Если g — элемент порядка 2^e-1, $\alpha_1(g)=(2^e-1)w$, то $\chi_1(g)=(m(r-1)+\alpha_1(g)-k)/(m+n)$ и $m(r-1)+\alpha_1(g)-k=(2^{e/2}+1)(2^{e-l}-1)+(2^e-1)(w-1)=(2^{e/2}+1)(2^{e-l}-1+(2^{e/2}-1)(w-1))=(2^{e/2}+1)(2^{e-l}+(2^{e/2}-1)w-2^{e/2}))$ делится на $2^{e/2+1}$, поэтому либо $w=2^{e/2+1},l=e/2$, либо $w=2^{e/2}$, $l=e/2-1$. Но в первом случае получим противоречие с тем, что $\alpha_1(g)>kr$. Утверждение (1) доказано.

В исключительном случае $p^e=2^4$ и $\overline{H}\in\{A_6,S_6,A_7\}$. Тогда $k=15$, $n=3$, $m=5$. Далее, $C_G(K)$ содержит $\overline{H}'$, поэтому $K\leq Z(T)$. Если $K\leq T'$, то для подгруппы K_0 индекса 2 из K группа T/K_0 экстраспециальна; противоречие с тем, что группа $O_4^{\pm}(2)$ не содержит A_6. Для подгруппы K_0 индекса 2 из K частное $\widetilde{\Gamma}$ на множестве K_0-орбит является дистанционно транзитивным графом с $\tilde{r}=2$. Поэтому группа H_a изоморфна A_6 или S_6.

Если $r=4$, то ввиду леммы 6 группа T — центральное произведение Z_4 и экстраспециальной группы порядка 32 или элементарная абелева группа порядка 64. В последнем случае T не содержит нормальных в G подгрупп порядка 32 и 64. Компьютерные вычисления в GAP [7] показывают, что указанный модуль существует, но графа с массивом пересечений $\{15,12,1;1,4,15\}$ нет. В первом случае компьютерные вычисления в GAP [7] показывают, что граф с массивом пересечений $\{15,12,1;1,4,15\}$ не возникает.

Если $r=8$, то для нормальной в G подгруппы K_0 порядка 2 из K граф $\overline{\Gamma}$ на множестве K_0-орбит имеет $\bar{r}=4$; противоречие с доказанным в предыдущем абзаце.

В одномерном случае H содержит элемент g порядка 2^e-1, и ввиду утверждения (1) Γ имеет массив пересечений $\{2^e-1,(2^{e/2+1}-1)2^{e/2-1},1;1,2^{e/2-1},2^e-1\}$. Далее, $K=[K,g]C_K(g)$ и $|[K,g]|$ делит (2^e-1), поэтому $K_0=C_K(g)\neq 1$. Заметим, что K_0 централизует группу $\overline{T}$, поэтому группа $G_1=C_G(K_0)$ действует дважды транзитивно на Σ и для подгруппы K_1 индекса 2 из $\mathrm{C}_K(K_0)$ частное графа $\overline{\Gamma}$ на множестве K_1-орбит является дистанционно транзитивным графом с $\bar{r} = 2$; противоречие.

В линейном и G_2-типа случаях группа K централизует $H_a^{(\infty)}$, поэтому $G_1 = C_G(K)$ действует дважды транзитивно на Σ и для подгруппы K_0 индекса 2 из K частное графа $\overline{\Gamma}$ на множестве K_0-орбит является дистанционно транзитивным графом с $\bar{r} = 2$. Отсюда r делит 2^c и $G_2(2^c) \lhd H_a$. Утверждение (2) доказано.

В симплектическом случае $e = 2dc$ и $Sp_{2d}(2^c) \lhd H_a$. Как и выше, r делит 2^c. Лемма доказана.

§ 3. Случай $p \neq 2$

Всюду в работе предполагается, что p нечетно. Напомним, что ввиду леммы 6 $(m, n) = (p^{e/2} + 1, p^{e/2} - 1)$ и $r\mu = p^e$.

Лемма 8. *В экстраспециальном случае выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p^e = 3^4$, $R = D_8 \circ Q_8 \lhd H_a$, $H_a/R \leq S_5$, $n = 8$, $m = 10$, $r = 3$, T — *экстраспециальная группа порядка* 3^5, Γ *имеет массив пересечений* $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$;

(2) $p^e = 5^2$, $SL_2(3) \leq H_a \leq GL_2(3)$, $r = \mu = 5$, $n = 4$, $m = 6$, T — *экстраспециальная группа порядка* 5^3 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{24, 20, 1; 1, 5, 24\}$;

(3) $p^e = 7^2$, $H = GL_2(3)$, $n = 6$, $m = 8$, $r = \mu = 7$, T — *экстраспециальная группа порядка* 7^3 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{48, 42, 1; 1, 7, 48\}$.

Доказательство. Пусть выполняется экстраспециальный случай. Если $p^e = 3^4$, то $k = 80$, $R = D_8 \circ Q_8 \lhd H_a$, $H_a/R \leq S_5$, 5 делит $|H_a|$, $r\mu = 81$, $n = 8$, $m = 10$ и Γ имеет массив пересечений $\{80, (3^{4-l} - 1)3^l, 1; 1, 3^l, 80\}$ и спектр $80^1, 8^{45(3^{4-l}-1)}, -1^{80}, -10^{36(3^{4-l}-1)}$, $l \in \{1, 2, 3\}$. В этом случае подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R$ с помощью H_a/R. Если T — абелева группа, то $[T, R_a]$ — характеристическая подгруппа из G порядка 81; противоречие. Поэтому T — неабелева группа и $[R, T]$ централизует K. Если T' не содержит K, то, повторив рассуждение для частного графа на множестве T'-орбит, получим противоречие. Итак, $T' = Z(T) = K$ — элементарная абелева группа, и $[R_a, T]$ централизует K. Отображение $(\bar{g}, \bar{h}) \mapsto [g, h]$ для $g, h \in T - Z(T)$ задает знакопеременную билинейную форму на линейном пространстве $\overline{T}$ над полем из $|K|$ элементов. Если $r > 3$, то R_a не содержится в $Sp_d(|K|)$ $(d = 3^4/|K|)$; противоречие.

Если $p^e = 5^2$, то $k = 24$, $|H_a : R| \leq 2$, $R \leq SL_2(3) \circ Z_4$. Так как $r\mu = 25$, то $r = \mu = 5$, $n = 4$, $m = 6$, Γ имеет массив пересечений $\{24, 20, 1; 1, 5, 24\}$ и спектр $24^1, 4^{60}, -1^{24}, -6^{40}$. В этом случае подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R'$ с помощью H_a/R'. Если T — абелева группа, то $[T, R]$ — характеристическая подгруппа из G порядка 25; противоречие. Поэтому T — экстраспециальная группа и $SL_2(3) \leq H_a \leq GL_2(3)$.

Если $p^e = 7^2$, то $k = 48$, $|H_a : R| \leq 2$ и $R \leq SL_2(3) \circ Z_6$. Далее, $r\mu = 49$, $r = \mu = 7$, $n = 6$, $m = 8$, Γ имеет массив пересечений $\{48, 42, 1; 1, 7, 48\}$ и спектр $48^1, 6^{168}, -1^{48}, -8^{126}$. Как и в случае $p^e = 25$, получим, что T — экстраспециальная группа и $H_a = GL(2, 3)$.

Если $p^e = 11^2$, то $k = 120$, $|H_a : R| \leq 2$ и $R \leq SL_2(3) \circ Z_{10}$, то $r\mu = 121$ $r = \mu = 11$, $n = 10$, $m = 12$, Γ имеет массив пересечений $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$ и спектр $120^1, 10^{660}, -1^{120}, -12^{550}$. Как и в случае $p^e = 25$, получим, что T — экстраспециальная группа; противоречие с тем, что $SL_2(3) \circ Z_{10}$ не содержится в $Sp_2(11)$.

Если $p^e = 23^2$, то $k = 528$, $|H_a : R| \leq 2$ и $R \leq SL_2(3) \circ Z_{22}$. Далее, $r\mu = 529$, $n = 22$, $m = 24$, $r = \mu = 23$, Γ имеет массив пересечений $\{528, 506, 1; 1, 23, 528\}$ и спектр $528^1, 22^{6072}, -1^{528}, -24^{5566}$. Как и в случае $p^e = 25$, получим, что T — экстраспециальная группа; противоречие с тем, что $SL_2(3) \circ Z_{22}$ не содержится в $Sp_2(23)$.

Лемма 9. *В исключительном случае выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p^e = 3^6$, $H_a = SL_2(13)$, $k = 728$, $n = 26$, $m = 28$, $r = 3$, T — экстраспециальная группа порядка 3^7 и Γ имеет массив пересечений $\{728, 486, 1; 1, 243, 728\}$;

(2) $p^e = 9^2$, $k = 80$, $|H_a : R| \leq 2$, $R \leq SL_2(5) \circ Z_8$, $n = 8$, $m = 10$, $r = 3$, T — экстраспециальная группа порядка 3^5, Γ имеет массив пересечений $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$;

(3) $p^e = 11^2$, $k = 120$, $|H_a : SL_2(5)| \leq 2$, $n = 10$, $m = 12$, $r = \mu = 11$, T — экстраспециальная группа порядка 11^3 и Γ имеет массив пересечений $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$.

Доказательство. Пусть выполняется исключительный случай. Если $p^e = 3^6$, $SL_2(13) \lhd H$, то $k = 728$. Далее, $r\mu = 729$, $n = 26$, $m = 28$, Γ имеет массив пересечений $\{728, (3^{6-l}-1)3^l, 1; 1, 3^l, 728\}$, $1 \leq l \leq 5$, и спектр $728^1, 26^{378(3^{6-l}-1)}$, $-1^{728}, -28^{351(3^{6-l}-1)}$. В этом случае $H = K \times H_a$, $SL_2(13) \lhd H_a$, поэтому $[H_a, T]$ централизует K. Если T — элементарная абелева группа порядка 3^7, то она не содержит нормальных в G подгрупп порядка 3^6. Компьютерные вычисления показывают, что имеется единственное вложение $SL_2(13)$ в $GL_7(3)$ (с точностью до сопряжения в $GL_7(3)$). Значит, $K \leq T'$, $T' = Z(T) = K$ — элементарная абелева группа. Так как $Sp_d(|K|)$ не содержит $SL_2(13)$ в случае $3^d|K| = 3^6$ и $|K| > 3$, то $r = 3$ и T — экстраспециальная группа порядка 3^7.

Если $p^m = 9^2$, то $k = 80$, $|H_a : R| \leq 2$ и $R \leq SL_2(5) \circ Z_8$. По лемме 6 получим, что $r = 3^{4-l}$, $l = 1, 2, 3$, $n = 8$, $m = 10$, Γ имеет массив пересечений $\{80, (3^{4-l}-1)3^l, 1; 1, 3^l, 80\}$ и спектр $80^1, 8^{45(3^{4-l}-1)}, -1^{80}, -10^{36(3^{4-l}-1)}$. Если T — элементарная абелева группа порядка 3^5, то она не содержит нормальных в G подгрупп порядка 3^4. Компьютерные вычисления в GAP [7] показывают, что этот случай невозможен. Поэтому $K \leq T'$ и $T' = Z(T) = K$ — элементарная абелева группа. Так как $Sp_2(9)$ не содержит $SL_2(5) \circ Z_4$, то $r = 3$ и T — экстраспециальная группа порядка 3^5. Отсюда $|H_a : SL_2(5)| = 2$ ($Sp_4(3)$ не содержит $SL_2(5) \circ Z_4$).

Если $p^e = 11^2$, то $k = 120$, $|H_a : R| \leq 2$ и $R \leq SL_2(5) \circ Z_{10}$. Поэтому $r = \mu = 11$, $n = 10$, $m = 12$, Γ имеет массив пересечений $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$ и спектр $120^1, 10^{110}, -1^{120}, -12^{132}$.

Если $p^e = 19^2$, то $k = 360$, $|H_a : R| \leq 2$ и $R \leq SL_2(5) \circ Z_{18}$. Далее, $r\mu = 361$, $n = 18$, $m = 20$, $\mu = r = 19$, Γ имеет массив пересечений $\{360, 342, 1; 1, 19, 360\}$ и спектр $360^1, 18^{3420}, -1^{360}, 20^{3078}$. Так как H_a содержит подгруппу индекса k, то R содержит $SL_2(5) \circ Z_6$.

Если $p^e = 29^2$, то $k = 840$, $|H_a : R| \leq 2$ и $R \leq SL_2(5) \circ Z_{28}$. Далее, $r\mu = 841$, $r = \mu = 29$, $n = 28$, $m = 30$, Γ имеет массив пересечений $\{840, 812, 1; 1, 29, 840\}$ и спектр $840^1, 28^{12180}, -1^{840}, -30^{11368}$. Так как H_a содержит подгруппу индекса r, то R содержит $SL_2(5) \circ Z_{14}$.

Если $p^m = 59^2$, то $k = 3480$ и $R \leq SL_2(5) \circ Z_{58}$. Далее, $r\mu = 3481$, $r = \mu = 59$, $n = 58$, $m = 60$, Γ имеет массив пересечений $\{3480, 3422, 1; 1, 59, 3480\}$ и спектр $3480^1, 58^{102660}, -1^{3480}, -60^{99238}$. Так как H_a содержит подгруппу индекса r, то R содержит $SL_2(5) \circ Z_{29}$.

Теперь в случае $p \geq 11$ T — экстраспециальная группа порядка p^3. Если $p \geq 19$, то получим противоречие с тем, что $Sp_2(p)$ не содержит R.

Лемма 10. *В одномерном случае имеем* $H_a \leq GL_1(p^e).Z_e$, $e = 2$, $n = -1+p$, $m = 1+p$, Γ *имеет массив пересечений* $\{p^2-1, (p-1)p, 1; 1, p, p^2-1\}$ *и* $\alpha_1(g) = p(p^2-1)$.

Доказательство. Пусть $\overline{H} \leq GL_1(p^e).Z_e$. Пусть R — нормальная циклическая подгруппа порядка p^e-1 из H_a, порожденная элементом g, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega = F$, по лемме 3 $\alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (m(r-1)+\alpha_1(g)-k)/(m+n)$. Пусть y — примитивный элемент из R простого порядка s и $R_0 = \langle y \rangle$.

Если $K = K'$, то $T = K \times [T, R_0]$ и T содержит нормальную в G подгруппу порядка p^e; противоречие. Значит, $K \neq K'$, и, рассмотрев частное графа Γ на множестве K'-орбит, можно считать, что K — абелева p-группа. Если K не содержится в T', то, рассмотрев частное $\widetilde{\Gamma}$ на множестве T'-орбит с группой автоморфизмов $\widetilde{G} = G/T'$, получим, что $\widetilde{T} = \widetilde{K} \times [\widetilde{T}, \widetilde{R}_0]$ и $\widetilde{T}$ содержит нормальную в $\widetilde{G}$ подгруппу порядка p^e; противоречие с леммой 5. Так как K централизует $[T, R_0]$, то $Z(T) = T' = K$ и группа автоморфизмов группы T содержит элемент порядка p^e-1. Далее, для подгруппы K_1 индекса p из K фактор-группа T/K_1 является экстраспециальной группой, поэтому $e = 2$, $n = -1+p$, $m = 1+p$, Γ имеет массив пересечений $\{p^2-1, (p-1)p, 1; 1, p, p^2-1\}$ и спектр $(p^2-1)^1, (-1+p)^{p(p^2-1)/2}, -1^{p^2-1}, (-1-p)^{p(p-1)^2/2}$.

Так как $\chi_1(g) = (m(r-1)+\alpha_1(g)-k)/(m+n)$, то $m+n = 2p$ делит $(p^2-1)\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = p(p^2-1)$.

Лемма 11. *В симплектическом случае* $e = 2dc$, $d \geq 2$, $Sp_{2d}(p^c) \lhd H_a \leq \Gamma Sp_{2d}(p^c)$, $k = p^{2dc}-1$, $m = p^{dc}+1$, $n = p^{dc}-1$, $r\mu = p^{2dc}$, $\mu = p^l$, Γ *имеет массив пересечений* $\{p^{2dc}-1, (p^{2dc-l}-1)p^l, 1; 1, p^l, p^{2dc}-1\}$.

Доказательство. Пусть $Sp_{2d}(p^c) \lhd H$. Далее, $C_G(K)$ содержит $\overline{TH}^{(\infty)}$, ввиду леммы 6 имеем $|Z(K)| = r$, и K — подгруппа порядка p^b из $Z(T)$. Если $K \leq T'$, то $K = T'$ — элементарная абелева p-группа. Если же K не содержится в T', то, рассмотрев частное графа $\overline{\Gamma}$ на множестве $\Phi(T)$-орбит, убедимся, что $T/\Phi(T)$ является неразложимым $GF(p)Sp_{2d}(p^c)$-модулем; противоречие с [11]. Таким образом, T — специальная p-группа, действующая регулярно на множестве вершин графа Γ, поэтому r делит p^c.

Если $r\mu = p^{2dc}$, то $n = -1+p^{dc}$, $m = 1+p^{dc}$, Γ имеет массив пересечений $\{p^{2dc}-1, (r-1)p^{2dc}/r, 1; 1, p^{2dc}/r, p^{2dc}-1\}$ и спектр $(p^e-1)^1, (-1+p^{e/2})^{p^{e/2}(r-1)(1+p^{e/2})/2}, -1^{p^e-1}, (-1-p^{e/2})^{p^{e/2}(r-1)(-1+p^{e/2})/2}$.

Лемма 12. *В линейном случае* $SL_2(p^c) \lhd H_a \leq \Gamma L_2(p^c)$, r *делит* p^c *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{p^{2c}-1, (r-1)p^{2c}/r, 1; 1, p^{2c}/r, p^{2c}-1\}$.

Доказательство. В линейном случае $e = cd$, $d \geq 2$ и $SL_d(p^c) \lhd H_a \leq \Gamma L_d(p^c)$. Далее, $C_G(K)$ содержит $\overline{TH}^{(\infty)}$, ввиду леммы 6 имеем $|Z(K)| = r$, K — подгруппа из $Z(T)$. Если $K \leq T'$, то $K = T'$ — элементарная абелева p-группа. Если же K не содержится в T', то, рассмотрев частное графа $\overline{\Gamma}$ на множестве $\Phi(T)$-орбит, убедимся, что $T/\Phi(T)$ является неразложимым $GF(p)L_d(p^c)$-модулем; противоречие с [6]. Таким образом, T — специальная p-группа, действующая регулярно на множестве вершин графа Γ. Для подгруппы K_0 индекса p из K и $\widetilde{G} = G/K_0$ группа $\widetilde{T}$ экстраспециальна. Следовательно, $SL_d(p^c) \subseteq Sp_d(p^c)$, $d = 2$, r делит p^c и Γ имеет массив пересечений $\{p^{2c}-1, (r-1)$

$p^{2c}/r, 1; 1, p^{2c}/r, p^{2c}-1\}$ и спектр $(p^e-1)^1, (-1+p^{e/2})^{p^{e/2}(r-1)(1+p^{e/2})/2}, -1^{p^e-1}$, $(-1-p^{e/2})^{p^{e/2}(r-1)(-1+p^{e/2})/2}$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Godsil C. D., Liebler R. A., Praeger C. E.* Antipodal distance transitive covers of complete graphs // Europ. J. Comb. 1998. V. 19, N 4. P. 455–478.

2. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1989.

3. *Махнев А. А., Падучих Д. В., Циовкина Л. Ю.* Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda = \mu$ // Докл. РАН. 2013. Т. 448, № 1. С. 22–27.

4. *Cameron P. J.* Finite permutation groups and finite simple groups // Bull. London Math. Soc. 1981. V. 13, N 1. P. 1–22.

5. *Cameron P. J.* Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. (London Math. Soc. Student Texts; V. 45).

6. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Геодезические графы с некоторыми условиями однородности // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 5. С. 589–591.

7. The GAP Group, GAP — groups, algorithms, and programming. Version 4.4.12. 2008. URL: http://www.gap-system.org

8. *Мазуров В. Д.* Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 267–287.

9. *Liebeck M. W., Saxl J.* The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. 1985. V. 31, N 2. P. 250–264.

10. *Васильев А. В.* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 663–684.

11. *Jones W., Parshall B.* On the 1-cohomology of finite groups of Lie type // Proc. Conf. Finite Groups/ eds. W. R. Scott, F. Gross. New York: Acad. Press, 1976. P. 313–327.

Статья поступила 29 октября 2012 г., окончательный вариант — 20 февраля 2013 г.

Махнев Александр Алексеевич, Падучих Дмитрий Викторович,
Циовкина Людмила Юрьевна
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
`makhnev@imm.uran.ru`, `dpaduchikh@gmail.com`, `l.tsiovkina@gmail.com`