Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.983+517.968.25

О ПОДОБИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В L_p ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ 1–ГО ИЛИ 2–ГО РОДА

В. Б. Коротков

Аннотация. Построен пример компактного оператора 3-го рода в L_p ($p \neq 2$), не подобного никаким интегральным операторам 1-го или 2-го рода. Этот пример показывает, что не каждое линейное интегральное уравнение 3-го рода в L_p ($p \neq 2$) может быть сведено линейной непрерывной обратимой заменой к эквивалентному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода. Пример доказывает также невозможность характеризации интегральных и карлемановских интегральных операторов в L_p ($p \neq 2$) в терминах спектра и его компонент.

Ключевые слова: почти компактный оператор, интегральный оператор 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p, интегральное уравнение 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p, подобные операторы, предельный спектр.

Пусть (X, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой $\mu, L_p = L_p(X, \mu)$, $\|\cdot\|$ — норма в L_p. Через $B(L_p)$ обозначим совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из L_p в L_p, через T^* — оператор, сопряженный к оператору $T \in B(L_p)$, через 1 — тождественный оператор.

Определение 1. Оператор $T \in B(L_p)$ называется *интегральным*, если существует определенная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$-измеримая $(\mu \times \mu)$-почти всюду конечная функция $K(s,t)$ такая, что для всех $f \in L_p$

$$Tf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t)$$

при почти всех $s \in X$ (интеграл здесь и далее понимается в лебеговом смысле). Если для почти всех $s \in X$

$$\int\limits_X |K(s,t)|^q \, d\mu(t) < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

то T называется *карлемановским интегральным оператором.*

Определение 2 [1, с. 5]. Оператор $Mf(s) = a(s)f(s) + Df(s)$, $f \in L_p$, где $a(s) \in L_\infty(X, \mu)$, $D \in B(L_p)$ — интегральный оператор, называется *интегральным оператором* 3*-го рода.* В случае, когда $a(s) = \alpha \neq 0$ для почти всех $s \in X$, оператор M называется *интегральным оператором* 2*-го рода*; в случае, когда $a(s) = 0$ для почти всех $s \in X$, — *интегральным оператором* 1*-го рода.*

Порожденные линейными интегральными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов, интегральные операторы 1-го, 2-го и 3-го родов играют важную роль в теории этих уравнений, а также в теории операторов и ее приложениях.

Определение 3. Оператор $W \in B(L_p)$ называется *изоморфизмом*, если существует обратный $W^{-1} \in B(L_p)$. Изоморфизм $U \in B(L_2)$ такой, что $U^{-1} = U^*$, называется *унитарным оператором*. Замкнутые подпространства G, F пространства L_p называются *изоморфными*, если найдется линейный непрерывный взаимно однозначный оператор, отображающий G на F.

Определение 4. Говорят, что 1) $T_1 \in B(L_p)$ *подобен* $T_2 \in B(L_p)$, если имеется изоморфизм $W \in B(L_p)$ такой, что $WT_1W^{-1} = T_2$; 2) $R_1 \in B(L_2)$ *унитарно эквивалентен* $R_2 \in B(L_2)$, если $UR_1U^{-1} = R_2$ для некоторого унитарного оператора $U \in B(L_2)$.

Напомним еще, что по определению 0 принадлежит предельному спектру $\sigma_c(Q)$ оператора $Q \in B(L_r)$, если в L_r существует ограниченная некомпактная последовательность, которую Q отображает в последовательность, сходящуюся к 0 по норме L_r.

В [2] Нейман доказал, что самосопряженный оператор S в $L_2(a, b)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_c(S)$. В [3, теорема 1; 4, теорема IV.3.6; 5, теорема 7.3] показано, что если L_2 сепарабельно, мера μ не является чисто атомической (т. е. в X имеется множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ), то $T \in B(L_2)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору в том и только в том случае, когда $0 \in \sigma_c(T^*)$. Отсюда следует вывод [6, с. 61, теорема 11]: если L_2 — комплексное сепарабельное пространство, то любой оператор из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен оператору вида $\lambda 1 + C$, где C — карлемановский интегральный оператор. Из [7, с. 754; 4, теорема I. 2.12] вытекает, что всякий интегральный оператор из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору. В [8, следствие 1; 9, теорема 8] установлено, что каждый интегральный оператор 3-го рода $Mf(s) = a(s)f(s) + Df(s)$ из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен оператору $\alpha 1 + L$, где L — карлемановский интегральный оператор, α — любое существенное значение функции $a(s)$.

В связи с перечисленными результатами возникают следующие вопросы.

1. Будет ли каждый интегральный оператор 3-го рода из $B(L_p)$ при $p \neq 2$ подобен карлемановскому интегральному (или хотя бы интегральному) оператору 1-го или 2-го рода?

2. Можно ли всякое линейное интегральное уравнение 3-го рода в L_p ($p \neq 2$) привести линейной непрерывной обратимой заменой к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в L_p?

3. Возможна ли характеризация интегральных и карлемановских интегральных операторов в L_p, $p \neq 2$, в терминах спектра и его компонент?

Следующие теоремы 1, 2 и их следствия дают отрицательные ответы на эти вопросы.

Определение 5 [10]. Оператор $K \in B(L_p)$ называется *почти компактным*, если существует разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n, $n = 1, 2, \dots$, такое, что $P_nK : L_p \to L_p$, $n = 1, 2, \dots$, — компактные операторы; здесь $P_nf = \chi_{X_n}f$, $f \in L_p$, χ_E — характеристическая функция множества E.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, множество e, $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ и в $X \setminus e$ есть подмножество положительной меры без атомов меры μ. Пусть $Af = \chi_e f$, $f \in L_p$, $Z \in B(L_p)$ — произвольный компактный оператор. Тогда оператор $\tau = A + Z$ не подобен никакому оператору вида $\alpha 1 + K$, где $K \in B(L_p)$ — почти компактный оператор, α — число.*

Доказательство. Предположим противное: найдется изоморфизм $V \in B(L_p)$ такой, что $V\tau V^{-1} = \alpha 1 + K$. Рассмотрим всевозможные случаи: (1) $\alpha = 0$; (2) $\alpha = 1$; (3) $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

(1) Пусть $\alpha = 0$. Тогда $VA = KV - VZ$. Положим $B = KV - VZ$. Имеем $BL_p(e) = VAL_p(e) = VL_p(e)$. Так как $V \in B(L_p)$ — изоморфизм, $H := VL_p(e) = BL_p(e)$ — замкнутое подпространство L_p, изоморфное $L_p(e)$. Поскольку B — почти компактный оператор, найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n, $n = 1, 2, \ldots$, такое, что $P_nB : L_p \to L_p$ — компактный оператор для любого n; здесь $P_nf = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p$. Из замкнутости $L_p(X_n) = P_nL_p$ и принципа открытости отображения [11, теорема II.2.1] следует, что $H_n := P_nH$ — замкнутые подпространства L_p. Далее, $H_n = P_nBL_p(e)$, так что компактные операторы P_nB отображают замкнутое подпространство $L_p(e)$ на замкнутые подпространства H_n. Зафиксируем n. Пусть S_e — открытый шар в $L_p(e)$.

В силу принципа открытости отображения P_nBS_e содержит шар. Так как этот шар относительно компактен, по теореме Ф. Рисса H_n конечномерно. Имеем $H = l_p(H_n)$, где $l_p(H_n)$ — подпространство L_p, состоящее из всех $f \in L_p$, представимых в виде

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad f_n \in H_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Итак, $VL_p(e) = H = l_p(H_n)$, $\dim H_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, носители всех функций из H_n содержатся в X_n, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда получим противоречие.

Рассмотрим сначала случай $p > 2$. Пользуясь тем, что в e нет атомов меры μ, выберем равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{y_m\}$ с носителями в e (в качестве $\{y_m\}$ можно взять систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,e}\}$ с носителями в e (определение $\{r_{m,e}\}$ см., например, в [4, с. 11, 12]). По теореме Римана — Лебега $\{y_m\} \to 0$ слабо в L_p. Положим $x_m = Vy_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Для любой подпоследовательности $\{y_{i_k}\}$ и всех n имеем

$$n^{1/2} = \left\| \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} \right\|_2 \leq (\mu e)^{\gamma} \|V^{-1}\| \left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\|, \tag{1}$$

где $\gamma = \frac{p-2}{2p}$, $\|\cdot\|_2$ — норма в L_2. Так как для любого n оператор $P_nV : L_p(e) \to H_n$ конечномерный, он представим в виде

$$P_nVf = \sum_{j=1}^{m_n} (f, v_{j,n}) w_{j,n}, \quad m_n < \infty,$$

где $v_{j,n} \in L_q$, $1/p + 1/q = 1$, $w_{j,n} \in L_p(X_n)$, $j = 1, \ldots, m_n$. Покажем, что $\{x_m\}$ сходится к 0 почти всюду. Из слабой сходимости $\{y_m\}$ к 0 получим для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$P_nx_m(s) = P_nVy_m(s) = \sum_{j=1}^{m_n} (y_m, , v_{j,n}) w_{j,n}(s) \to 0$$

для почти всех $s \in X_n$.

Докажем, что из $\{x_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| \leq C^{1/p} n^{1/p}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Поскольку $\{x_m\} \to 0$ почти всюду, по теореме Егорова найдется возрастающая к X последовательность множеств F_j, $j = 1, 2, \dots$, с конечными положительными мерами такая, что $\{x_m\} \to 0$ равномерно на каждом F_j. Построим подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$, удовлетворяющую (2), по аналогии с построениями в доказательстве теоремы 3 в [12, гл. XII, с. 201]. Положим $x_{i_1} = x_1$, $s_1 = x_{i_1}$. Пусть номер j_1 такой, что

$$\int\limits_{X\setminus F_{j_1}} |s_1|^p \, d\mu \le 1.$$

Пользуясь равномерной сходимостью $\{x_m\}$ к 0 на F_{j_1}, выберем x_{i_2} так, чтобы

$$\int\limits_{F_{j_1}} |s_1 + x_{i_2}|^p \, d\mu \le \int\limits_{F_{j_1}} |s_1|^p \, d\mu + 1.$$

Пусть $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}, F_{j_1}, \dots, F_{j_{n-1}}$ найдены так, что

$$\int\limits_{X\setminus F_{j_{m-1}}} |s_{m-1}|^p \, d\mu \le 1, \quad m = 2, \dots, n, \tag{3}$$

$$\int\limits_{F_{j_{m-2}}} |s_{m-2} + x_{i_{m-1}}|^p \, d\mu \le \int\limits_{F_{j_{m-2}}} |s_{m-2}|^p \, d\mu + 1, \quad m = 3, \dots, n,$$

где $s_m = \sum\limits_{k=1}^{m} x_{i_k}$. Снова, пользуясь равномерной сходимостью $\{x_m\}$ к 0 на $F_{j_{n-1}}$, выберем x_{i_n} так, чтобы

$$\int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p \, d\mu \le \int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p \, d\mu + 1. \tag{4}$$

В силу (4), неравенства Гёльдера и (3)

$$\begin{aligned} \|s_n\|^p = \|s_{n-1} + x_{i_n}\|^p &= \int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p \, d\mu + \int\limits_{X\setminus F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p \, d\mu \\ &\le \int\limits_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p \, d\mu + 1 + \Bigg[\Bigg(\int\limits_{X\setminus F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p \, d\mu\Bigg)^{1/p} \\ &\quad + \Bigg(\int\limits_{X\setminus F_{j_{n-1}}} |x_{i_n}|^p \, d\mu\Bigg)^{1/p}\Bigg]^p \le \|s_{n-1}\|^p + 1 + [1 + M]^p, \end{aligned}$$

где $M = \sup\limits_{m=1,2,\dots} \|x_m\|$. Пусть $C = 1 + [1 + M]^p$, тогда $\|s_n\|^p \le \|s_{n-1}\|^p + C$. Отсюда $\|s_n\|^p \le Cn$, $n = 1, 2, \dots$, и неравенство (2) доказано. Так как неравенства (1) и (2) несовместимы при $p > 2$, получаем противоречие.

Пусть $1 < p < 2$. Как показано выше, $L_p(e)$ изоморфно $l_p(H_n)$, $\dim H_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, и носители всех функций из H_n содержатся в X_n, $n = 1, 2, \dots$. В силу предложения C.4.2 из из [13, с. 30]

$$(l_p(H_n))^* = l_q\big(H_n^*\big), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

при этом $\dim H_n^* = \dim H_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, и носители всех функций из H_n^* содержатся в X_n, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $L_q(e) = (L_p(e))^*$ изоморфно $l_q\bigl(H_n^*\bigr)$, $q > 2$, что по доказанному невозможно.

(2). Пусть $\alpha = 1$. Имеем $VA = V + B$ и $V(1 - A) = -B$.

Положив

$$A_1 f = (1 - A)f = \chi_{X \setminus e} f, \quad f \in L_p,$$

получим $VA_1 = -B$. Пусть $g \subset X \setminus e$, $0 < \mu g < \infty$, и в g нет атомов меры μ. Тогда

$$VL_p(g) = VA_1 L_p(g) = -BL_p(g),$$

и доказательство завершается повторением доказательства в случае (1).

(3). Имеем $V\tau = \alpha V + KV$. Отсюда $VA + VZ = \alpha V + KV$ и $V(A - \alpha 1) = KV - VZ = B$. Спектр $A = \{0; 1\}$ и $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поэтому $A - \alpha 1$ — изоморфизм, следовательно, $V(A - \alpha 1)$ — изоморфизм. Значит, B — изоморфизм. Поскольку B — почти компактный оператор, все операторы $P_n B$ компактны. Выберем номер j и множество $E \subset X_j$ так, чтобы $0 < \mu E < \infty$ и E не содержало атомов меры μ. Рассмотрим равномерно ограниченную ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,E}\}$, носители которых совпадают с E (определение $\{r_{m,E}\}$ см., например, в [4, с. 11, 12]). По теореме Римана — Лебега $\{r_{m,E}\} \to 0$ слабо в L_q. Так как $P_j B : L_p \to L_p$ — компактный оператор, $\|B^* r_{m,E}\|_q = \|B^* P_j r_{m,E}\|_q \to 0$ при $m \to \infty$; здесь $\|\cdot\|_q$ — норма в L_q. Но $\|r_{m,E}\|_q = (\mu E)^{1/q - 1/2}$, $m = 1, 2, \ldots$, поэтому B^* и B не являются изоморфизмами. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, множество e удовлетворяет условиям теоремы 1, $Af = \chi_e f$, $f \in L_p$, $Y \in B(L_p)$ — произвольный почти компактный оператор, $\tilde{\tau} = A + Y$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $\tilde{\tau} W$ не может быть представлен в виде $\alpha 1 + K$, где K — почти компактный оператор.*

Доказательство. Допустим, что существует изоморфизм $W \in B(L_p)$ такой, что $\tilde{\tau} W = \alpha 1 + K$. Тогда $AW = \alpha 1 + K - YW$. Положим $V = W^{-1}$. Имеем $A = \alpha V + KV - Y$. Пусть $\widetilde{B} = KV - Y$. Оператор $\widetilde{B}$ почти компактен, следовательно, найдется разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что все операторы $P_n \widetilde{B} : L_p \to L_p$ компактны; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p$. Рассмотрим случаи $\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. В первом случае $L_p(e) = AL_p(e) = \widetilde{B} L_p(e)$. Выберем номер j так, чтобы $\mu(e \cap X_j) > 0$. Положим $E = e \cap X_j$ и рассмотрим систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,E}\}$, носители которых совпадают с E. Имеем

$$\|r_{m,E}\| = (\mu E)^{1/p - 1/2}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

С другой стороны,

$$r_{m,E} = P_j r_{m,E} = P_j A r_{m,E} = P_j \widetilde{B} r_{m,E} \to 0$$

по норме L_p при $m \to \infty$, так как $P_j \widetilde{B} : L_p \to L_p$ — компактный оператор и $\{r_{m,E}\} \to 0$ слабо в L_p по теореме Римана — Лебега. Перейдем ко второму случаю. Пусть $g \subset X \setminus e$, $0 < \mu g < \infty$ и в g нет атомов меры μ. Тогда

$$VL_p(g) = \frac{1}{\alpha}(A - \widetilde{B})L_p(g) = -\frac{1}{\alpha}\widetilde{B} L_p(g),$$

что также невозможно (это следует из доказательства теоремы 1, случай (2)).

Следствие 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $W\tau W^{-1}$ не представим в виде $\alpha 1 + R$, где R — интегральный оператор.*

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы 1, так как любой интегральный оператор из $B(L_p)$ почти компактен [14; 15].

Аналогично из теоремы 2 получаем

Следствие 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $\tilde{\tau}W$ не представим в виде $\alpha 1 + R$, где R — интегральный оператор.*

Из следствий 2 и 1 вытекает

Следствие 3. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $\tilde{\tau} = A + Q$, где $Q \in B(L_p)$ — интегральный оператор. Тогда интегральное уравнение 3-го рода $(A+Q)x = f \in L_p$ не может быть сведено заменой $y = Wx$, где $W \in B(L_p)$ — изоморфизм, к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_p 1-го или 2-го рода. Если Q — компактный интегральный оператор, аналогичное утверждение справедливо для замены $y = Wx$, $h = Wf$.*

Следствие 4. *При $p \neq 2$ невозможна характеризация интегральных и карлемановских интегральных операторов из $B(L_p)$ в терминах спектра и его компонент.*

В самом деле, положив в теореме 1 $Z = 0$, получим в силу следствия 1, что A не подобен никакому интегральному оператору, хотя $\operatorname{Ker} A = L_p(X \setminus e, \mu)$, $\operatorname{Ker} A^* = L_q(X \setminus e, \mu)$.

Замечание 1. Условие неатомичности меры μ в статье существенно: каждый оператор из $B(l_p)$ является карлемановским интегральным оператором [16, с. 400].

Замечание 2. Если X не имеет атомов меры μ (например, X — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, μ — мера Лебега), в качестве e в теоремах 1, 2 и следствиях 1–4 можно выбрать любое множество ненулевой меры с дополнением ненулевой меры.

Замечание 3. Из следствия 3 заключаем, что следствие 1.6.12 в [4, с. 56] неверно при $p \neq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.
2. *Neumann J.* Charakterisierung des spectrums eines integraloperators // Actual. Sci. Ind. 1935. N 229. P. 38–55.
3. *Коротков В. Б.* Классификация и характеристические свойства карлемановских операторов // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 6. С. 1274–1277.
4. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
5. *Weidmann J.* Carlemanoperatoren // Manuscripta Math. 1970. V. 2, N 1. P. 1–38.
6. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. Владивосток: Колорит, 2000.
7. *Коротков В. Б.* О некоторых свойствах частично интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 4. С. 752–754.
8. *Коротков В. Б.* О приведении семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 3. С. 149–151.
9. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.

10. *Weis L.* Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 83–96.
11. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр лит., 1962.
12. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires. New York: Chelsea Publ. Comp., 1955.
13. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
14. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.
15. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
16. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.

Статья поступила 16 декабря 2013 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090