Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 510.64

СВОЙСТВО ЛИНДОНА И УНИФОРМНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НАД ЛОГИКОЙ ГЖЕГОРЧИКА

Л. Л. Максимова

Аннотация. Рассматриваются варианты интерполяционного свойства, более сильные, чем интерполяционное свойство Крейга CIP. Доказывается интерполяционное свойство Линдона LIP для логики Гжегорчика Grz и некоторых ее расширений. Также установлено LIP для большинства расширений интуиционистской логики с CIP. Для всех модальных логик над логикой Grz, а также для всех суперинтуиционистских логик униформное интерполяционное свойство UIP равносильно свойству Крейга.

Ключевые слова: униформная интерполяция, интерполяционное свойство Линдона, модальная логика, интуиционистская логика, логика Гжегорчика.

Введение

Интерполяционная теорема, доказанная Крейгом [1] для классической логики первого порядка, стала источником большого числа исследований по проблеме интерполяции в классических и неклассических теориях [2–4]. В настоящее время интерполяция рассматривается как стандартное свойство логик наряду с непротиворечивостью, полнотой и т. д. Наиболее известные системы модальной логики обладают интерполяционным свойством Крейга CIP [3].

В данной статье рассматриваются варианты интерполяционного свойства, более сильные, чем свойство Крейга. Отмечено, что для всех модальных логик над логикой Гжегорчика Grz, а также для всех суперинтуиционистских логик униформное интерполяционное свойство UIP равносильно свойству Крейга. Доказывается, что логика Grz и некоторые ее расширения обладают интерполяционным свойством Линдона LIP, восходящим к теореме Линдона [5]. Также установлено LIP для большинства расширений интуиционистской логики, имеющих CIP.

Униформное интерполяционное свойство для интуиционистской логики доказано Питтсом [6]. Им обладают модальная логика K [7] и логика доказуемости GL [8], а также модальное μ-исчисление [9]. Напротив, известные модальные логики K4 и S4 не имеют UIP [10], хотя имеют интерполяционное свойство Линдона LIP [3]. С другой стороны, существует расширение логики S5 с CIP, но без LIP [11] (см. также [3]).

Известно, что лишь шесть непротиворечивых расширений логики Grz имеют свойство CIP [3]. Для логики Grz это свойство доказано Булосом [12]. Униформное интерполяционное свойство UIP в Grz доказал Виссер [13]. Остальные пять логик с CIP также имеют UIP (см. предложение 1.4).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00168а) и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726).

Свойство Линдона для логики доказуемости GL установил Д. С. Шамканов [14]. Тем же методом докажем LIP для логики Grz. Отсюда выведем LIP для всех остальных логик над Grz со свойством CIP, за исключением одной, для которой свойство Линдона остается открытой проблемой.

П. 3 посвящен суперинтуиционистским логикам. Семейство суперинтуиционистских логик изоморфно семейству расширений логики Grz. Известно, что точно семь непротиворечивых расширений интуиционистской логики обладают свойством CIP [3]. Все они имеют UIP. Что касается свойства Линдона, то оно установлено для пяти логик, а для оставшихся двух, в том числе известной логики LC, остается под вопросом.

1. Униформная интерполяция

Язык модальной логики содержит связки классической пропозициональной логики и, кроме того, модальные операторы $\Box$ и $\Diamond$, где $\Diamond A \rightleftharpoons \neg\Box\neg A$. Здесь рассматриваем только нормальные модальные логики, которые содержат в числе постулатов правило $R1$: $A, (A \to B)/B$ и правило для необходимости $R2$: $A/\Box A$. Минимальное нормальное модальное исчисление K определяется добавлением одной схемы аксиом $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ и правила для необходимости к постулатам классической пропозициональной логики. Далее,

$$\mathrm{K4} = \mathrm{K} + (\Box p \to \Box\Box p),$$

$$\mathrm{S4} = \mathrm{K4} + (\Box p \to p),$$

$$\mathrm{Grz} = \mathrm{S4} + (\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p),$$

$$\mathrm{Grz.2} = \mathrm{S4} + (\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box p),$$

$$\mathrm{GW} = \mathrm{Grz} + (\neg p \to \Box(p \to \Box p)),$$

$$\mathrm{GW.2} = \mathrm{GW} + \mathrm{Grz.2}.$$

Нормальной модальной логикой называется множество формул, содержащее все аксиомы исчисления K и замкнутое относительно правил $R1$ и $R2$ и правила подстановки. Через $NE(L)$ обозначаем множество всех нормальных модальных логик, содержащих логику L. Для модальной логики L и формулы A пишем $L \vdash A$ вместо $A \in L$; через $L + A$ обозначается наименьшая нормальная модальная логика, содержащая $L \cup \{A\}$.

Пусть L — фиксированная логика. *Интерполяционное свойство Крейга* CIP в логике L определяется следующим образом.

CIP. Если $L \vdash A \to B$, то существует такая формула C, что $L \vdash A \to C$ и $L \vdash C \to B$ и C содержит лишь общие переменные формул A и B.

Формула C называется *интерполянтом.*

Для определения *интерполяционного свойства Линдона* LIP стандартным образом определяются позитивные и негативные вхождения переменных.

LIP. Если $L \vdash A \to B$, то существует такая формула C, что $L \vdash A \to C$ и $L \vdash C \to B$ и все позитивные переменные формулы C входят позитивно в A и в B, а все негативные переменные формулы C входят в A и в B негативно.

Униформное интерполяционное свойство UIP определяется так.

UIP. Для любых формулы A и подмножества $\mathbf{p}$ множества переменных формулы A существует формула $C(\mathbf{p})$ такая, что все ее переменные входят в $\mathbf{p}$ и выполнены условия: $L \vdash A \to C(\mathbf{p})$ и для любой формулы B такой, что все общие переменные A и B входят в $\mathbf{p}$,

$$L \vdash A \to B \Rightarrow L \vdash C(\mathbf{p}) \to B.$$

Логика Grz имеет точно шесть непротиворечивых расширений со свойством CIP. Покажем, что все они обладают свойством UIP. В следующем утверждении перечислены расширения логики Grz со свойством CIP.

Предложение 1.1 [3]. *Существует точно шесть непротиворечивых расширений логики* Grz *с* CIP, *которые характеризуются следующими классами частично упорядоченных* (ч.у.) *шкал:*

1) Grz*: все конечные ч.у. шкалы;*
2) Grz.2*: конечные ч.у. шкалы, имеющие наибольший элемент;*
3) GW*: ч.у. шкалы высоты* 2*;*
4) GV*: трехэлементная шкала с наименьшим и двумя максимальными элементами;*
5) GW.2*: двухэлементная линейно упорядоченная шкала;*
6) Grz $+ (\Box p \leftrightarrow p)$*: одноэлементная шкала.*

Логика L называется *локально табличной*, если для любого конечного списка переменных $\mathbf{p}$ существует лишь конечное число попарно не эквивалентных в L формул, зависящих от переменных из $\mathbf{p}$.

Лемма 1.2. *Для любой локально табличной модальной логики* L *свойства* CIP *и* UIP *равносильны.*

Доказательство. Для данной формулы A и подмножества $\mathbf{p}$ множества переменных, входящих в A, пусть S — конечное множество, содержащее с точностью до эквивалентности в L все формулы, зависящие от переменных из $\mathbf{p}$. Тогда $C(\mathbf{p}) = \bigwedge\{\varphi \mid \varphi \in S$ и $L \vdash A \to \varphi\}$ является униформным интерполянтом для формулы A. $\Box$

Формула $A(p)$ от одной переменной p называется L-*консервативной*, если для любой формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ в L выводима формула $(\bigwedge A(p_i)) \to A(\varphi(p_1, \ldots, p_n))$. Это определение является частным случаем определения из [3], где доказано следующее утверждение.

Лемма 1.3 [3]. 1. *Если* L *имеет* CIP, LIP *или* UIP *и формула* A L*-консервативна, то логика* $L + A$ *имеет то же свойство.*

2. *Формула* $\Box(\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box p)$ S4*-консервативна.*

Предложение 1.4. *Для любого расширения логики Гжегорчика свойства* CIP *и* UIP *равносильны.*

Доказательство. Логика Grz имеет точно семь расширений со свойством CIP (см. предложение 1.1), в том числе логики Grz и Grz.2, а также пять локально табличных логик, включающих противоречивую логику. Униформное интерполяционное свойство для логики Grz доказано в [13]. Поскольку формула $\Box(\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box p)$ S4-консервативна, UIP для Grz.2 сразу вытекает из UIP для Grz и леммы 1.3. Для остальных логик над Grz утверждение следует из леммы 1.2. $\Box$

2. Интерполяция Линдона над логикой Гжегорчика

В этом пункте докажем, что логика Grz и почти все ее расширения со свойством CIP имеют свойство Линдона. Для логики Grz $+ (p \to \Box p)$ свойство LIP легко следует из теоремы Линдона для классической логики. Для логики GW.2 свойство LIP доказано в [11]. Докажем LIP еще для трех логик, а именно для самой Grz, Grz.2 и для логики GW.

Позитивные и негативные вхождения подформул определяются стандартным образом. Формула φ является негативной подформулой формул $\neg\varphi$ и $\varphi \to \psi$, вхождение ψ в $\varphi \to \psi$ позитивно, а $\wedge, \vee, \Box, \Diamond$ не меняют знака подформулы.

Для формулы φ обозначаем через $\nu(\varphi)$ множество, содержащее переменную p, если она имеет позитивные вхождения в φ, и $\neg p$, если p имеет негативные вхождения в φ.

Для доказательства свойства Линдона используем редуцированный язык. Его формулы строятся из $\bot, \top$ и литералов, т. е. переменных p_i и их отрицаний $\neg p_i$, с помощью $\wedge, \vee, \Box, \Diamond$.

Для произвольной пропозициональной формулы α обозначаем через α' формулу редуцированного языка, которая получится из α после устранения импликации и применения законов де Моргана. Очевидно, справедлива

Лемма 2.1. *Для любой формулы* α *имеем* $\mathrm{K} \vdash (\alpha \leftrightarrow \alpha')$ *и* $\nu(\alpha) = \nu(\alpha')$.

Для формулы φ редуцированного языка определим дуальную формулу φ^*, которая получается по следующим правилам:

$$p^* = \neg p, \quad (\neg p)^* = p, \quad \bot^* = \top, \quad \top^* = \bot,$$

$$(\Diamond\varphi)^* = \Box\varphi^*, \quad (\Box\varphi)^* = \Diamond\varphi^*,$$

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2)^* = (\varphi_1^* \wedge \varphi_2^*), \quad (\varphi_1 \wedge \varphi_2)^* = (\varphi_1^* \vee \varphi_2^*).$$

Очевидна

Лемма 2.2. $\mathrm{K} \vdash (\varphi^* \leftrightarrow \neg\varphi)$.

Зафиксируем логику L. Для конечного множества Γ и формулы φ пишем $\Gamma \vdash \varphi$, если $L \vdash \bigwedge \Gamma \to \varphi$.

Пусть (Γ, Δ) — пара конечных множеств формул редуцированного языка, τ — любое множество литералов. Пару (Γ, Δ) называем τ-*отделимой в* L, если существует формула θ такая, что $\nu(\theta) \subseteq \tau$ и $\Gamma \vdash \theta$, $\Delta \vdash \neg\theta$.

Следующие леммы 2.3–2.5 отмечены в [14].

Лемма 2.3. *Если пара* (Γ, Δ) τ-*неотделима,* φ *— любая формула, то по крайней мере одна из пар* $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \Delta)$ *или* $(\Gamma \cup \{\varphi^*\}, \Delta)$ *также* τ-*неотделима. Аналогичное верно и для второй компоненты.*

Множество Φ называем *адекватным*, если оно содержит $\bot$ и замкнуто относительно подформульности и дуальности. Подмножество $\Gamma \subseteq \Phi$ называем Φ-*полным*, если $\varphi \in \Gamma$ или $\varphi^* \in \Gamma$ для любой формулы $\varphi \in \Phi$ и, кроме того, $\Gamma \nvdash \bot$. Легко доказывается

Лемма 2.4. *Для любого* Φ-*полного множества* Γ

1) $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \Rightarrow (\varphi \in \Gamma$ *и* $\psi \in \Gamma)$;
2) $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \Rightarrow (\varphi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma)$;
3) $\bot \notin \Gamma$;
4) $(\varphi \in \Phi$ *и* $\Gamma \vdash \varphi) \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.

Пусть (Φ_1, Φ_2) — пара адекватных множеств. Пара (Γ_1, Γ_2) называется (Φ_1, Φ_2)-*полной*, если множество Γ_1 Φ_1-полное, а Γ_2 — Φ_2-полное.

Лемма 2.5. *Пусть τ — любое множество литералов. Любую τ-неотделимую в L пару (Γ_1, Γ_2), где $\Gamma_1 \subseteq \Phi_1$, $\Gamma_2 \subseteq \Phi_2$, можно расширить до (Φ_1, Φ_2)-полной τ-неотделимой в L пары.*

Доказательство следует из леммы 2.3. $\square$

Сегерберг доказал, что логика Grz полна относительно класса конечных частично упорядоченных моделей [15]. Говорят, что *пара* (Γ, Δ) *выполнима в модели* $M = (W, \preceq, \models)$, если $w \models \Gamma \cup \Delta$ для некоторого $w \in W$. Для доказательства интерполяционного свойства Линдона в логике Grz нам потребуется

Теорема 2.6 (о существовании модели). *Любая τ-неотделимая в* Grz *пара* (Γ, Δ), *где* $\tau = \nu(\Gamma) \cap \nu(\Delta^*)$, *выполнима в некоторой конечной частично упорядоченной модели.*

Доказательство. Пусть Γ, Δ — конечные множества формул редуцированного языка и пара (Γ, Δ) τ-неотделима в Grz, где $\tau = \nu(\Gamma) \cap \nu(\Delta^*)$.

Пусть S_1 — множество позитивных подформул формул из Γ, S_2 — множество позитивных подформул формул из Δ. Для $i = 1, 2$ обозначим через Φ_i множество позитивных подформул множества $S_i \cup \{\bot, \top\} \cup \{\Box(\varphi \vee \Box\varphi^*) \mid \Diamond\varphi \in S_i\}$ и дуальных к ним.

Строим модель $M = (W, \preceq, \models)$. Пусть

W — множество (Φ_1, Φ_2)-полных τ-неотделимых пар;

$(\Gamma_1, \Gamma_2) \preceq (\Delta_1, \Delta_2)$, если и только если выполнены два условия:

(1) $\Box\varphi \in \Gamma_i \Rightarrow \Box\varphi \in \Delta_i$ для $i = 1, 2$;

(2) ($\Gamma_1 = \Delta_1$ и $\Gamma_2 = \Delta_2$) или $\exists i\ \exists\varphi$ ($\Box\varphi \in \Delta_i$ и $\Box\varphi \notin \Gamma_i$).

Очевидна

Лемма 2.7. *Множество W конечно и частично упорядочено отношением $\preceq$.*

Для любой переменной p, входящей в $\Phi_1 \cup \Phi_2$, отношение истинности определяем следующим образом:

$$(\Gamma_1, \Gamma_2) \models p \iff [(p \in \nu(\Gamma) \text{ и } p \in \Gamma_1) \text{ или } (p \in \nu(\Delta) \text{ и } p \in \Gamma_2)].$$

Лемма 2.8. *Пусть* $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in W$. *Тогда для любого $i = 1, 2$ и любой формулы φ*

$$(\varphi \in S_i \text{ и } \varphi \in \Gamma_i) \Rightarrow (\Gamma_1, \Gamma_2) \models \varphi.$$

Доказательство. Индукция по числу вхождений связок $\wedge, \vee, \Box, \Diamond$.

Базис индукции распадается на 3 случая (1)–(3).

(1) φ есть p. Сразу из определения.

(2) φ есть $\neg p$.

Допустим, что $(\Gamma_1, \Gamma_2) \not\models \neg p$. Тогда $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models p$. Возможны случаи:

(2.1) ($p \in \nu(\Gamma)$ и $p \in \Gamma_1$);

(2.2) ($p \in \nu(\Delta)$ и $p \in \Gamma_2$).

Пусть $\neg p \in S_1$ и $\neg p \in \Gamma_1$.

В случае (2.1) имеем $\Gamma_1 \vdash \bot$ и формула $\bot$ отделяет пару (Γ_1, Γ_2).

В случае (2.2) получаем $\neg p \in \nu(\Gamma) \cap \nu(\Delta^*) = \tau$ и формула $\neg p$ отделяет пару (Γ_1, Γ_2); противоречие.

Пусть $\neg p \in S_2$ и $\neg p \in \Gamma_2$.

В случае (2.1) получаем $p \in \nu(\Gamma) \cap \nu(\Delta^*) = \tau$ и формула p отделяет пару (Γ_1, Γ_2).

В случае (2.2) имеем $\Gamma_2 \vdash \bot$ и формула $\top$ отделяет пару (Γ_1, Γ_2); противоречие.

(3) φ есть $\bot$ или $\top$. По определению $\bot \notin \Gamma_i$ и $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models \top$.

Шаг индукции. Для формул вида $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$ и $\Box\varphi_1$ утверждение легко следует из индукционной гипотезы и леммы 2.4. Рассмотрим случай $\varphi = \Diamond\varphi_1$.

Пусть $\Diamond\varphi_i \in S_i$ и $\Diamond\varphi_i \in \Gamma_i$.

Возьмем $i = 1$. Возможны два случая: (1) $\varphi_1 \in \Gamma_1$ и (2) $\varphi_1 \notin \Gamma_1$.

В случае (1) по индукционной гипотезе имеем $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models \varphi_1$, а значит, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models \Diamond\varphi_1$. Рассмотрим случай (2).

Тогда $\varphi_1^* \in \Gamma_1$. По определению имеем $\Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*) \in \Phi_1$. Положим $\Delta_i = \{\Box\psi \mid \Box\psi \in \Gamma_i\}$ и рассмотрим (Φ_1, Φ_2)-пару $(\Delta_1 \cup \{\varphi_1, \Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*)\}, \Delta_2)$.

Докажем, что пара τ-неотделима. Допустим противное. Тогда существует формула θ такая, что $\nu(\theta) \subseteq \tau$ и $\Delta_1, \varphi_1, \Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*) \vdash \theta$, $\Delta_2 \vdash \neg\theta$. Отсюда выводим

$$\Delta_1, \neg\theta \vdash \Box(\neg\varphi_1 \to \Box\neg\varphi_1) \to \neg\varphi_1,$$

$$\Box\Delta_1, \Box\neg\theta \vdash \Box(\Box(\neg\varphi_1 \to \Box\neg\varphi_1) \to \neg\varphi_1).$$

Поскольку в Grz имеем $\vdash \Box(\Box(\neg\varphi_1 \to \Box\neg\varphi_1) \to \neg\varphi_1) \to \Box\neg\varphi_1$ и $\Delta_1 \vdash \Box\Delta_1$, получаем $\Delta_1, \Box\neg\theta \vdash \Box\neg\varphi_1$, $\quad \Delta_1, \Diamond\varphi_1 \vdash \Diamond\theta$. Кроме того, $\Delta_2 \vdash \Box\neg\theta$, а значит, $\Delta_2 \vdash \neg\Diamond\theta$. Следовательно, $\Diamond\theta$ отделяет пару (Γ_1, Γ_2); противоречие.

Таким образом, пара $(\Delta_1 \cup \{\varphi_1, \Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*)\}, \Delta_2)$ τ-неотделима и по лемме 2.5 может быть расширена до (Φ_1, Φ_2)-полной пары (Γ_1', Γ_2'). По индукционной гипотезе $(\Gamma_1', \Gamma_2') \models \varphi_1$.

Кроме того, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \preceq (\Gamma_1', \Gamma_2')$. В самом деле, заметим, что формула $\Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*)$ входит в Γ_1', но не входит в Γ_1, иначе $\Box\varphi_1^*$ принадлежала бы Γ_1, что противоречит условию $\Diamond\varphi_1 \in \Gamma_1$.

Значит, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models \Diamond\varphi_1$.

Случай $i = 2$ рассматривается аналогично. Если $\Diamond\varphi_1 \in S_2$, $\Diamond\varphi_1 \in \Gamma_2$ и $\varphi_1 \notin \Gamma_2$, то рассматриваем пару $(\Delta_1, \Delta_2 \cup \{\varphi_1, \Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*)\})$. Если она отделима, то существует θ такая, что $\nu(\theta) \subseteq \tau$ и

$$\Delta_1 \vdash \theta; \quad \Delta_2, \varphi_1, \Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*) \vdash \neg\theta.$$

Аналогично случаю $i = 1$ доказывается, что в этом случае $\Box\theta$ отделяет пару (Γ_1, Γ_2). Поэтому пара $(\Delta_1, \Delta_2 \cup \{\varphi_1, \Box(\varphi_1 \vee \Box\varphi_1^*)\})$ τ-неотделима и по лемме 2.5 может быть расширена до полной пары (Γ_1', Γ_2'). Аналогично случаю $i = 1$ получаем $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models \Diamond\varphi_1$. $\Box$

Окончание доказательства теоремы о существовании модели. Если пара (Γ, Δ) τ-неотделима, то ее можно расширить до (Φ_1, Φ_2)-полной пары $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in W$. По лемме 2.8 получаем $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models \Gamma$ и $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models \Delta$. $\Box$

Теорема 2.9. *Если формула $\alpha \to \beta$ выводима в* Grz, *то существует интерполянт Линдона для этой формулы.*

Доказательство. По лемме 2.1 можем считать, что α, β — формулы редуцированного языка. Пусть формула $\alpha \to \beta$ не имеет интерполянта Линдона в Grz. Положим $\tau = \nu(\alpha) \cap \nu(\beta)$. Тогда пара $(\{\alpha\}, \{\beta^*\})$ τ-неотделима. По теореме 2.6 она выполнима в некоторой конечной частично упорядоченной модели M. Для некоторого элемента w из этой модели имеем $w \models \alpha \wedge \neg\beta$, а значит, формула $\alpha \to \beta$ невыводима в Grz. $\Box$

В предложении 1.1 приведены все непротиворечивые расширения логики Grz со свойством CIP. Перейдем к доказательству свойства Линдона в других логиках над Grz.

Теорема 2.10. *Логики* GW, Grz.2 *и* GW.2 *имеют* LIP.

Доказательство. Сначала докажем лемму о существовании модели для логики GW.

Лемма 2.11. *Любая τ-неотделимая в* GW *пара* (Γ, Δ), *где* $\tau = \nu(\Gamma) \cap \nu(\Delta^*)$, *выполнима в некоторой конечной частично упорядоченной модели, имеющей высоту не более чем* 2.

Доказательство. Определим модель M таким же способом, как в доказательстве теоремы 2.6. Однако при построении множеств Φ_i добавляем к S_i формулы $\Box(\varphi^* \vee \Box\varphi)$ для каждой формулы $\varphi \in S_i$. Далее в качестве W берем множество (Φ_1, Φ_2)-полных пар, τ-неотделимых в GW, и определяем отношения $\preceq$ и $\models$ в точности так же, как в доказательстве теоремы 2.6. Определим подмодель $M_1 = (W_1, \preceq_1, \models_1)$ модели M, включая в W_1 лишь одну (Φ_1, Φ_2)-полную пару, расширяющую исходную пару (Γ, Δ), и максимальные относительно порядка $\preceq$ пары множества W. Утверждение леммы о существовании модели сразу вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.12. *Пусть* $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in W_1$. *Тогда для любого* $i = 1, 2$ *и любой формулы* φ

$$(\varphi \in S_i \text{ и } \varphi \in \Gamma_i) \Rightarrow (\Gamma_1, \Gamma_2) \models_1 \varphi.$$

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 2.8 во всех пунктах, кроме индукционного перехода от φ_1 к $\Diamond\varphi_1$. Итак, рассмотрим случай, когда $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in W_1$ и $\Diamond\varphi_1 \in S_i$, $\Diamond\varphi_1 \in \Gamma_i$.

Если $\varphi_1 \in \Gamma_i$, то по индукционной гипотезе $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models_1 \varphi_1$, значит, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models_1 \Diamond\varphi_1$.

Рассмотрим случай $\varphi_1 \notin \Gamma_i$. В этом случае $\varphi_1^* \in \Gamma_i$. Положим $\Delta_i = \{\Box\psi \mid \Box\psi \in \Gamma_i\}$.

Пусть $i = 1$. Рассмотрим (Φ_1, Φ_2)-пару $(\Delta_1 \cup \{\varphi_1\}, \Delta_2)$.

Докажем, что пара τ-неотделима. Допустим противное. Тогда существует формула θ такая, что $\nu(\theta) \subseteq \tau$ и

$$\Delta_1, \varphi_1 \vdash \theta; \quad \Delta_2 \vdash \neg\theta.$$

Отсюда

$$\Delta_1, \neg\theta \vdash \neg\varphi_1, \quad \Box\Delta_1, \Box\neg\theta \vdash \Box\neg\varphi_1, \quad \Delta_1, \Box\neg\theta \vdash \Box\neg\varphi_1, \quad \Delta_1, \Diamond\varphi_1 \vdash \Diamond\theta.$$

Кроме того, $\Delta_2 \vdash \Box\neg\theta$, а значит, $\Delta_2 \vdash \neg\Diamond\theta$. Следовательно, $\Diamond\theta$ отделяет пару (Γ_1, Γ_2); противоречие.

Таким образом, пара $(\Delta_1 \cup \{\varphi_1\}, \Delta_2)$ τ-неотделима и по лемме 2.5 может быть расширена до полной пары $(\Gamma_1', \Gamma_2') \in W$.

Кроме того, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \preceq (\Gamma_1', \Gamma_2')$. В самом деле, заметим, что формула $\Box\varphi_1$ не принадлежит Γ_1, так как $\varphi_1 \notin \Gamma_1$. Покажем, что $\Box\varphi_1$ входит в Γ_1'. В GW имеем $\neg\varphi_1 \vdash \Box(\varphi_1 \to \Box\varphi_1)$. Поэтому $\Box(\varphi_1^* \vee \Box\varphi_1) \in \Gamma_1$, далее $\varphi_1, \Box(\varphi_1^* \vee \Box\varphi_1) \in \Gamma_1'$, а значит, $\Box\varphi_1$ входит в Γ_1'.

Поскольку множество W конечно, оно содержит максимальную пару (Γ_1'', Γ_2''), достижимую из (Γ_1', Γ_2'). Тогда $(\Gamma_1'', \Gamma_2'') \in W_1$, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \preceq_1 (\Gamma_1'', \Gamma_2'')$, $\Box\varphi_1 \in \Gamma_1$" и $\varphi_1 \in \Gamma_1$".

По индукционной гипотезе $(\Gamma_1'', \Gamma_2'') \models_1 \varphi_1$. Значит, $(\Gamma_1, \Gamma_2) \models_1 \Diamond\varphi_1$.

Случай $i = 2$ рассматривается аналогично. $\Box$

Далее лемма о существовании модели для GW доказывается точно так же, как для Grz. $\Box$

Доказательство LIP для GW дословно повторяет доказательство теоремы 2.9.

Заметим, что логики Grz.2 и GW.2 получаются добавлением S4-консервативной аксиомы $\Box(\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box p)$ к Grz и GW соответственно. По лемме 1.3 из доказанного для последних логик свойства LIP вытекает LIP для Grz.2 и GW.2. $\Box$

Таким образом, интерполяционное свойство Линдона доказано для всех расширений логики Grz со свойством CIP, за исключением логики GV, для которой свойство LIP остается открытой проблемой.

3. Суперинтуиционистские логики

Картина в суперинтуиционистских логиках близка к положению в расширениях логики Grz. Существует точно семь непротиворечивых логик с интерполяционным свойством Крейга [16], а именно сама интуиционистская логика Int, логики KC, LP_2, LV, LS, классическая логика Cl и известная логика Даммета LC, которая характеризуется линейно упорядоченными моделями. Логики KC, LP_2, LV, LS характеризуются соответственно ч.у. шкалами с наибольшим элементом, ч.у. шкалами высоты 2, трехэлементной шкалой с двумя максимальными элементами и двухэлементной линейно упорядоченной шкалой.

Униформное интерполяционное свойство в Int доказано в [6]. Отсюда следует UIP в логике KC=Int+$\neg p \vee \neg\neg p$, аксиоматизируемой Int-консервативной аксиомой [3]. Остальные логики с CIP локально табличные. Подобно предложению 1.4 получается

Предложение 3.1. *Для любой суперинтуиционистской логики свойства* CIP *и* UIP *равносильны.*

Линдон доказал LIP для Cl [5]. Свойство LIP для логики Int, а также для KC и LS установлено в [11]. Докажем, что логика LP_2, характеризуемая шкалами высоты 2, также имеет LIP. Для этого используем сведение суперинтуиционистских логик к расширениям логики S4.

Широко известно [17], что существует перевод Геделя — Тарского T из Int в S4, удовлетворяющий условию: $A \in$ Int равносильно $T(A) \in$ S4 для любой формулы A. Каждой нормальной модальной логике L над S4 соответствует ее *интуиционистский фрагмент* $\rho(L) = \{A \mid T(A) \in L\}$.

Лемма 3.2 [11]. *Если модальная логика имеет* LIP, *то ее интуиционистский фрагмент также имеет* LIP.

Теорема 3.3. *Следующие пять непротиворечивых суперинтуиционистских логик имеют* LIP: Int, KC, LP_2, LS, Cl.

Доказательство. Логика LP_2 является интуиционистским фрагментом логики GW, поэтому утверждение следует из леммы 3.2 и теоремы 2.10.

Для логик Int, KC, LS можно вывести LIP тем же способом из теорем 2.9 и 2.10; для них утверждение уже доказано ранее [11]. $\Box$

Под вопросом остаются еще две суперинтуиционистские логики, имеющие свойство CIP, а именно логики LC и LV.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Craig W.* Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symb. Log. 1957. V. 22, N 3. P. 269–285.
2. *Barwise J., Feferman S., eds.* Model-theoretic logics. New York: Springer-Verl., 1985.
3. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.
4. *Benthem J. van.* The many faces of interpolation // Synthese. 2008. V. 164, N 3. P. 451–460.
5. *Lyndon R.* An interpolation theorem in the predicate calculus // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 129–142.
6. *Pitts A. M.* On an interpretation of second order quantification in first order intuitionistic propositional logic // J. Symb. Log. 1992. V. 57, N 1. P. 33–52.
7. *Ghilardi S.* An algebraic theory of normal forms // Ann. Pure Appl. Logic. 1995. V. 71. P. 189–245.
8. *Shavrukov V. Yu.* Subalgebras of diagonalizable algebras of theories containing arithmetics: Thes. ... doct. phylosophy (mathematics). Polska Academia Nauk, Math. Inst., Warszawa, 1993.
9. *D'Agostino G., Hollenberg M.* Logical questions concerning the μ-calculus: interpolation, Lyndon and Los–Tarski // J. Symb. Log. 2000. V. 65, N 1. P. 310–332.
10. *Ghilardi S., Zawadowski M.* A sheaf representation and duality for finitely generated Heyting algebras // J. Symb. Log. 1995. V. 60, N 3. P. 911–939.
11. *Максимова Л. Л.* Интерполяционная теорема Линдона в модальных логиках. Математическая логика и теория алгоритмов // Труды института математики. Новосибирск: Наука, 1982. Т. 2. С. 45–55.
12. *Boolos G.* On systems of modal logic with provability interpretations // Theoria. 1980. V. 46. P. 7–18.
13. *Visser A.* Uniform interpolation and layered bisimulation // Goedel'96. Berlin: Springer-Verl., 1996. P. 139–164.
14. *Шамканов Д. С.* Интерполяционные свойства логик доказуемости GL и GLP. // Алгоритмические вопросы алгебры и логики: Сб. статей. Тр. МИАН. М.: МАИК, 2011. Т. 274. С. 329–342.
15. *Segerberg K.* An essay in classical modal logic. Uppsala: Uppsala Univ., 1971.
16. *Максимова Л. Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 643–681.
17. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 17 декабря 2012 г.

Максимова Лариса Львовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru