Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 514.76

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР НА СТРОГО ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВОМ 6–МНОГООБРАЗИИ

Н. А. Даурцева

Аннотация. Показано, что почти комплексная структура, положительно ассоциированная с келеровой 2-формой на строго приближенно келеровом 6-многообразии, не интегрируема.

Ключевые слова: строго приближенно келерово 6-многообразие, положительно ассоциированные почти комплексные структуры, интегрируемость.

1. Введение. Пусть (M, g, J, ω) — почти эрмитово многообразие, где g — риманова метрика, J — почти комплексная структура, согласованная с g, и ω — соответствующая келерова форма, $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$. *Приближенно келерово* (далее NK — nearly Kähler) многообразие — это почти эрмитово многообразие $(M,\ g,\ J,\ \omega)$, на котором $(\nabla_X J)X = 0$ для всех $X \in \Gamma(TM)$, где ∇ обозначает связность Леви-Чивиты метрики g. Если дополнительно $\nabla_X J \neq 0$ для любого ненулевого векторного поля X, то такое многообразие называется *строго приближенно келеровым* (далее SNK — strictly nearly Kähler). Приближенно келерова геометрия возникла благодаря концепции слабой голономии, введенной Грэем в 1971 [1], она соответствует слабой голономии с группой $U(n)$. Как известно, $U(n)$ является структурной группой почти эрмитова многообразия, в случае же, когда группа голономии совпадает с $U(n)$, данное почти эрмитово многообразие келерово. В ослабленном случае [1] почти эрмитово многообразие со слабой группой голономии $U(n)$ приближенно келерово. Также класс NK-многообразий естественным образом возникает как один из шестнадцати классов почти эрмитовых многообразий, описанных в классификации Грэя — Хервеллы [2]. В 2002 г. Надь в [3] доказал, что каждое компактное односвязное NK-многообразие M изометрично риманову произведению $M_1 \times \cdots \times M_k$ такому, что M_i для каждого i является NK-многообразием из следующего списка: келеровы многообразия, естественно редуктивные 3-симметрические пространства, твисторные пространства над компактными кватернионно келеровыми многообразиями с положительной скалярной кривизной и приближенно келеровы 6-многообразия. Это одна из причин повышенного интереса к приближенно келеровым 6-многообразиям. В случае размерности 6 существует несколько эквивалентных условий, определяющих строго приближенно келерову структуру (g, J, ω) на M. Например, следующие условия:

(i) $(\nabla_X J)Y$ кососимметрична относительно X, Y и не равна нулю;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00873–а) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–544.2012.1).

(ii) форма $\nabla\omega$ не равна нулю, тотально кососимметрична и $\nabla_X \omega = \frac{1}{3}\iota_X d\omega$ для любого $X \in \Gamma(TM)$;

(iii) структурная группа M допускает редукцию к $SU(3)$, т. е. существует (3,0)-форма Ω с $|\Omega| = 1$ и

$$d\omega = 3\lambda \operatorname{Re}\Omega, \quad d \operatorname{Im}\Omega = -2\lambda\omega^2,$$

где λ — ненулевая вещественная константа, эквивалентны и определяют строго приближенно келерово 6-многообразие (см. [4]).

Согласно (iii) для SNK-структуры (g, J, ω) внешний дифференциал $d\omega$ ненулевой и имеет тип (3,0)+(0,3), поскольку ω имеет тип (1,1) относительно J — это означает, что $d^{-1,2} \neq 0$, стало быть, J не может быть интегрируемой. Таким образом, естественно задать вопрос, могут ли существовать интегрируемые почти комплексные структуры «по соседству» с некоторой приближенно келеровой структурой. Известно [5], например, что почти комплексная структура J на SNK-многообразии (M, g, J, ω) не может быть совместима с симплектической формой даже локально. В данной статье мы даем ответ на вопрос: существует ли на строго приближенно келеровом 6-многообразии (M, g, J, ω) интегрируемая почти комплексная структура, совместимая с ω?

2. Основной результат. Введем следующие обозначения для почти эрмитова многообразия (M, g, J, ω): A^+ — пространство почти комплексных структур на M, сохраняющих ориентацию, A^+_ω — множество всех почти комплексных структур на M, положительно ассоциированных с ω,

$$A^+_\omega = \{I \in A^+ : \omega(IX, IY) = \omega(X, Y)\, \forall X, Y \in \Gamma(TM);\, \omega(X, IX) > 0\, \forall X \neq 0\},$$

AO^+_g — множество всех g-ортогональных положительно ориентированных почти комплексных структур.

$$AO^+_g = \{I \in A^+ : g(IX, IY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)\}.$$

Лемма 1. *Для произвольной почти комплексной структуры $I \in A^+_\omega$ эндоморфизм $J + I$ не вырожден.*

Доказательство. Предположим, что существует почти комплексная структура $I \in A^+_\omega$, для которой $J+I$ вырожден. Тогда $(J+I)_x(X) = 0$ для некоторого $x \in M$, $X \in T_xM$. Таким образом, $\omega_x(X, J_x(X)) = -\omega_x(X, I_x(X))$, что противоречит положительности $\omega_x(X, J_x(X))$ и $\omega_x(X, I_x(X))$. Лемма доказана.

Как следствие леммы для каждой почти комплексной структуры $I \in A^+_\omega$ определен эндоморфизм:

$$K = (J + I)^{-1}(I - J) = (1 - IJ)^{-1}(1 + IJ).$$

Нетрудно показать, что для K

1) $KJ = -JK$;

2) $g(KX, Y) = g(X, KY)\ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$;

Свойства 1 и 2 дают также кососимметричность K относительно ω: $\omega(KX, Y) = -\omega(X, KY)$.

Лемма 2. *Условие положительности $\omega(X, IX) > 0$ для всех ненулевых $X \in \Gamma(TM)$ эквивалентно положительности $1 - K^2$ относительно метрики g.*

Доказательство. По определению келеровой формы $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, а значит, $\omega(X, IX) = g(JX, IX)$. Выразим I через K. Так как $K = (J+I)^{-1}(I-$

J), имеем $I = J(1+K)(1-K)^{-1}$. Тогда

$$g(JX, IX) = g(JX, J(1+K)(1-K)^{-1}X)$$
$$= g(X, (1+K)(1-K)^{-1}X) = g((1-K)^{-1}X, (1-K^2)(1-K)^{-1}X).$$

Стало быть, для положительности $\omega(X, IX)$ необходима положительность $1 - K^2$ относительно g. Лемма доказана.

Обозначим через K_J множество эндоморфизмов, удовлетворяющих условию положительности леммы 2, а также обладающих свойствами 1 и 2. Тогда A_ω^+ и K_J находятся во взаимно однозначном соответствии, устанавливаемом формулами

$$K = (J+I)^{-1}(I-J), \quad I = (1-K)J(1-K)^{-1}.$$

Свойства 1 и 2 дают инвариантность I относительно формы ω, а положительность $1 - K^2$ относительно g согласно лемме 2 эквивалентна положительности $\omega(X, IX)$ для всех ненулевых $X \in \Gamma(TM)$.

Теорема. *Для строго приближенно келерова 6-многообразия* (M, g, J, ω) *всякая почти комплексная структура* $I \in A_\omega^+$ *не интегрируема.*

Доказательство. Пусть $I \in A_\omega^+$ — почти комплексная структура и $K = (J+I)^{-1}(I-J)$ — соответствующий ей эндоморфизм из K_J. Пусть $X \in T_xM$ — собственный вектор эндоморфизма $1-K^2$, соответствующий собственному значению λ. Тогда $(1-K^2)JX = J(1-K^2)X = \lambda JX$ и $(1-K^2)(X - iJX) = \lambda(X - iJX)$. Это же свойство выполняется для эндоморфизма $1 - K^2$, естественным образом продолженного на T^*M. Таким образом, локально на некотором открытом множестве $U \subset M$ можно определить g-ортогональный базис ν^1, ν^2, ν^3 в пространстве $\Lambda_J^{1,0}$ ((1,0)-форм относительно J), состоящий из собственных векторов $1 - K^2$ в $T^*U \otimes \mathbb{C}$.

Имеем $\omega(\nu^k, \nu^l) = g(J\nu^k, \nu^l) = ig(\nu^k, \nu^l) = 0$ для $k, l = 1, 2, 3$, а значит, у ω тип (1,1) в базисе $(\nu, \bar\nu) = (\nu^1, \nu^2, \nu^3, \bar\nu^1, \bar\nu^2, \bar\nu^3)$ пространства $\Lambda_J^{1,0} \oplus \Lambda_J^{0,1}$.

Определим формы $\theta^k = (1-K)\nu^k$, $k = 1, 2, 3$, в $T^*U \otimes \mathbb{C}$. Поскольку $I\theta^k = (1-K)J(1-K)^{-1}(1-K)\nu^k = i(1-K)\nu^k = i\theta^k$, то $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ — базис пространства $\Lambda_I^{1,0}$ (пространства (1,0)-форм относительно I).

Найдем значение формы ω на θ^k, θ^l для произвольных $k, l = 1, 2, 3$:

$$\omega(\theta^k, \theta^l) = \omega((1-K)\nu^k, (1-K)\nu^l) = \omega(\nu^k, (1-K^2)\nu^l) = \lambda_l \omega(\nu^k, \nu^l) = 0,$$

где λ_l — собственное значение оператора $1 - K^2$ с собственным вектором ν^l. Таким образом, форма ω имеет тип (1,1) в базисе $(\theta, \bar\theta) = (\theta^1, \theta^2, \theta^3, \bar\theta^1, \bar\theta^2, \bar\theta^3)$ пространства $\Lambda_I^{1,0} \oplus \Lambda_I^{0,1}$.

В базисе $(\nu, \bar\nu)$ имеем $d\omega = \nu^1 \wedge \nu^2 \wedge \nu^3 + \bar\nu^1 \wedge \bar\nu^2 \wedge \bar\nu^3$. Вычислим $d\omega^{(3,0)}$ в базисе $(\theta, \bar\theta)$. В локальном базисе $(\nu, \bar\nu)$ матрица оператора $1 - K$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & \overline{V} \\ V & 1 \end{pmatrix}$, где $V^T = V$, $1 - V\overline{V} > 0$. Значит, по определению $(\theta, \bar\theta) = (\nu, \bar\nu)\begin{pmatrix} 1 & \overline{V} \\ V & 1 \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{V} \\ V & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & -\overline{V}\Lambda^{-1} \\ -V\Lambda^{-1} & \Lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

где Λ — диагональная матрица собственных значений $1-K^2$, соответствующих собственным векторам (ν^1,ν^2,ν^3). Таким образом, $(\nu^1,\nu^2,\nu^3) = (\theta^1,\theta^2,\theta^3)\Lambda^{-1} - (\bar\theta^1,\bar\theta^2,\bar\theta^3)V\Lambda^{-1}$ и

$$d\omega^{(3,0)} = \frac{1}{\sqrt{\det(1-K^2)}}\theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3 \neq 0.$$

Так как ω имеет тип (1,1) относительно I, то $d\omega^{(3,0)} \neq 0$ в базисе $(\theta,\bar\theta)$ дает $d^{2,-1} \neq 0$ для I, что доказывает неинтегрируемость этой структуры. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что в действительности условие на 6-многообразие (M,g,J,ω) быть строго приближенно келеровым не используется полностью. Можно ослабить условие теоремы, потребовав для формы ω только $d\omega^{(3,0)+(0,3)} \neq 0$ и $d\omega^{(1,2)+(2,1)} = 0$ относительно J.

3. Почти комплексные структуры на S^6. Рассмотрим в качестве 6-мерного многообразия сферу S^6. Зафиксируем на ней стандартную метрику g_0, индуцированную вложением S^6 в $\mathbb{R}^7$. Согласно известному результату из [6] сфера S^6 не допускает ортогональных интегрируемых почти комплексных структур — любая почти комплексная структура $J \in AO^+_{g_0}$ не интегрируема. Вопрос о существовании комплексной структуры (не ортогональной относительно стандартной метрики g_0) на сфере S^6 на сегодняшний день открыт. Рассмотрим пространство $A^+(S^6)$ всех положительно ориентированных почти комплексных структур на S^6. Известно [7], что данное пространство является гладким локально тривиальным расслоением над пространством $AO^+_{g_0}(S^6)$ со слоем $A^+_{\omega_J}(S^6)$ над $J \in AO^+_{g_0}(S^6)$, где $\omega_J(X,Y) = g_0(JX,Y)$. Таким образом, учитывая неинтегрируемость структур пространства $AO^+_{g_0}(S^6)$, вопрос существования комплексной структуры на 6-мерной сфере можно сформулировать следующим образом: существует ли почти комплексная структура $J \in AO^+_{g_0}(S^6)$ такая, что соответствующий ей слой $A^+_{\omega_J}(S^6)$ расслоения $A^+(S^6)$ содержит комплексную структуру, и если она существует, то какими свойствами должна обладать? Согласно доказанной выше теореме пока можно дать только частичный ответ на этот вопрос: искомая почти комплексная структура $J \in AO^+_{g_0}(S^6)$ не может быть строго приближенно келеровой.

Все SNK-структуры на 6-мерной сфере [8, 9] G_2-инвариантны, ортогональны относительно метрики g_0 и образуют 7-мерное подпространство в бесконечномерном пространстве $AO^+_{g_0}(S^6)$, диффеоморфное $SO(7)/G_2 = \mathbb{R}P^7$, обозначим это подпространство через $\mathrm{SNK}(S^6)$. Таким образом, все почти комплексные структуры, принадлежащие слоям $A^+_{\omega_J}(S^6)$ расслоения $A^+(S^6)$, лежащим над множеством $\mathrm{SNK}(S^6) \subset AO^+_{g_0}(S^6)$, не интегрируемы. Этот результат расширяет известное ранее множество неинтегрируемых почти комплексных структур на S^6.

Благодарность. Автор выражает благодарность М. Вербицкому и Н. К. Смоленцеву за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gray A.* Weak holonomy groups // Math. Z. 1971. Bd 125. S. 290–300.

2. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. V. 123. P. 35–58.

3. *Nagy N.-A.* Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations // Asian J. Math. 2002. N 3. P. 481–504.
4. *Verbitsky M.* An intrinsic volume functional on almost complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry // Pacific J. of Math. 2008. V. 235, N 2. P. 323–344.
5. *Lejmi M.* Strictly nearly Kähler 6-manifolds are not compatible with symmetric forms // C. R. Acad. Sci. Paris. Math. Ser. I. 2006. V. 343. P. 759–762.
6. *LeBrun C.* Orthogonal complex structures on S^6 // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101, N 1. P. 136–138.
7. *Daurtseva N.* On the manifold of almost complex structures // Math. Notes. 2005. V. 78, N 1–2. P. 59–63.
8. *Calabi E., Gluck H.* What are the best almost complex structures on the 6-sphere? // Proc. Symp. Pure Math. 1993. V. 54, N 2. P. 99–106.
9. *Butruille J.-B.* Classification des variété approximativement Kähleriennes homogénes // Ann. Global Anal. Geom. 2005. V. 27, N 3. P. 201–225.

Статья поступила 13 мая 2013 г.

Даурцева Наталия Александровна
Кемеровский гос. университет, математический факультет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
natali0112@ngs.ru