Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НАСЛЕДСТВЕННЫХ НАСЫЩЕННЫХ СВЕРХРАДИКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Аннотация. Рассматривается специальный класс наследственных насыщенных формаций конечных групп. Анализируется роль таких формаций в проблеме классификации всех сверхрадикальных формаций.

Ключевые слова: конечная группа, критическая группа, сверхрадикальная насыщенная формация.

Светлой памяти Л. А. Шеметкова посвящается

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1].

Формация $\mathfrak{F}$ называется *формацией с условием Шеметкова*, если любая $\mathfrak{F}$-критическая группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Как показано в [2, 3], любая разрешимая насыщенная формация $\mathfrak{F}$ с условием Шеметкова обладает следующим свойством.

Если A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы $G = AB$, то $G \in \mathfrak{F}$.

В связи с этим результатом (и его дальнейшим развитием в работе [4]) в «Коуровской тетради» [5] под номером 14.99 Л. А. Шеметковым сформулирована задача нахождения всех насыщенных сверхрадикальных формаций.

Первая серия таких неразрешимых формаций построена Л. А. Шеметковым в [6] (совместно с В. Н. Семенчуком): любая формация вида $\bigcap\limits_{i,j\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, где $\mathfrak{G}_{\pi_i}$ — формация всех π_i-групп, сверхрадикальна. В [7] доказано, что такими формациями исчерпываются все насыщенные наследственные сверхрадикальные формации $\mathfrak{F}$, у которых все $\mathfrak{F}$-критические группы разрешимы (в этом случае $\mathfrak{F}$-критические группы являются либо группами Шмидта, либо группами простого порядка, а значит, $\mathfrak{F}$ является формацией с условием Шеметкова).

В то же время простые примеры показывают, что класс $\mathfrak{F}$-критических групп насыщенной сверхрадикальной формации $\mathfrak{F}$ может содержать и неразрешимые группы. Поэтому в общем случае множество насыщенных сверхрадикальных формаций шире множества формаций с условием Шеметкова.

В настоящей работе с использованием классификации конечных простых неабелевых групп строится новая серия наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций, включающая в себя многие известные примеры сверхрадикальных формаций: мы рассматриваем формации $\mathfrak{F} = LF(f)$, имеющие такое полное локальное формационное определение f, что $f(p) = \mathrm{E}_{f(p)}f(p)$ и $f(p)$ —

наследственная формация для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$. Исчерпывающее описание $\mathfrak{F}$-критических групп для таких формаций приводится в теореме 1.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полная формационная функция такая, что $f(p) = \mathrm{E}_{f(p)}f(p)$ и $f(p)$ — наследственная формация для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$. Если G — $\mathfrak{F}$-критическая группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(I) *группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;*

(II) *группа G является группой Шмидта;*

(III) *G — простая неабелева группа;*

(IV) *G — примитивная группа с абелевым p-цоколем N и максимальной подгруппой M такой, что $G = MN$, $(p, |M|) = 1$ и $M/\Phi(M)$ — $f(p)$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой;*

(V) *G — примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N, $G = QN$, $|Q| = q$, $q \notin \pi(N)$, и Q — $f(p)$-критическая группа для некоторого p, делящего порядок подгруппы N.*

Таким образом, в заключении теоремы 1 выделяются 5 типов $\mathfrak{F}$-критических групп с единичной подгруппой Фраттини. Классификация их осуществляется по двум ключевым признакам:

1) композиционной длине группы (простая группа или не простая);

2) характеру цоколя группы (является он абелевым или неабелевым).

Главная цель работы — доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть f — полная формационная функция такая, что $f(p) = \mathrm{E}_{f(p)}f(p)$ и $f(p)$ — наследственная формация для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$. Если формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ не имеет $\mathfrak{F}$-критических групп типа* (IV), *то $\mathfrak{F}$ сверхрадикальная.*

Следствие 1 [2–4]. *Пусть f — полная формационная функция такая, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ сверхрадикальная.*

Следствие 2 [6, 7]. *Пусть f — полная формационная функция такая, что $f(p) = \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ сверхрадикальная.*

2. Определения и предварительные результаты

Будем использовать следующие определения и обозначения:

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;

Z_p — циклическая группа порядка p;

$\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G;

если $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, то $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$;

$\mathrm{Com}(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G;

$\mathrm{Com}(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G \in \mathfrak{F}} \mathrm{Com}(G)$;

$\mathrm{E}\,\mathrm{Com}(\mathfrak{F})$ — класс всех групп G таких, что $\mathrm{Com}(G) \subseteq \mathfrak{F}$;

$\mathrm{E}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$ — класс всех групп G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ для некоторой нормальной подгруппы N из G;

$s\mathfrak{F}$ — класс всех групп G, для которых $G \subseteq H \in \mathfrak{F}$;

$s_n\mathfrak{F}$ — класс всех групп G таких, что $G \trianglelefteq H \in \mathfrak{F}$;

$\mathfrak{G}_\pi$ — класс всех π-групп;

$\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех разрешимых π-групп.

Если $s\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$), то класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* (*нормально наследственным*).

Напомним, что формацией является класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом группы* G).

Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_n = H,$$

что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *радикальной* (или *формацией Фиттинга*), если она является нормально наследственной и из условия $G = AB$, где A и B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Группа G называется *$\mathfrak{F}$-критической*, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, а все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. *Группа Шмидта* — это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Функция

$$f : \mathrm{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией*. Следуя [1], через $\mathrm{Supp}(f)$ будем обозначать множество $\{p \in \mathrm{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$. Формационная функция f называется *полной*, если $f(p) = \mathfrak{G}_p f(p)$ для всех $p \in \mathrm{P}$. Для формационной функции f главный фактор A/B группы G называется *f-центральным*, если

$$G/C_G(A/B) \cong \mathrm{Aut}_G(A/B) \in f(p)$$

для всех $p \in \pi(A/B)$. Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп G таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы G f-центральный. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции* f.

Приведем ряд утверждений, необходимых для доказательства основных результатов.

Лемма 2.1 [1, теорема IV.3.2]. *Пусть f — формационная функция и $\pi = \mathrm{Supp}(f)$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $G \in LF(f)$;

(b) $G \in \bigcap\limits_{p\in\pi} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p f(p) \cap \mathfrak{G}_\pi$;

(c) *все главные факторы группы G f-центральны.*

Следующий результат известен как теорема Гашюца — Любезедер — Шмидта.

Лемма 2.2 [1, теорема IV.4.6]. *Формация $\mathfrak{F}$ насыщенна тогда и только тогда, когда она локальна.*

Лемма 2.3 [1, предложение IV.3.14]. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$. Если формация $f(p)$ наследственная для любого $p \in \operatorname{Supp}(f)$, то формация $\mathfrak{F}$ также наследственная. Если формация $f(p)$ радикальная для любого $p \in \operatorname{Supp}(f)$, то формация $\mathfrak{F}$ также радикальная.*

Нам понадобится следующая информация о свойствах $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать через $sn_{\mathfrak{F}}(G)$.

Лемма 2.4 [8, лемма 3.1.4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда*

1) *если $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$, то $HN/N \in sn_{\mathfrak{F}}(G/N)$;*

2) *если $N \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$ тогда и только тогда, когда $H/N \in sn_{\mathfrak{F}}(G/N)$.*

Лемма 2.5 [8, лемма 3.1.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда*

1) *если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$;*

2) *если $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$, то $H \cap K \in sn_{\mathfrak{F}}(K)$ для любой подгруппы K группы G.*

Будем использовать также следующие результаты о $\mathfrak{F}$-критических группах.

Лемма 2.6 [9, теорема 26.1]. *Пусть G — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}$, где $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$;

2) *силовская p-подгруппа P группы G нормальна в G;*

3) *если Q — силовская q-подгруппа G, то она является циклической группой;*

4) *если $\Phi(G) = 1$, то P — минимальная нормальная подгруппа группы G и $|Q| = q$.*

Лемма 2.7 [9, лемма 24.5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — $\mathfrak{F}$-критическая группа, имеющая неединичную нормальную силовскую p-подгруппу P. Тогда $P = G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство следующего результата осуществляется простой проверкой.

Лемма 2.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация такая, что $\mathfrak{F} = \mathrm{E}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} = \mathrm{E}\operatorname{Com}(\mathfrak{F})$;

2) *если $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}$;*

3) *формация $\mathfrak{F}$ насыщенна.*

Лемма 2.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация такая, что $\mathfrak{F} = \mathrm{E}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$. Если G — $\mathfrak{F}$-критическая группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $|G| = p$, *где* $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) *G — простая неабелева группа и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. По лемме 2.8 $\mathfrak{F} = \mathrm{E}\operatorname{Com}(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Пусть $p \notin \pi$ для некоторого простого $p \in \pi(G)$. Если $|G| > p$, то группа G содержит подгруппу P порядка p. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-критической группы следует, что $P \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi$. Пришли к противоречию. Следовательно, $|G| = p$ и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $\pi(G) \subseteq \pi$ и N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\Phi(G) = 1$, существует максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$. Тогда из $M \in \mathfrak{F}$ и $G/N \cong M/M \cap N$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $N \neq G$, то из $N \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathrm{E}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $N = G$, и G — простая группа. Лемма доказана.

Лемма 2.10. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация такая, что $\mathfrak{F} = \mathrm{E}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда группа G $\mathfrak{F}$-критическая, когда либо $|G| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, либо $G/\Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой.*

Доказательство. Пусть G — $\mathfrak{F}$-критическая группа. По лемме 2.8 формация $\mathfrak{F}$ насыщенна. Поэтому $G/\Phi(G) \notin \mathfrak{F}$. Так как G — $\mathfrak{F}$-критическая группа и $\mathfrak{F}$ — формация, все собственные подгруппы группы $G/\Phi(G)$ принадлежат $\mathfrak{F}$. Значит, $G/\Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-критическая группа.

По лемме 2.9 справедливо одно из следующих утверждений:

1) $|G/\Phi(G)| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа.

Если $|G/\Phi(G)| = p$ и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то, очевидно, G является p-группой. Предположим, что $|G| = p^n$, где $n > 1$. Если P — подгруппа группы G, имеющая порядок p, то из определения $\mathfrak{F}$-критической группы следует, что $P \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi(\mathfrak{F})$; противоречие. Значит, $n = 1$ и $|G| = p$.

Докажем обратное утверждение. Если $|G| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то, очевидно, G — $\mathfrak{F}$-критическая группа.

Пусть $G/\Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой. По лемме 2.9 $\pi(G/\Phi(G)) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Значит, из свойств подгруппы Фраттини следует, что $\pi(\Phi(G)) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как по лемме 2.8 $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Поскольку $G/\Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-критическая группа, $M/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Из того, что $\mathfrak{F} = \mathrm{E}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}$, имеем $M \in \mathfrak{F}$. Значит, G — $\mathfrak{F}$-критическая группа. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько этапов.

(1) *Группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N.*

Так как $\Phi(G) = 1$, существует максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$. Поэтому из $M \in \mathfrak{F}$ и $G/N \cong M/M \cap N$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если L — минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично показывается, что $G/L \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \cong G/N \cap L \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$. Значит, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

(2) *Справедливо включение $C_G(N) \subseteq N$, причем $C_G(N) = N$, если N — абелева группа, и $C_G(N) = 1$, если N — неабелева группа.*

Утверждение вытекает из того, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$.

(3) *Подгруппа N является $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G.*

Утверждение следует из определения $\mathfrak{F}$-критической группы и того, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

(4) *Если $G^{\mathfrak{F}} = G$, то G либо группа простого порядка p, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, либо простая неабелева группа.*

Если $G^{\mathfrak{F}} = G$, то из равенства $G^{\mathfrak{F}} = N$ следует, что G — простая группа. При этом если G — абелева группа порядка p, то из $G \notin \mathfrak{F}$ вытекает $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

(5) *Если N — собственная подгруппа группы G и $|N| = p^k$, то $G = MN$, где M — максимальная подгруппа группы G, являющаяся $f(p)$-критической группой. При этом либо $|M| = q$, где $q \notin \pi(f(p))$, либо $M/\Phi(M)$ — $f(p)$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой.*

Так как N — абелева подгруппа, то $M \cap N = 1$. Если $M \in f(p)$, то

$$M \cong G/N = G/C_G(N) \in f(p)$$

и $G \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию. Значит, $M \notin f(p)$.

Пусть R — максимальная подгруппа группы M. Ввиду $C_G(N) = N$ имеем, что $F_p(RN) = O_p(RN)$. Так как $RN \in \mathfrak{F}$, по лемме 2.1

$$RN/F_p(RN) \cong R/R \cap O_p(RN) \in f(p).$$

Поэтому $R/O_p(R) \in f(p)$. Поскольку f — полная формационная функция, $f(p) = \mathfrak{G}_p f(p)$, а значит, $R \in f(p)$. Таким образом, подгруппа M не принадлежит формации $f(p)$, а все ее собственные подгруппы входят в $f(p)$, т. е. M — $f(p)$-критическая группа.

По лемме 2.10 либо $|M| = q$, где $q \notin \pi(f(p))$, либо $M/\Phi(M)$ — $f(p)$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой.

(6) *Если G — разрешимая группа непростого порядка, то она является группой Шмидта.*

Так как группа G разрешима, из п. (5) следует, что $G = MN$, где $|N| = p^k$, $|M| = q$ и $p \neq q$. Простая проверка показывает, что в группе G все максимальные подгруппы нильпотентны. Поскольку сама группа не нильпотентна, G — группа Шмидта.

(7) *Если G — неразрешимая группа с абелевым p-цоколем N, то $G = MN$, $(p, |M|) = 1$ и $M/\Phi(M)$ — $f(p)$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой.*

Так как группа G не разрешима, из п. (5) следует, что $M/\Phi(M)$ — $f(p)$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой. Предположим, что p делит порядок подгруппы M. Поскольку $M/\Phi(M) \in \mathfrak{F}$, из того, что $M/\Phi(M)$ — простая неабелева группа, следует $M/\Phi(M) \in f(p)$. Так как M — $f(p)$-критическая группа, $\Phi(M) \in f(p)$. Из условия $f(p) = \mathrm{E}_{f(p)} f(p)$ имеем $M \in f(p)$; противоречие. Следовательно, p не делит $|M|$.

(8) *Если G — неразрешимая группа с неабелевым цоколем N, то G/N — $f(p)$-критическая группа для некоторого простого p, делящего порядок подгруппы N. При этом $(G/N)^{f(p)} = G/N$ и $|G/N| = q$, где q — простое число, не принадлежащее $\pi(f(p))$.*

Если $G \in f(p)$ для любого простого p, делящего порядок подгруппы N, то минимальная нормальная подгруппа N группы G f-центральна в группе G и $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $G \notin f(p)$ для некоторого простого p, делящего порядок подгруппы N. Отсюда следует, что группа G содержит некоторую $f(p)$-критическую подгруппу D. Так как $N \in f(p)$, то D не содержится в N.

Рассмотрим подгруппу DN. Если DN — собственная подгруппа группы G, то $DN \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из равенства $C_G(N) = 1$ следует, что $DN \in f(p)$. Так как формация $f(p)$ наследственна, то $D \in f(p)$. Пришли к противоречию. Таким образом, $DN = G$. По лемме 2.10 либо $|D| = q$, где $q \notin \pi(f(p))$, либо $D/\Phi(D)$ — $f(p)$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой. При этом из равенства $f(p) = \mathrm{E}_{f(p)}f(p)$ вытекает, что $D^{f(p)} = D$.

Если $|D| = q$, где $q \notin \pi(f(p))$, то из $G/N = DN/N \cong D$ имеем, что G/N — $f(p)$-критическая группа. В частности, $|G/N| = q$, и справедливо равенство $(G/N)^{f(p)} = G/N$.

Предположим, что $f(p)$-критическая группа $D/\Phi(D)$ является простой неабелевой группой. Тогда из $D \cap N \subset D$ следует, что $D \cap N \subseteq \Phi(D)$. По лемме 2.10 $G/N \cong D/D \cap N$ — $f(p)$-критическая группа. При этом

$$(G/N)/\Phi(G/N) \cong D/\Phi(D)$$

— простая неабелева группа. Отсюда, в частности, получаем $(G/N)^{f(p)} = G/N$.

Допустим, что p делит $|D|$. Тогда, очевидно, p делит $|D/\Phi(D)|$. Так как $D/\Phi(D)$ — простая неабелева группа, из $D/\Phi(D) \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $D/\Phi(D) \in f(p)$. Пришли к противоречию с тем, что $D/\Phi(D)$ — $f(p)$-критическая группа. Следовательно, $(p, |D|) = 1$.

Пусть P — силовская p-подгруппа группы N. По лемме Фраттини имеет место равенство $N_G(P)N = G$. Отсюда и из изоморфизма $G/N \cong N_G(P)/N_G(P) \cap N$ следует, что подгруппа $N_G(P)$ принадлежит формации $\mathfrak{F}$, но не принадлежит формации $f(p)$. Значит, подгруппа $N_G(P)$ содержит некоторую $f(p)$-критическую подгруппу D_1. Так как $N \in \mathfrak{F}$, то $N \in f(p)$. Поэтому D_1 не содержится в N и D_1N/N — неединичная подгруппа группы G/N. Если $D_1N/N \neq G/N$, то $D_1N/N \in f(p)$, а значит, $D_1/D_1 \cap N \in f(p)$. Однако это невозможно, поскольку $D_1^{f(p)} = D_1$. Тем самым $D_1N = G$ и $D_1/\Phi(D_1)$ — простая неабелева группа, изоморфная группе $(G/N)/\Phi(G/N)$.

Рассмотрим подгруппу PD_1. Как выше, показывается, что $(p, |D_1|) = 1$. Пусть H/K — произвольный PD_1-главный фактор подгруппы P. Так как $PD_1 \in \mathfrak{F}$, то $PD_1/C_{PD_1}(H/K) \in f(p)$. Поскольку $P \lhd PD_1$, имеем $C_{PD_1}(H/K) \supseteq P$. Поэтому

$$PD_1/C_{PD_1}(H/K) = D_1C_{PD_1}(H/K)/C_{PD_1}(H/K) \cong D_1/D_1 \cap C_{PD_1}(H/K) \in f(p).$$

Так как $D_1^{f(p)} = D_1$, то $D_1 \subseteq C_{PD_1}(H/K)$, а значит, $C_{PD_1}(H/K) = PD_1$.

Итак, все PD_1-главные факторы подгруппы P центральны в P. Отсюда и из условия $(p, |D_1|) = 1$ следует, что $PD_1 = P \times D_1$.

Поскольку подгруппа N неабелева, она представима в виде прямого произведения изоморфных простых неабелевых групп N_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $P = (N_1)_p \times (N_2)_p \times \cdots \times (N_m)_p$, где $(N_i)_p$ — силовская p-подгруппа группы N_i для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Из условия $PD_1 = P \times D_1$ следует, что $(N_i)_p \subseteq N_i \cap N_i^x$ для каждого $x \in D_1$. Значит, $N_i = N_i^x$ для всех $x \in D_1$. Так как $ND_1 = G$, то $N_i \lhd G$. Отсюда N — простая группа.

Таким образом, G/N — группа внешних автоморфизмов простой неабелевой группы N. По теореме 4.241 из [10] группа G/N разрешима. Пришли к противоречию.

Следовательно, $|G/N| = q$ по лемме 2.10, где q — простое число, не принадлежащее $\pi(f(p))$.

(9) *Если G — группа с неабелевым цоколем N, то $G = QN$, $|Q| = q$, $q \notin \pi(N)$.*

Из п. (8) следует, что G/N — $f(p)$-критическая группа для некоторого простого p, делящего порядок подгруппы N. При этом $|G/N| = q$ — простое число, не принадлежащее $\pi(f(p))$. Так как $N \in f(p)$, то $q \notin \pi(N)$. По теореме Шура — Цассенхауза существует подгруппа Q такая, что $G = QN$ и $|Q| = q$. Теорема доказана.

Следующие примеры показывают, что в теореме 1 все классы (I)–(V) $\mathfrak{F}$-критических групп непусты.

Пример 1. Если $\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных π-групп, то $\mathfrak{F}$-критические группы являются либо группами Шмидта, либо группами простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Пример 2. Если $\mathfrak{F}$ — формация всех разрешимых групп и G — $\mathfrak{F}$-критическая группа с условием $\Phi(G) = 1$, то G принадлежит следующему списку групп, установленных в ряде работ Дж. Томпсона:
$PSL_2(2^p)$, p — простое число;
$PSL_2(3^p)$, p — нечетное простое число;
$PSL_2(p)$, p — простое число, большее 3, для которого $p^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$;
$Sz(2^p)$, p — нечетное простое число;
$PSL_3(3)$.

Пример 3. Пусть $\pi = \{2, 3, 5, 7, 19\}$. Рассмотрим формационную функцию f такую, что

$$f(p) = \mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}), \quad \text{если } p \in \{2, 3, 7, 19\},$$

$$f(5) = \mathrm{E}(PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_{19}),$$

$$f(p) = \varnothing, \quad \text{если } p \notin \pi.$$

Пусть $H \cong PSU_3(8)$ и V — точный неприводимый $\mathrm{F}_5[H]$-модуль. Рассмотрим группу $G = VH$.

Из определения формационной функции f следует, что $G \notin \mathfrak{F} = LF(f)$, а все собственные подгруппы группы G входят в $\mathfrak{F}$, т. е. G — $\mathfrak{F}$-критическая группа типа (IV).

Пример 4. Пусть $H = Sz(2^3)$ и $\pi = \pi(H) = \{2, 5, 7, 13\}$. Группа $Sz(2^3)$ имеет полевой автоморфизм α порядка 3. Рассмотрим группу $G = H\langle\alpha\rangle$, являющуюся расширением группы H с помощью $\langle\alpha\rangle$.

Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — формационная функция такая, что

$$f(3) = \mathfrak{S}_\pi, \quad f(5) = \mathrm{E}(Sz(2^3), Z_2, Z_5, Z_7, Z_{13}),$$

$$f(2) = f(7) = f(13) = \mathrm{E}(Sz(2^3), Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_{13}).$$

Так как $Z_3 \notin f(5)$, подгруппа H не f-центральная в G, а значит, $G \notin \mathfrak{F}$. Отметим, что все собственные подгруппы из H разрешимы. Поэтому если M — максимальная подгруппа группы G, то либо $M = H$, либо M разрешима. Так как

$$Sz(2^3) \in f(2) = f(5) = f(7) = f(13),$$

в случае $M = H$ имеем $M \in \mathfrak{F}$. Если максимальная подгруппа M разрешима, то из

$$\mathfrak{S}_\pi \subseteq f(2) = f(3) = f(7) = f(13)$$

следует, что все главные p-факторы подгруппы M для $p \in \{2, 3, 7, 13\}$ f-центральны в M. Так как $|H| = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, а любая подгруппа порядка 15 циклическая, главный 5-фактор подгруппы M также f-централен в M. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$.

Итак, сама группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а все ее собственные подгруппы входят в $\mathfrak{F}$, т. е. G — $\mathfrak{F}$-критическая группа типа (V).

4. Доказательство теоремы 2

Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не сверхрадикальна. В этом случае существует не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ группа, которая представима в виде произведения двух $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Выберем среди всех таких групп группу R наименьшего порядка. Тогда R обладает такими подгруппами A и B, что $A \in sn_{\mathfrak{F}}(R)$, $B \in sn_{\mathfrak{F}}(R)$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$.

Так как $A \in sn_{\mathfrak{F}}(R)$, существует максимальная цепь подгрупп

$$R = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_k = A$$

такая, что $(A_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq A_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Из предложения A.1.3 в [1] следует, что $A_1 = A(A_1 \cap B)$. По лемме 2.3 формация $\mathfrak{F}$ наследственна. Поэтому $A_1 \cap B \in \mathfrak{F}$. Кроме того, по лемме 2.5 $A \in sn_{\mathfrak{F}}(A_1)$ и $A_1 \cap B \in sn_{\mathfrak{F}}(A_1)$. Поскольку $|A_1| < |R|$, подгруппа A_1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Далее будем считать, что A и B — $\mathfrak{F}$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы R. Тогда $1 \neq R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B \subset R$ по определению $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппы.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы R. По лемме 2.4 ввиду выбора группы R имеем $R/L \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^{\mathfrak{F}}$. В силу насыщенности формации $\mathfrak{F}$ $\Phi(R) = 1$. Поэтому $C_R(L) \subseteq L$.

Пусть p — простое число, делящее порядок подгруппы L. Из включения $C_R(L) \subseteq L$ следует, что $O_{p'}(A) = 1$. Поскольку формационная функция f полная, по лемме 2.1 формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ представима в виде

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{r \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{r'} f(r) \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Так как подгруппа A принадлежит формации $\mathfrak{F} = LF(f)$ и $O_{p'}(A) = 1$, то

$$A \in f(p) \subseteq \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}.$$

Аналогично показывается, что

$$B \in f(p) \subseteq \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}.$$

Так как $R = AB$, то R — $\pi(f(p))$-группа для любого простого p, делящего порядок подгруппы L.

Поскольку группа R не принадлежит формации $\mathfrak{F}$, она содержит некоторую подгруппу D, являющуюся $\mathfrak{F}$-критической группой. В силу насыщенности формации $\mathfrak{F}$ группа $D/\Phi(D)$ также $\mathfrak{F}$-критическая.

Ввиду теоремы 1 справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа $D/\Phi(D)$ имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) группа $D/\Phi(D)$ является группой Шмидта;

3) $D/\Phi(D)$ — простая неабелева группа;

4) $D/\Phi(D)$ — примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем $N/\Phi(D)$, причем

$$D/\Phi(D) = (Q/\Phi(D))(N/\Phi(D)), \quad |Q/\Phi(D)| = q,$$

$q \notin \pi(N/\Phi(D))$ и $Q/\Phi(D)$ — $f(p)$-критическая группа для некоторого простого p, делящего порядок подгруппы $N/\Phi(D)$.

Рассмотрим каждый из четырех возможных случаев.

1. Пусть $D/\Phi(D)$ имеет простой порядок p и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Тогда по аналогии с леммой 2.10 показывается, что группа D также имеет простой порядок p. Тем самым либо $D \cong DL/L$, либо $D \subseteq L$. Так как $R/L \in \mathfrak{F}$ и $L \in \mathfrak{F}$, в обоих случаях из наследственности формации $\mathfrak{F}$ имеем $D \in \mathfrak{F}$. Это противоречит условию $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

2. Пусть $D/\Phi(D)$ является группой Шмидта. По лемме 2.6 группа D имеет порядок $r^\alpha q^\beta$, где $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$. Обозначим через D_r нормальную силовскую подгруппу группы D. В силу леммы 2.7 имеет место равенство $D_r = D^{\mathfrak{F}}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственная, $D^{\mathfrak{F}} \subseteq L = R^{\mathfrak{F}}$. Поэтому r делит порядок группы L. Как отмечено выше, R является $\pi(f(r))$-группой. Стало быть, из того, что формация $f(r)$ наследственная, ввиду леммы 2.8 имеем

$$\mathfrak{G}_q \subseteq \mathrm{E}\,\mathrm{Com}(f(r)) = f(r)$$

для всех $q \in \pi(f(r))$.

Пусть X/Y — D-главный фактор группы $D^{\mathfrak{F}}$. Так как $D^{\mathfrak{F}}$ — r-группа, $D^{\mathfrak{F}} = D_r \subseteq C_D(X/Y)$. Поэтому $D/C_D(X/Y) \in \mathfrak{G}_q \subseteq f(r)$ и все D-главные факторы группы $D^{\mathfrak{F}}$ f-центральны. Отсюда и из равенства $\mathfrak{F} = LF(f)$ получаем, что $D \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию с тем, что D — $\mathfrak{F}$-критическая группа.

3. Пусть $D/\Phi(D)$ — простая неабелева группа. Так как $L \in \mathfrak{F}$, подгруппа D не содержится в L. В силу простоты группы $D/\Phi(D)$ из $D \cap N \subset D$ следует, что $D \cap L \subseteq \Phi(D)$. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ наследственная, $DL/L \cong D/D \cap L \in \mathfrak{F}$. Из насыщенности формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $D \in \mathfrak{F}$; противоречие.

4. Пусть $D/\Phi(D)$ — примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем $N/\Phi(D)$, причем

$$D/\Phi(D) = (Q/\Phi(D))(N/\Phi(D)), \quad |Q/\Phi(D)| = q,$$

$q \notin \pi(N/\Phi(D))$ и $Q/\Phi(D)$ — $f(p)$-критическая группа для некоторого простого p, делящего порядок подгруппы $N/\Phi(D)$.

Пусть R_q — силовская q-подгруппа группы R, содержащая силовскую q-подгруппу D_q группы D. Ввиду лемм 11.5 и 11.6 из [9] можно считать, что $R_q = A_q B_q$, где A_q — силовская q-подгруппа группы A, B_q — силовская q-подгруппа группы B. Рассмотрим подгруппу $R_q L$. Очевидно, что $R_q L = (A_q L)(B_q L)$. Так как $A_q L = A \cap R_q L$ и $B_q L = B \cap R_q L$, из свойств $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп следует, что подгруппы $A_q L$ и $B_q L$ $\mathfrak{F}$-субнормальны в подгруппе $R_q L$. Кроме того, в силу наследственности формации $\mathfrak{F}$ $A_q L \in \mathfrak{F}$ и $B_q L \in \mathfrak{F}$. Если $|R_q L| < |R|$, то $R_q L \in \mathfrak{F}$ ввиду выбора группы R. Но тогда $D \in \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с тем, что D — $\mathfrak{F}$-критическая группа.

Итак, $R_q L = R$. Отсюда $A = A_q L$ и $B = B_q L$ — нормальные максимальные подгруппы группы R. Так как формация $f(p)$ радикальная для всех $p \in \mathrm{Supp}(f)$, по лемме 2.3 формация $\mathfrak{F}$ также радикальна, а значит, $R \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы R. Теорема доказана.

5. Следствия и пример

Работы [2–4, 6, 7] выделяют две серии насыщенных наследственных формаций, которые являются сверхрадикальными:

1) $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полная формационная функция такая, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$;

2) $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полная формационная функция такая, что $f(p) = \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$.

Обе эти серии укладываются в схему теоремы 2.

Действительно, в обоих случаях, очевидно, для любого $p \in \mathrm{Supp}(f)$ формация $f(p)$ наследственная и замкнутая относительно расширений.

Так как в первом случае формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ разрешима, по теореме 1 $\mathfrak{F}$-критические группы, имеющие единичную подгруппу Фраттини, являются либо группами простого порядка, либо группами Шмидта, либо простыми неабелевыми группами с разрешимыми собственными подгруппами.

Предположим, что во втором случае имеется $\mathfrak{F}$-критическая группа G типа (IV). Тогда G — примитивная группа с абелевым p-цоколем N и максимальной подгруппой M такой, что $G = NM$, $(p, |M|) = 1$ и $M/\Phi(M)$ — $f(p)$-критическая группа, являющаяся простой неабелевой группой. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. Так как $NQ \in \mathfrak{F}$ и $C_G(N) = 1$, то $q \in \pi(f(p))$. Отсюда $\pi(M) \subseteq \pi(f(p))$. Из $f(p) = \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$ следует, что $M \in f(p)$. Пришли к противоречию с тем, что $M/\Phi(M)$ — $f(p)$-критическая группа.

Таким образом, в обоих случаях выполняются все условия теоремы 2, значит, формации $\mathfrak{F} = LF(f)$ из пп. 1 и 2 сверхрадикальны.

Следующий пример показывает, что требование теоремы 2 о том, чтобы формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ не имела $\mathfrak{F}$-критических групп типа (IV), является существенным и его отбросить нельзя, т. е. формация $\mathfrak{F} = LF(f)$, обладающая $\mathfrak{F}$-критическими группами типа (IV), может не являться сверхрадикальной.

Пример 5. Пусть $\pi = \{2, 3, 5, 7, 19\}$. Рассмотрим формационную функцию f такую, что

$$f(p) = \mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}), \quad \text{если } p \in \{2, 3, 7, 19\},$$

$$f(5) = \mathrm{E}(PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_{19}),$$

$$f(p) = \varnothing, \quad \text{если } p \notin \pi.$$

Очевидно, что f — полная формационная функция, причем $f(p) = \mathrm{E}_{f(p)}f(p)$ и $f(p)$ — наследственная формация для любого $p \in \pi$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} = LF(f) &= \bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \cap \mathfrak{G}_\pi \\
&= \mathfrak{G}_{5'}\mathrm{E}(PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_{19}) \cap \mathfrak{G}_{2'}\mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}) \\
&\quad \cap \mathfrak{G}_{3'}\mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}) \\
&\quad \cap \mathfrak{G}_{7'}\mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}) \\
&\quad \cap \mathfrak{G}_{19'}\mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}) \cap \mathfrak{G}_\pi \\
&= \mathfrak{G}_{5'}\mathrm{E}(PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_{19}) \\
&\quad \cap \mathfrak{G}_{5}\mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}) \cap \mathfrak{G}_\pi.
\end{aligned}$$

Пусть $H \cong PSU_3(8).(Z_3 \times Z_3) < \mathrm{Aut}(PSU_3(8))$ и V — точный неприводимый $\mathrm{F}_5[H]$-модуль.

Рассмотрим группу $G = VH$. Из равенства

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{5'}\mathrm{E}(PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_{19}) \\ \cap \mathfrak{G}_5\mathrm{E}(PSU_3(8), PSL_2(8), Z_2, Z_3, Z_7, Z_{19}) \cap \mathfrak{G}_\pi$$

следует, что $G \notin \mathfrak{F}$ и $V = G^{\mathfrak{F}}$.

Из табл. 5 в [11] вытекает, что группа H представима в виде $H = A_1B_1$, где A_1 и B_1 — разрешимые максимальные подгруппы группы H. Тогда $G = AB$, где $A = VA_1$ и $B = VB_1$. Так как $V = G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$ и $V = G^{\mathfrak{F}} \subseteq B$, то $A \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$ и $B \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Поскольку подгруппы A и B разрешимы, $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, формация $\mathfrak{F}$ не сверхрадикальная.

Пусть H_1 — подгруппа из H, изоморфная $PSU_3(8)$. Рассмотрим подгруппу $G_1 = VH_1$ группы G. Из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G_1 \notin \mathfrak{F}$. Поэтому группа G_1 (а значит, и группа G) содержит некоторую $\mathfrak{F}$-критическую группу D. При этом $D \cap V$ — силовская 5-подгруппа группы D и $D/D \cap V \cong PSU_3(8)$. Таким образом, D — $\mathfrak{F}$-критическая группа типа (IV).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Ballester-Bolinches A.* A note on saturated formations // Arch. Math. 1992. V. 58, N 2. P. 110–113.
3. *Семенчук В. Н.* Характеризация Š-формаций // Вопросы алгебры. 1992. № 7. С. 103–107.
4. *Семенчук В. Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.
5. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006.
6. *Семенчук В. Н., Шеметков Л. А.* Сверхрадикальные формации // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 5. С. 24–26.
7. *Семенчук В. Н., Мокеева О. А.* О проблеме классификации сверхрадикальных формаций // Изв. вузов. Математика. 2008. № 12. С. 70–75.
8. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Белорусская наука, 2003.
9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
10. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
11. *Liebeck M. W., Prager C. E., Saxl J.* The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups // Amer. Math. Soc. 1990. V. 86, N 432. P. 1–150.

Статья поступила 18 апреля 2013 г.

Каморников Сергей Федорович, Тютянов Валентин Николаевич
Международный университет «МИТСО»,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
`sfkamornikov@mail.ru`, `tyutyanov@front.ru`